Relime Vol. 5, Núm.1, marzo, 2002, pp.45-78

Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes[♦]

Gustavo Martínez Sierra[•]

RESUMEN

Ciertas respuestas de estudiantes de diferentes niveles escolares en torno a los exponentes no naturales son de gran interés por dos motivos: No permiten la construcción de conocimiento y están relacionadas con una forma de conocimiento, que hemos llamado Convenciones Matemáticas que, hasta donde sabemos, no han sido objeto explícito de estudio de otras investigaciones. Así con el objetivo de buscar una explicación en términos de las interacciones del sistema didáctico se realizó un estudio. Los resultados permitieron establecer los elementos necesarios para entender a profundidad los fenómenos didácticos a que atiende y aporta las bases para la discusión del funcionamiento didáctico de las convenciones matemáticas. Además, a través del estudio, se busca la conformación de una línea de investigación que intentara determinar en qué sentido se pueden considerar a las convenciones matemáticas como piezas en la construcción social del conocimiento.

ABSTRACT

Certain responses from students of different school levels, regarding the non-natural exponents, have appealed our attention for two reasons: Such responses do not allow the building of skills and are related with a form of
knowledge which we have called mathematic conventions. To this extent we know these have not been an explicit object of study at other researches. The above situation has led us to perform a study with the purpose of elaborating explanations, in terms of the interactions of the didactic system, based on those responses from the students. The results of this study allow us to establish the necessary elements in order to understand the depth of the related didactic phenomena and also gives us the basis for the discussion of the didactic operation of the mathematic conventions. Furthermore, we seek to shape a line of investigation that will intend to determine in which sense the mathematic conventions can be considered as pieces of the social building of knowledge.

RÉSUMÉ

Notre attention a été appelée par certaines réponses d'étudiants de différents niveaux scolaires sur les exposants non naturels et ce, pour deux raisons: ces réponses ne permettent pas la onstruction de connaissances et elles sont liées à une forme de connaissance que nous appelons les conventions mathématiques qui, d'après ce que nous savons, n'a pas fait l'objet explicitement d'études ou d'autres recherches. Ceci est à l'origine d'une étude réalisée dans le but de trouver une explication à ces réponses des étudiants, en fonction des interactions du système didactique. Les résultats de cette étude nous permettent d'établir les éléments nécessaires en vue de comprendre à fond les phénomènes didactiques en jeu et jettent les bases d'un débat sur le fonctionnement des conventions mathématiques. L'objectif est également de créer une ligne de recherche permettant de déterminer dans quelle mesure les conventions mathématiques peuvent éter consideres comme des éléments de la construction sociale de la connaissance.

[♦] Resumen de la tesis de Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de Maestría. México: Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Dirigida por la Dra. Rosa María Farfán.

[•] Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

RESUMO

Algumas respostas de estudantes de diferentes níveis escolares em torno aos exponentes não naturais chamaram nossa atenção por duas razões: Essas respostas não permitem a construção de conhecimento e estão relacionadas com uma forma de conhecimento que nós chamamos de convenções matemáticas e que até onde sabemos não foram objeto explícito de estudo de outras pesquisas. Em conseqüência disto, realizaremos um estudo visando elaborar explicações no que diz respeito às interações do sistema didático sobre essas respostas dos estudantes. Os resultados deste estudo nos permitem estabelecer os elementos necessários para entendermos a profundidade dos fenômenos didáticos que ele abrange e fornece as bases para discutir o funcionamento didático das convenções matemáticas. Além disso, perseguimos a conformação de uma linha de pesquisa que tentará determinar em que sentido é possível considerar as convenções matemáticas como peças na construção social do conhecimento.

1. INTRODUCCIÓN

La problemática general que guía este trabajo es la consideración de que el saber matemático no fue credo para la escuela por lo que su inserción racional en ella debe atender a las múltiples variables que determinan la transposición didáctica. De esta manera un problema matemático es resuelto una vez que se construye una prueba que demuestre su veracidad por ejemplo, que toda función es expresable en serie de potencias o bien que indique su imposibilidad construyendo una cierta función que muestre que la afirmación general es falsa.

Sin embargo ese resultado y los métodos que se emplearon pasaron de la disputa académica a los textos escolares: ¿Cómo lo hicieron? y ¿en qué se transformaron?. Una vez que dichos resultados fueron transpuestos a los textos y de ahí llevados a la enseñanza, se inicia lo que propiamente llamaremos la Matemática Escolar: el más importante producto de la transposición y principal objeto de estudio de nuestra disciplina.

La investigación que se reporta está inmersa dentro del acercamiento socioepistemológico que intenta explicar, con base en consideraciones de índole cultural y social, la construcción de los conocimientos matemáticos escolares. Desde esta perspectiva se detectaron algunos fenómenos didácticos que giran alrededor de las respuestas que proporcionaron estudiantes al momento de establecer valores para la expresión 2^x (x número entero o racional), así como la falta de argumentos para justificar las respuestas consideradas como correctas.

La primera ocasión en la que encontramos dichos fenómenos fue en la investigación de Lezama (1999), cuyas evidencias dieron cuenta de que tales hechos no permiten la construcción de la noción[1] de función exponencial abordada en ese estudio. Esta circunstancia nos planteó cuestionamientos sobre la naturaleza del conocimiento que establece, por ejemplo, que $2^0=1$ y sobre su *vida escolar*.
Dos hipótesis fueron manejadas desde el principio: que no es un *objeto de enseñanza* y que es una forma de conocimiento cuya naturaleza, que hemos identificado con el nombre de convenciones matemáticas[2], no puede ser explicada por las teorías que el acercamiento socioepistemológico ha tomado cómo punto de partida para su desarrollo: la Teoría de Situaciones Didácticas y la Teoría de la Transposición Didáctica. La falta de investigaciones enfocadas en el estudio explícito de convenciones matemáticas, motivó a realizar un estudio más detallado en la búsqueda de la explicación sistémica de los fenómenos antes señalados; en

[1] Una noción matemática es tomada en el mismo sentido que Chevallard (1997) le atribuye en su Teoría de la Transposición Didáctica. Esto es, objetos de conocimiento construidos, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas.
[2] El término convención matemática lo utilizamos para especificar a aquello acuerdos que se presentan necesarios para dotar de coherencia interna a una teoría matemática y a su respectivo aparato simbólico y algorítmico. De esta manera distinguimos las convenciones matemáticas de otro tipo de convenciones, como por ejemplo las sintácticas que se establecen por definición: $2^3=2*2*2$ o $2*3=2+2+2$.

este sentido se aportarán los elementos básicos para abrir la discusión sobre el funcionamiento didáctico de las convenciones matemáticas y contribuir a una línea de investigación que busque determinar en qué sentido se pueden considerar a las convenciones matemáticas como pieza en la construcción social del conocimiento. Posteriormente se plasmarán estos resultados en diseños experimentales.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y SU JUSTIFICACIÓN

En esta sección se enuncian elementos que muestran como se detectó el problema de investigación que nos lleva a un conjunto de preguntas de investigación que serán enunciadas al final de la sección. Asimismo proporcionamos elementos sobre la pertinencia del estudio dentro de la disciplina de la Matemática Educativa.

2.1 Antecedentes de la investigación

La noción de función es básica dentro de la matemática escolar actual ya que la encontramos en todo currículo del nivel medio superior y superior. A partir de esta noción se articula, en la enseñanza tradicional, todas las nociones fundamentales del cálculo (derivada e integral) y de otras disciplinas científicas. Es por ello que existen numerosas investigaciones que muestran (por ejemplo Harel & Dubinsky, 1992) cómo la enseñanza del concepto de función en las etapas iniciales del aprendizaje del cálculo es problemática. Dicha problemática presenta diversas dimensiones (Cantoral & Farfán, 1998, pp. 355-356):

> "Desde el punto de vista del sistema de enseñanza, tradicionalmente el curso de precálculo es un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes esencialmente del álgebra y de la geometría analítica, tocando con mayor o menor énfasis el estudio de función, habitualmente sobre la definición de Dirichlet-Bourbaki. Su enseñanza tiende a sobrevalorar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado a los argumentos visuales, entre otras causas por no considerarlos como matemáticos, o bien por la concepción que de la matemática y de su enseñanza se posea, sin considerar, por ejemplo, la estructura cognitiva de los estudiantes a los que se dirige. A ello se aúna el contrato didáctico establecido, que como parte de la negociación impide que el status del profesor sea demeritado; si éste no resuelve satisfactoriamente los problemas planteados en el curso, el recurso algorítmico permitirá subsanar decorosamente lo establecido en el contrato aligerando y eliminando dificultades intrínsecas al contenido matemático.
>
> En la perspectiva de la construcción social del conocimiento, diremos que la naturaleza del concepto de función es en extremo compleja, su desarrollo se ha hecho casi a la par del humano, es decir, encontramos vestigios del uso de correspondencias en la antigüedad, y actualmente se debate sobre la vigencia, en el ámbito de las matemáticas, del paradigma de la función como un objeto analítico. Empero, el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como una fórmula, es decir hasta que se logró la integración entre dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. La complejidad del concepto de función se refleja en las diversas concepciones y diversas representaciones con las que se enfrentan los estudiantes y profesores...".

La identificación de esta amplia problemática ha sido el resultado de diversas investigaciones dentro del grupo de investigación del Área de Educación Superior del Cinvestav: (Soto, 1988; Quiroz, 1989; Farfán, 1991; Trujillo, 1995) y su eventual tratamiento se ha visto reflejado en otras (Lezama, 1999; Cantoral & Farfán, 1998; Albert & Farfán, 1997).

Dentro de la perspectiva global mencionada anteriormente, se encuentra la investigación de Lezama (1999), de la cual se ha tomado parte de los datos empíricos. La investigación de Lezama tuvo por objetivo el estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas y en ella se diseñó e implementó una ingeniería didáctica que busca la construcción de la noción de la función exponencial, en tanto sus características geométricas. De sus exploraciones preliminares, de sus puestas en escena y de estudios realizados en el marco de la presente investigación se detectaron varios fenómenos didácticos y de entre ellos destacan los siguientes:

- Las respuestas reiteradas de estudiantes de nivel secundario, medio y superior[3] en donde afirman: A) $2^0 = 0$, B) $2^0 = 2$, C) $2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$ y D) $2^{-3}=-8$ ya que $2^3=8$ y se le coloca el signo
- La ausencia de argumentos entre estudiantes de nivel secundario, medio y superior, distintos a la memoria (como 'leyes'), para establecer que: $2^0 =1$, $2^{-3}=1/2^3$, $2^{1/2}=\sqrt{2}$,...
- Las respuestas reiteradas de estudiantes de nivel medio fueron: A) $2^{-3} = .002$, B) $2^{-3/2} = 2(-3/2) = -3$
- Si x no es entero, 2^x es solamente una notación[4] ($2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}; 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, etc...$)
- Si los estudiantes tenían el recurso de la representación por medio del radical, ignoraban y no tomaban en cuenta la naturaleza de dicho número al considerar $\sqrt{2} = 1.4$, pero no interpretaban este número como resultado de una "exponenciación" sino como una notación.
- Algunos estudiantes de secundaria afirmaron: A) $2^1=2*2$ ya que el dos se multiplica una vez y B) $2^1=2$ ya que $2*1=2$.

En cuanto al primer fenómeno se señala que los argumentos para establecer tales igualdades son coherentes con la enseñanza de la noción de exponente natural y con una concepción del cero como nada y del –3 como un número natural con un signo menos junto a él. De esta manera encontramos lo siguiente (parafraseando a los estudiantes):

- $2^0 = 0$ ya que 'por la definición de potenciación 2^0 es el 2 multiplicado cero (nada) veces es nada (cero)'.
- $2^0 = 2$ ya que 'no hay nada como exponente'.
- $2^1=2*2$ ya que el dos se multiplica una vez.
- $2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$ o $2^{-3}=-8$ ya que $2^3=8$ y se le coloca el signo.

De acuerdo con las evidencias es necesario puntualizar que tales fenómenos se presentan con diversos matices en los diferentes niveles escolares. Esto es detallado en los anexos del estudio (Martínez, 2000).

2.2 El problema de investigación y su justificación

La detección de los fenómenos antes citados proporciona evidencia de que la noción de exponente no natural, puede no haber alcanzado la estabilidad necesaria para, por ejemplo, la construcción de la noción de función exponencial. Además, destaca el hecho de que los fenómenos antes mencionados no fueron todos previstos, al menos de manera explícita, por el análisis preliminar de la investigación de Lezama (1999); por lo que en este sentido uno de nuestros objetivos de investigación es el de realizar un análisis que fortalezca el análisis

[3] En el sistema educativo mexicano las edades promedio que tienen los estudiantes en los diferentes niveles escolares es el siguiente: Nivel secundario 12 a 15 años, en el nivel medio o bachillerato 15 a 18 años y en el nivel superior 18 a 22 años.
[4] Es decir, que no es calculable.

preliminar realizado por Lezama. Debido a esto hemos asumido como problema de investigación a: **“La explicación[5], mediante un estudio sistémico, de los fenómenos didácticos especificados anteriormente”.**

De acuerdo con el problema la investigación derivó en una serie de preguntas en términos del sistema didáctico. Al tener como objetivo la explicación de las respuestas de los estudiantes –las cuales reflejan sus concepciones– planteamos cuestionamientos en torno del saber y del profesor-institución. En cuanto al saber enseñado se consideran las siguientes preguntas: ¿cuáles fueron los mecanismos que permitieron la construcción y la aceptación social de la noción de exponente no natural? y ¿cuál fue la relación de la noción de exponente no natural con la noción de función exponencial en la construcción social de ambas nociones? En cuanto al profesor-institución: ¿Cuál es la vida escolar de los exponentes no naturales?

Estas preguntas se formularon con el objetivo de establecer los mecanismos del consenso en dos grupos sociales; el primero, el de la sociedad de matemáticos que construyó la noción de exponente no natural y el segundo, el de la sociedad (alumnos-profesor) que conforman un sistema didáctico con el fin de estudiar la misma noción. La hipótesis fundamental es que los mecanismos que se encuentran en el primero proporcionarán elementos para entender los mecanismos del segundo y con ello responder a la pregunta de investigación. Cabe destacar que siempre se tendrán presentes las diferencias cualitativas entre ambos grupos sociales, tales diferencias serán estudiadas en detalle en el análisis didáctico que aborda la pregunta enfocada en el profesor-institución.

3. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

La postura teórica que esta investigación asume para su realización es la consideración de que la Matemática Educativa tiene como *objeto* de estudio al *sistema didáctico* (los saberes, la institución-profesor y el alumno) y a los *fenómenos* (*didácticos*) que en él suceden; es decir, esta perspectiva asume como *objeto de estudio* la complejidad de los hechos educativos, al considerarlos como resultado de una continua interacción entre los componentes del sistema didáctico que se conforma con el objetivo de la adquisición, en situación escolar, de los conceptos y métodos de la matemática. Todo ello con base en consideraciones de índole cultural y social sobre la construcción de los conocimientos matemáticos escolares.

Se tiene entonces una perspectiva *sistémica* reconociendo que el sistema didáctico está constituido por tres subsistemas:

- institución–profesores[6]
- los alumnos y
- un cuerpo de conocimientos a aprender (saber enseñado) alrededor de un saber (designado ordinariamente por el programa) se forma un *contrato didáctico*, que toma a ese saber como objeto de un proyecto compartido de enseñanza y aprendizaje; y que une en un mismo sitio a profesores y alumnos.

y por:

- un estrato que Chevallard (1997) denomina la *noósfera* (lugar donde se piensa el funcionamiento didáctico) del sistema didáctico.
- un entorno social y cultural que determina las relaciones entre los componentes del sistema didáctico y la *noósfera*.

[5] Hacemos notar que utilizaremos el término “explicación” en el sentido más primitivo de lo que significa hacer teoría.
[6] En lo sucesivo utilizaremos el nombre genérico de profesor.

De esta concepción, se desprende que nuestra disciplina intenta teorizar sobre los fenómenos didácticos y que la intención de una investigación es la de generar conocimiento de tipo descriptivo, explicativo o predictivo sobre alguno de tales fenómenos. En este sentido la presente investigación pretende realizar un estudio de carácter explicativo sobre algunos fenómenos ligados a la construcción de la noción de función exponencial.

Para responder a la pregunta: ¿Cuáles fueron los mecanismos que permitieron la construcción y la aceptación social de la noción de exponente no natural?, se tomó como modelo la construcción social del conocimiento matemático, lo que se entiende por epistemología dentro de la llamada perspectiva constructivista.

Para responder a la pregunta: ¿Cuál es la vida escolar de la noción de exponente no natural? se debe tener un modelo del funcionamiento global del sistema didáctico el cual se tomará de la Teoría de la Transposición Didáctica. Además se ha tomado el concepto de *contrato didáctico* para situar en un medio didáctico a las respuestas de los estudiantes.

Algunos de los hallazgos de esta investigación, en lo referente a la epistemología de la noción de exponente no natural, han motivado a considerar la noción de "metamatemáticas" para explicar la naturaleza de ciertas nociones y argumentaciones.

3.1. Epistemología

La perspectiva constructivista asume que la epistemología se ocupa de preguntas, en un sentido amplio, referentes a construcción social del conocimiento y en un sentido más preciso, se ocupa de preguntas del tipo: ¿Qué es lo que posibilita (o impide) la construcción del conocimiento? o ¿A través de qué procesos el conocimiento pasa de un estado considerado menor a un estado considerado mayor. La epistemología genética inaugurada por Jean Piaget intenta responder dichos cuestionamientos .

La tesis fundamental de la epistemología genética es que el sujeto (o la sociedad) no aprende los conceptos en forma aislada, sino, más bien, asimila y adapta las situaciones en las que el conocimiento tiene significados construidos, éstos, mediante la acción del sujeto sobre el objeto y en este proceso sus estructuras de conocimiento se adaptan a las situaciones contextuales.
Esta tesis puede ser dividida en dos: 1) la tesis interaccionista según la cual los conocimientos actuales del sujeto (o la sociedad) proceden de la interacción de su experiencia y sus conocimientos anteriores y 2) la tesis operativa que afirma que los conocimientos se derivan fundamentalmente de la acción con el mundo, ya que es así como el sujeto pone a prueba sus conocimientos y los modifica.

Dentro de nuestra disciplina estas ideas han sido sistematizadas, con fines didácticos para establecer un medio adecuado para el aprendizaje, en la Teoría de las Situaciones Didácticas de G. Brousseau. Éste distingue en su artículo *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas* (Brousseau, 1993) entre: a) las situaciones de acción, cuya finalidad es hacer y lograr; b) las situaciones de formulación, cuya finalidad es producir un mensaje y comunicarlo; c) las situaciones de validación, cuyo objetivo es demostrar la verdad de un enunciado o de una teoría y lograr la adhesión de los demás y d) situaciones de institucionalización cuyo objetivo es el de establecer la correspondencia entre el conocimiento que es producto del proceso de adaptación y el que es admitido como válido por la sociedad.

3.2. Teoría de la transposición didáctica

De acuerdo con esta teoría (Chevallard, 1997), el saber a enseñar se presenta mediante textos de saber, éstos tienen como una de sus características la de seguir un orden lógico en la presentación de los saberes. Todo el discurso tiene un principio y un fin (autocontención de los textos de saber) y opera por un encadenamiento lógico de razonamientos. El sistema educativo vive una ficción (funcionalmente necesaria) de la correspondencia entre los tiempos de aprendizaje y los tiempos de enseñanza. Hoy sabemos un hecho fundamental: la coherencia lógica no garantiza el aprendizaje (el ejemplo más conocido es el que nos proporciona la llamada reforma de la matemática moderna).

La teoría establece que el saber a enseñar difiere cualitativamente del saber erudito (esto, claro está, debido a los fenómenos de la transposición didáctica). En este sentido se precisan las características del saber enseñable: desincretización, despersonalización, programabilidad, publicidad y el control social de los aprendizajes.

Otro de los aspectos de interés para esta investigación, es el funcionamiento didáctico de los saberes que proporciona la teoría, la cual establece diferentes niveles de explicitación en el discurso didáctico (Chevallard, 1997 pp. 57-61 ; Chevallard, et al., 1998 pp. 220-223):

- **Nociones protomatemáticas**: Aquellas cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni como instrumento útil para el estudio de otros objetos. Como ejemplo tenemos la noción de simplicidad o patrón presente por ejemplo en las tareas algebraicas de factorización y simplificación de expresiones algebraicas.
- **Nociones paramatemáticas**: Nociones que se utilizan conscientemente (son reconocidas y designadas) como instrumentos para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en sí mismas; y por lo tanto no son objetos de evaluación directa, sino que son identificadas al momento de presentarse su no-maestría por parte de los estudiantes. Como ejemplo de este tipo de nociones tenemos la de demostración: a un alumno se le pide demostrar aunque ésta no haya sido considerada como objeto de enseñanza.
- **Nociones matemáticas**: Objetos de conocimiento construidos, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas. Las nociones matemáticas son por tanto objeto de estudio es sí mismas, además de servir como instrumento para el estudio de otros objetos. Son los contenidos que son el objeto de una evaluación explícita y este tipo de nociones son designadas comúnmente por la currícula.

Cabe aclarar que estos niveles de explicitación no son absolutos, pues a veces es posible llevar una noción a un nivel superior de explicitación, a este respecto Chevallard (1997) menciona que la noción paramatemática de demostración puede ser objeto de definiciones lógicas y precisas en la lógica matemática.

Estas nociones forman distintos estratos del funcionamiento del conocimiento matemático escolar que podemos dividir en dos grandes grupos: las de nociones explícitas que están conformadas por las nociones matemáticas; y nociones implícitas conformadas por las nociones paramatemáticas y las nociones protomatemáticas. La importancia de estas distinciones en niveles de explicitación es que proporcionan elementos para el análisis del discurso didáctico.

En relación a la Teoría de Situaciones Didácticas en (Chevallard, et al., 1998) los niveles de explicitación son relacionados con la teoría de situaciones didácticas como lo mostramos en la Tabla 1.

INSERTAR TABLA 1

La intención de considerar las relaciones existentes, al seguir a Chevallard, entre los diferentes niveles de explicitación en el discurso didáctico y los modos de funcionamiento de los conceptos matemáticos que establece Brousseau en su Teoría de Situaciones (Brousseau, 1993) es la de establecer las diferencias y semejanzas cualitativas entre la construcción social y la construcción escolar (o vida escolar) de la noción de exponente no natural.

3.3. La noción de metamatemáticas

Utilizaremos el término "consideración metamatemática" para designar, en un sentido amplio, ciertos elementos de información o de conocimientos sobre el funcionamiento, sobre la utilización o sobre el aprendizaje de las matemáticas. En un sentido más preciso Robert y Robinet (1996) señalan que existen diferentes formas o niveles de información y de conocimientos sobre el funcionamiento, sobre la utilización o sobre el aprendizaje de las matemáticas:

- De la información del conocimiento matemático (métodos, estructuras, organización),
- acerca de la información del funcionamiento matemático, por ejemplo, la explicación sobre el rol del juego de marcos en la resolución de problemas, el rol de las preguntas, de los ejemplos y contraejemplos, el papel de la localización de los parámetros en una cuestión matemática, etc. y
- de la información de naturaleza epistemológica sobre las matemáticas, por ejemplo la naturaleza unificadora del álgebra lineal.

Diremos que una noción es de tipo metamatemática cuando funciona como una organizadora de las nociones protomatemáticas, paramatemáticas y matemáticas. Señalamos que esta organización no es un proceso lógico sino producto de otras necesidades; como por ejemplo la organización teórica de la definición formal del límite o la función unificadora de los exponentes no naturales (lo cual se mostrará en el análisis epistemológico).

En este sentido se entiende que las convenciones matemáticas son el producto de consideraciones metamatemáticas; ya que éstas provienen de acuerdos que se presentan necesarios para dotar, por ejemplo, de coherencia interna a una teoría; es decir que las convenciones matemáticas surgen de consideraciones metamatemáticas que reflexionan sobre la naturaleza de las matemáticas como disciplina científica. Este tipo de consideraciones proviene de exigencias tales como, por ejemplo, que la matemática ha de estar libre de contradicciones o que debe proporcionar los métodos más sencillos y generales.

Señalamos que la distinción entre una noción matemática y una metamatemática, para nuestros fines, no es absoluta. Esta distinción depende fundamentalmente de las características de los alumnos y profesores que se relacionan con ellas.

La sensibilidad de nuestra disciplina ante la existencia de obras matemáticas que tienen un referente epistemológico metamatemático ya ha sido tomada con anterioridad. Algunos investigadores como A. Robert y J. Robinet (Robert & Robinet, 1996) han señalado que algunas obras matemáticas no se pueden transponer mediante procesos a-didácticos debido, fundamentalmente, a sus características epistemológicas. Ellos consideran entre sus ejemplos a la naturaleza unificadora de la definición formal de límite y a los conceptos inmersos en álgebra lineal y proponen, para su enseñanza, el recurso de la "palanca" meta (es decir; la utilización, como recurso didáctico, de la información clasificada como "meta").

3.4. Convenciones matemáticas

Una convención matemática es un agregado (bajo la forma de una definición, un concepto, una restricción, una interpretación entre otras) a una teoría (o un marco conceptual), establecido con el objetivo de que una *estructura*, o parte de ella, de objetos matemáticos construida con anterioridad se conserve. Este agregado puede surgir por diversos requerimientos; por ejemplo de generalización, unidad o para evitar contradicciones dentro de la teoría.

De lo anterior se desprende que el análisis epistemológico de una convención matemática puede ser realizada caracterizando la *evolución* de una teoría considerada como inicial T_0 hacia una teoría considerada como final T_1. Como T_1 se considera heredera de cierta *estructura* de T_0 podemos considerar convenciones matemáticas son los agregados en T_1 para que dicha estructura se conserve. La elección del tipo de *estructura* que debe preservarse depende de los objetivos específicos que pretenda alcanzar T_1 y por esta misma razón es posible que otra estructura de T_0 sea abandonada por los nuevos requerimientos (ver la Figura 1).

INSERTAR FIGURA 1

Esta primera caracterización muestra que las convenciones matemáticas son un mecanismo de construcción del conocimiento o parte de otros; por lo que la atención siempre estará puesta en ese matiz; más allá de lo que el sentido común pueda sugerirnos lo que es una convención matemática.

La caracterización anterior coloca el énfasis para entender a las convenciones matemáticas como instrumento teórico, para satisfacer ciertos requerimientos de preservación de un conocimiento anterior dentro de una nueva organización del conocimiento. Por tal motivo es importante el tipo de consideraciones *metamatemáticas* vertidas en un proceso de construcción, las cuales se presentaran bajo la forma de *argumentos* sobre lo que se debe o no se debe conservar.

En nuestros días, en el caso que interesa, el concepto de exponente natural mayor a uno es presentada como una *definición* (mediante una igualdad) para organizar la acción de multiplicar de manera reiterada una misma cantidad atendiendo requerimientos de economía en la escritura en la sintaxis aritmética y algebraica. En términos matemáticos esta definición provoca la existencia del objeto matemático llamado *potencia* que surge de la interacción de los objetos base y exponente. La definición anterior de *potencia* genera de manera deductiva la estructura operativa siguiente (designadas comúnmente como *leyes de los exponentes*):

- $A^nA^m=A^{n+m}$,
- $A^n/A^m=A^{n-m}$ con $n > m +1$, $A \neq 0$
- $(A^n)^m=A^{nm}$

Posteriormente se definen los exponentes no naturales con el objetivo de conservar la estructura operativa anterior, mediante diversos argumentos mostrados en la Tabla 2.

INSERTAR TABLA 2

En el análisis espistemológico, que posteriormente se presentará, se realizó un trabajo semejante para determinar las características epistemológicas de otras formulaciones de los exponentes que se han hecho a lo largo del devenir histórico.

3.5. El contrato didáctico

Tomamos como referente teórico, para dar un matiz a las respuestas de los estudiantes como el resultado de su interacción con un medio didáctico, tal referente lo tomaremos de la noción de *contrato didáctico*: el conjunto de condiciones que determinan implícitamente aquello que el profesor y el alumno tiene la responsabilidad de asumir y en lo cual, cada uno está comprometido delante del otro ante un contenido matemático específico. Esta noción nos permite modelar la relación didáctica existente entre profesor y alumnos, ya que estos se involucran en un juego con reglas que funcionan como las cláusulas de un contrato. Sin embargo, dichas reglas no tienen nada de explícito, se revelan esencialmente en la transgresión de las mismas.

Examinar desde este punto de vista la estructura de la enseñanza clase/ejercicio nos proveerá de un modelo de las relaciones a las que se encuentra sometido el estudiante al momento de contestar el cuestionario, ya que podemos considerar que en tal estructura es en la que se encuentra comúnmente inmerso[7]. El docente cumple su contrato, en la estructura de la enseñanza clase/ejercicio, dando lecciones para aprender y ejercicios para hacer. Debe prever en su clase partes que el alumno pueda aprender, darle problemas factibles (en los cuales el enunciado anticipa todos los datos necesarios y solamente aquellos, con los cuales la solución es posible de encontrar combinando razonablemente los elementos del curso a aprender). El alumno cumple su contrato si aprende sus lecciones (bien o mal) y si él hace sus ejercicios (correctos o no). Si el alumno no comprende o no sabe cómo hacerlo, el docente debe «ayudarle» orientando el trabajo del alumno, por ejemplo, por medio de indicios que le guiarán o de pequeños interrogantes intermediarios elementales llevándolo al resultado.

Otra función del contrato es hacer evolucionar la significación de los contenidos. El contrato didáctico registra el «envejecimiento» de los contenidos enseñados y de esta manera interviene en la progresión del saber.

4. METODOLOGÍA

La metodología que se desprende de la postura sistémica y de las tres preguntas con que hemos descrito el problema de investigación determinan la necesidad de realizar:

Un análisis epistemológico que busque establecer un esquema de la génesis y desarrollo histórico de la noción de exponente no natural desde un punto de vista epistemológico. Este análisis contemplará el estudio del funcionamiento y de las diversas formulaciones de las nociones que nos interesan, mediante la consulta, en la medida de lo posible, de textos matemáticos antiguos originales.

Un análisis didáctico que cumplirá con el objetivo de construir un esquema de la vida escolar del exponente no natural, que contemplará el análisis de programas de estudio para identificar aquellas de sus partes que consideran la noción de exponente no natural y el análisis de textos más utilizados. Además se realizará un estudio con profesores con el objetivo de determinar, con mayor precisión, la vida escolar de la noción de exponente no natural.

5. Análisis epistemológico

El análisis epistemológico permitió realizar el siguiente esquema de la construcción social del exponente no natural:

- En el marco del pensamiento algebraico, la noción de exponente no natural surgió como una convención debida a la intención de preservar la relación entre las progresiones aritmética y geométrica, con el fin de unificar un algoritmo para la multiplicación de monomios; es decir, aparece como una convención matemática para que no exista contradicción con el aparato simbólico-algorítmico con que se contaba en esos momentos. Esta convención surge de un principio metamatemático que establece que en matemáticas se busca el mayor grado de generalidad en sus algoritmos.

[7] Es conveniente enfatizar que los estudiantes han contestado al cuestionario antes del establecimiento del contrato didáctico propio de una situación didáctica.

- En el marco del problema de cuadraturas de curvas existió una auténtica reconstrucción de las convenciones; ya que emergieron como organizadoras de las fórmulas de cuadraturas. Esta convención surge de un principio metamatemático que establece la necesidad teórica de que las fórmulas de cuadraturas estén dadas por una única fórmula o algoritmo.

No siendo de gran interés la cronología del desarrollo histórico de la noción de exponente no natural, se establecieron categorías de análisis que se encuentran directamente referidas al problema de investigación y que la relacionan con otras nociones: número, igualdad, representación, consideraciones metamatemáticas y con las ocasiones de uso que permitieron su aceptación generalizada.

5.1. Consideraciones metamatemáticas como fuente de las convenciones

En este apartado se detalla cómo es que la noción de exponente no natural fue construida mediante diferentes consideraciones metamatemáticas que se rigen de los principios de: 1) uniformidad en los métodos para realizar las operaciones entre monomios, 2) continuidad o permanencia de las fórmulas para determinar la cuadratura de curvas y 3) inducción para la uniformidad de las operaciones con monomios.

5.1.1. Uniformidad en los métodos para realizar las operaciones entre monomios

La idea de utilizar la relación entre la progresión aritmética y la progresión geométrica para la operatividad multiplicativa entre monomios fue utilizada, de acuerdo con (Meavilla, 1993), por diversos algebristas del siglo XVI; entre ellos Esteban de la Roche (1520), Christoph Rudolff (1526), Petrus Apianus (1527), Gemma Frisius (1540) y Michel Stifel (1544). Para ejemplificar la manera en que era utilizada la relación para la operatividad multiplicativa entre monomios se ha tomado lo siguiente del estudio de Meavilla (1993) sobre la obra *Libro primero de arithemetica algebratica* de Marco Aurel, publicado en Valencia en 1552.

Marco Aurel ofrece el nombre, símbolo y descripción de cada uno de los diez caracteres "cósicos" como lo muestra la Tabla 3 (arriba se colocó el símbolo usado en la actualidad).

INSERTAR TABLA 3

Después de haber establecido esta notación, Aurel pasa revista de lo que hoy en día llamaríamos álgebra de polinomios (suma, resta, multiplicación y extracción de raíz cuadrada). Se destaca la existencia de un símbolo especial asociado al "número"; ya que tal emergencia en la notación resulta de querer que la regla de multiplicación de los monomios sea uniforme.

La regla de Aurel se basó en el comportamiento especial de la sucesiones (la relación entre la progresión aritmética y progresión geométrica) y está expresada en los siguientes términos (ver Tabla 4): "Y cuando tu querras multiplicar vna dignidad, grado, o carácter con otro, mira lo que esta encima de cada uno y junta lo simplemente, y aquello que verna, mira encima de qual carácter estara: tal diras que procede de tal multiplicacion".

INSERTAR TABLA 4

Por otro lado, Chuquet en *La triparty en la Science des Nombres*, documento fechado en 1484, construyó una noción de exponente cero y negativo (al parecer no utilizó exponentes fraccionarios). No nos fue posible determinar las razones que llevaron a Chuquet a establecer las reglas operativas que a continuación se presentan, pero por la manera en que opera es de suponerse que la relación entre la progresión aritmética y la progresión geométrica, conocida desde la antigüedad, hayan sido la fuente de su operatividad.

Al respecto Paradís (1993) señala:

> "Chuquet explica que cada número puede considerarse como cantidad estricta, y así para indicarlo, se puede añadir un cero en la parte superior del número, como por ejemplo 12^0, 13^0 para indicar 12 o 13. Pero cada número puede considerarse como número primero de una cantidad continua, también dicho número lineal, indicando así: 12^1, 13^1... o bien número superficial cuadrado: 12^2, 13^2 ... y así sucesivamente hasta el orden que se quiera (12^0 quiere decir doce; 12^1 indica $12x$; 12^2 significa $12x^2$,...)."

Unas páginas después Paradis afirma:

> "Chuquet opta resueltamente, desde el primer momento, por abandonar las distintas nomenclaturas para designar el orden de las raíces, así como el de las potencias de la incógnita, *para exponer una forma de denominación unificadora, que facilite las operaciones entre estas entidades.* " (las cursivas son nuestras).

La afirmación de Paradís queda más clara con el siguiente párrafo tomado de Struik (1986), el cual muestra con claridad que su notación era con la intención de que se conservara su algoritmo para la multiplicación: (Chuquet utiliza $.7^{1.\tilde{n}}.$ para denotar $7/x$).

> "Example. He who multiplies $.12^0.$ by $.12^0.$ obtains .144., then he who adds .0. to .0. obtains .0.; hence multiplication gives .144..
> Then He who multiplies $.12^0.$ by $.10^2.$has first to multiply .12. by .10., which gives .120. and then .0. must be added to .2.. Thus the multiplication will give 120^2 By the same reasoning he who multiplies $.5^1.$by $.8^1.$obtains the multiplication $.40^2.$."
> [...]
> Similarly, he who would multiply $.8^3.$ by $.7^{1.\tilde{n}}.$will find it convenient first to multiply .8. by .7.. He obtains .56. then he most add the denominations, and will take 3.*p* with .1.*ñ* and obtain .2.. Hence the multiplication gives $.56^2.$ and this way we must understand other problems.

5.1.2. Continuidad o permanencia de las fórmulas para determinar la cuadratura de curvas

Wallis se basó, para hallar áreas, en el método de los indivisibles de Cavalieri. Es a través de éste que él determinó la posibilidad de resolver distintos problemas de cálculo de áreas y superficies a través de razones aritméticas de la forma: $\dfrac{0^k+1^k+2^k+...+n^k}{n^k+n^k+n^k+...+n^k}$.

De acuerdo con (Dennis & Confrey, 2000) Wallis investigó el comportamiento de estas razones cuando el valor de n se incrementa para k=1,2,3,4 y 5 utilizando las fórmulas, no demostrados por él, de las sumas $0^k+1^k+2^k+...+n^k$ (k=1,2,3,4 y 5) para establecer el límite siguiente (por decirlo en términos modernos):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0^k+1^k+2^k+...+n^k}{n^k+n^k+n^k+...+n^k}=\frac{1}{k+1} \quad (k=1,\ 2,3,4,5).$$

A tales límites Wallis los nombra *razones características* de *índice* 1, 2, 3, 4 y 5 según sea el valor de k. A partir de estas consideraciones hace la afirmación general de que la razón característica de índice k es $1/(k+1)$ para todos los enteros positivos. Esta razón característica, en términos modernos representa la hipótesis, manejada durante todo el siglo XVI, de que (tomando en cuenta que esta integral representa el área bajo la curva): $\int_0^a x^p dx=\dfrac{a^{p+1}}{p+1}$

Confrey & Dennis (2000) afirman que fue a partir de consideraciones sobre el complemento de las áreas de las gráficas $y=x^k$, (k entero positivo) que Wallis sugirió la noción de índices fraccionarios. Así, debido a que el área bajo la curva $y=\sqrt{x}$ es el complemento del área bajo $y=x^2$ debe tener una razón característica de 2/3=1/(1+1/2) por lo que el índice de $y=\sqrt{x}$ debe ser 1/2. Lo mismo puede verse para $y=\sqrt[3]{x}$, cuya razón característica debe ser 3/4=1/(1+1/3) y por tanto su índice será 1/3.

Esta misma interpretación le permite a Wallis darle un significado al exponente cero "Debido a que $y=x^0$ debe tener una razón característica de 1, debe ser una línea horizontal. Debido a que 1 elevado a cualquier potencia es 1, esta línea horizontal debe estar a la altura de 1" (Confrey & Dennis, 2000).

A continuación Wallis afirmó (Confrey & Dennis, 2000) que el índice apropiado de $y=\sqrt[q]{x^p}$ debe ser p/q y que su razón característica debe ser $1/(1+p/q)$; pero al no tener manera de verificar directamente la razón característica de tales índices, por ejemplo de $y=\sqrt[3]{x^2}$, Wallis invoca el principio de "interpolación" el cual afirma que cuando se puede discernir un patrón de cualquier tipo en una sucesión de ejemplos, uno tiene el derecho de aplicar ese patrón para cualesquiera valores intermedios.

Wallis también interpretó (Confrey & Dennis, 2000) a los números negativos como índices. Define el índice de $1/x$ como -1, el índice de $1/x^2$ como -2, etc. También extiende esta definición a las fracciones: por ejemplo, $1/\sqrt{x}$ tiene un índice de -1/2[8]. Después establece que la relación entre el índice y la razón característica sigue siendo válida para esos índices negativos. Esto es, si k es un índice entonces $1/(k+1)$ es la razón entre el área sombreada bajo la curva y el rectángulo que lo contiene. En el caso de un índice negativo, esta área sombreada no es acotada

[8] La información que nos proporcionan nuestras dos fuentes principales no nos permiten determinar claramente los motivos que tuvo Wallis para realizar tales definiciones; pero es de suponer que fueron tomadas de las convenciones algebraicas que hemos detallado con anterioridad.

(hecho que Wallis conocía como lo muestran los siguientes párrafos). Lo cual no impidió que Wallis generalizara su afirmación.

- Cuando k=-1 la razón característica debe ser $\frac{1}{-1+1}=\frac{1}{0}=\infty$ [9]. Wallis aceptó este cociente como razonable debido a que el área bajo la curva 1/x diverge; el cual, al parecer, era un hecho muy conocido en la época.
- Cuando k=-2, la razón característica debe ser 1/(-2+1)=1/-1. Aquí, la concepción de Wallis sobre la razón difiere de nuestra aritmética moderna de números negativos. Él no cree que 1/-1=-1. Más bien, él se queda con su epistemología de representaciones múltiples. Debido a que el área sombreada bajo la curva $y=1/x^2$ es más grande que el área bajo la curva 1/x, concluye que la razón 1/-1 es mayor que infinito ("ratio plusquam infinita").
- Prosigue concluyendo que 1/-2 es incluso más grande. Esto explica el plural en el título de su tratado *Arithmetica Infinitorum*, de la cual la traducción más adecuada sería La Aritmética de los Infinitos.

Aun que sabemos poco de la influencia que tuvieron las interpretaciones de Wallis al parecer fue poca, ya que trabajos ulteriores muestran una interpretación gráfica del cálculo que no involucraba la consideración de "infinitos". Esta nueva interpretación permite uniformizar la fórmula del cálculo de las cuadraturas a través de la posición relativa en que se localiza el área calculada. A manera de ejemplo veamos la interpretación que hizo Newton (1669):

> "Para la base AB de alguna curva dejemos que la ordenada BD sea perpendicular y dejemos AB como x y BD como y. Sean a, b, c... cantidades dadas y m, n enteros. Entonces
>
> Regla I (cuadratura de curvas simples). Si $ax^{m/n} = y$, entonces $\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ es igual al área de ABD.
>
> Esto es evidente en los ejemplos.
>
> [...]

INSERTAR FIGURA 2

> Ejemplo 2. Si x^2 ($= 1\times x^{\frac{2}{1}}$) $= y$, entonces $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(=\frac{8}{3}\sqrt[2]{x^3}\right)$ = ABD.
>
> [...]
>
> Ejemplo 4. Si (1/x^2) (= x^{-2}) = y, esto es si a = n = 1 y m = -2, entonces $\left([1/-1]x^{-\frac{1}{2}} =\right) - x^{-1}(=-[1/x]) = \alpha$BD infinitamente extendida en la dirección de α: el cálculo toma su signo negativo debido a que es tomado del otro lado de la línea BD.

[9] Lo que nosotros entendemos por fracciones en la época de Wallis se concebía como proporcionalidad por lo que 1 es 0 (nada) como ∞ es a 1.

INSERTAR FIGURA 3

La importancia de estas interpretaciones del signo negativo reside en que son convenciones que resultan de un principio sobre el funcionamiento de las matemáticas, que establece la necesidad de que las fórmulas de cuadraturas estén dadas por una única fórmula o algoritmo; principio que denominamos de tipo metamatemático.

5.1.3. Inducción para la uniformidad de las operaciones con monomios

Este principio, en resumen, consiste en la paráfrasis: ‘en los ejercicios precedentes se ha notado que en la extracción de la raíz cuadrada el procedimiento a seguir es el de dividir el exponente entre dos, entonces si el exponente no es divisible por dos esta división del exponente puede dejarse expresada: $\sqrt{a^3} = a^{3/2}$’. Dicho argumento se puede observar en los *Elementos de Álgebra* de Euler (1984), publicados por primera vez en 1840, de la siguiente manera en cuanto a los exponentes negativos y fraccionarios:

> “181. [...]
> De la misma manera cuando se requiere multiplicar por a la potencia de cualquier número representado por a, teniendo un exponente negativo tenemos sólo que agregar 1 al exponente. Entonces, a^{-1} multiplicado por a produce a^0, o 1; que podemos hacer más evidente considerando que a^{-1} es igual a $\frac{1}{a}$, y que el producto de $\frac{1}{a}$ por a es $\frac{a}{a}$, es consecuentemente igual a 1; de manera semejante a^{-2} multiplicado por a produce a^{-1}, o $\frac{1}{a}$; y a^{-10} multiplicado por a produce a^{-9}, etc. [Ver Art. 175, 176]”.
>
> [...]
>
> “195. Se ha señalado en el capítulo precedente que para obtener el cuadrado de alguna potencia debemos se debe doblar el exponente de la potencia; en general el cuadrado, o la segunda potencia de a^n es a^{2n}; y recíprocamente también se sigue que la raíz cuadrada de a^{2n} es a^n, lo cual es tomar la mitad del exponente o dividirlo por 2.
>
> 196. Entonces la raíz cuadrada de a^2 es a^1, o a, la de a^4 es a^2, la de a^6 es a^3 etc. En general la raíz cuadrada de a^3 debe ser necesariamente $a^{\frac{3}{2}}$, y la de a^5 debe ser necesariamente $a^{\frac{5}{2}}$, consecuentemente debemos tener de la misma manera que $a^{\frac{1}{2}}$ es la raíz cuadrada de a^1. Por esta causa podemos ver que $a^{\frac{1}{2}}$ es igual a $\sqrt{a}$; este nuevo método de representar la raíz cuadrada demanda particular atención”.

5.2. El papel de las representaciones

En los apartados anteriores se ha notado el papel fundamental que desempeñó la representación gráfica en la construcción histórica de la convenciones presentes en los exponentes no negativos. En este sentido sólo señalaremos los hechos que resultan de particular interés para el problema de investigación; ya que éstos indican que la representación algebraica o aritmética puede ser insuficiente para dotar de significados a las convenciones.

Chuquet abandonó las significaciones geométricas que posee el “número primero de cantidad continua” (longitud) y sus multiplicaciones (“número segundo de cantidad continua” como área y “número tercero de cantidad continua” como volumen) para establecer la existencia de cantidades de “grados” arbitrarios, sin embargo este uso no fue tomado por las obras algebraicas posteriores.

La hipótesis que se propone es que hizo falta más de una representación que les diera status de *objetos* a esas cantidades, tal como ocurrió cuando estas fueron representadas por curvas en un sistema de referencia. Es en este nuevo contexto que una parte de rica semántica de los números negativos es recuperada, la noción de *negatividad* es puesta en funcionamiento en el campo de las proporciones como "carencia" y como "estar a la izquierda" en la representación gráfica. Tales interpretaciones (convenciones matemáticas) tenían por objetivo buscar que un *único* algoritmo funcionará para el cálculo de cuadraturas de todas las curvas algebraicas conocidas, en tanto la ecuación que la representaba[10].

5.3. El exponente no natural y su relación con la construcción de la noción de número

Es importante destacar la estrecha relación que existió entre la construcción de la noción de exponente no natural y la noción de número; sin embargo en este trabajo se realizaran algunas consideraciones que sobresalen a la luz del estudio epistemológico y que se relacionan con el problema de investigación. En particular llama la atención sobre lo que puede ocurrir en la enseñanza moderna cuando se introduce la noción de exponente negativo o fraccionario cuando estos números no gozan de *legitimidad* como *objetos* numéricos ante los alumnos.

En este sentido la obra de Chuquet es significativa ya que el uso que él hace de los números negativos (como “exponentes” según nuestro interés) era una concepción adelantada para su época (de hecho las discusiones sobre la legitimidad de los números negativos se extendió por mucho tiempo después (Glaeser, 1981).

De acuerdo con lo anterior destacan varias ideas de Chuquet:

- Su notación, que se podría llamar “exponencial”, está justificada por la economía en la escritura de las multiplicaciones.
- El libre uso que hace de los números negativos es también una concepción adelantada para su época, lo cual permite plantear la hipótesis de que las multiplicaciones que realizaba con las “potencias” de la variable le permitieron darle *legitimidad* a los números negativos ante la comunidad a la que estaba dirigida su obra. Esta hipótesis llama la atención sobre lo que puede ocurrir en la enseñanza moderna cuando se introduce la noción de exponentes cero cuando no goza de *legitimidad* como *objeto* numérico ante los alumnos.
- En la obra de Chuquet notamos que “el exponente cero” es introducido para indicar que se trata de una “cantidad estricta” (escalar, en nuestro lenguaje); es decir no se interpreta como “la potencia cero” de una “cantidad continua”, sino más bien como su ausencia.

---

[10] Existen dos diferencias sustanciales entre las dos versiones de esta nueva interpretación: en su interpretación de las razones en donde el "denominador" es negativo podemos observar que Wallis no admite la operación división, mientras que Newton si lo hace.

Lo anterior es importante ya que durante mucho tiempo el cero fue considerado exclusivamente como la representación de la nada; es decir que este número se identificaba como el cero absoluto debajo del cual se supone nada existe y no como el de origen arbitrario (Glaeser, 1981). Esta concepción del cero como "nada" también se encuentra en la obra de Wallis, en donde interpretó la proporción 1/0 como infinito; ya que: 1 es a 0 (nada) como ∞ es a 1. Dicha proporción le permitió, junto a la concepción de los negativos como ausencia de valor numérico, interpretar a las proporciones 1/0, 1/-1, 1/-2, etc., como distintos tipos de infinito, como se ha visto con anterioridad en el origen de tales proporciones que revelan que las cantidades que hoy representamos como a/b no eran consideradas como *objetos* numéricos.

Sin bien Chuquet utilizó de manera extensa los números negativos, éstos no fueron de uso generalizado en las obras algebraicas de principios del siglo XVI, como se muestra en el *Libro primero de arithemetica algebratica* de Marco Aurel (publicado en Valencia en 1552). Se ha tomado lo siguiente de Meavilla (1993):

> "En la división sólo se considera el caso en que el dividendo y el divisor son monomios, distinguiéndose dos posibilidades: 1) el grado del dividendo en menor que el del divisor y 2) el grado del dividendo en mayor que el del divisor. En la primera situación *tal partición no se podrá partir y quedará como quebrado*; en la segunda, la regla de Aurel coincide con la actual ($a^m/a^n=a^{m-n}$ con $m>n$)"

Posteriormente en el marco del problema del cálculo de cuadraturas y dentro de los paradigmas variacionales se logró dotar de sentido al signo negativo, como cambio de dirección o posición, con la intención de dar uniformidad a los procedimientos algorítmicos: la posición relativa de las áreas en Newton, el cambio de dirección en la construcción de la subtangente en L´ Hospital.

5.4. Ocasiones de uso

Todo el desarrollo descrito estuvo acompañado de una etapa de ocasiones de uso dentro del pensamiento variacional que permitió la total aceptación de la noción de exponente no natural: cálculo de diferenciales y primitivas en el paradigma leibniziano, el cálculo de fluxiones y momentos en el paradigma newtoniano y la construcción del binomio de Newton. Estos factores ocasionaron que el universo de "curvas algebraicas" (con fórmula) tuviera su centro en expresiones de la forma $f(x)^{m/n}$ (donde $f(x)$ es un polinomio). Lo anterior llama la atención sobre las ocasiones de uso a las que se enfrentan los estudiantes para que ellos estabilicen las convenciones, aún cuando no existan argumentos, distinto a la memoria, para justificar sus elecciones.

6. ANÁLISIS DIDÁCTICO

De manera general se hace notar que la vida escolar de la noción de exponente no natural esta sujeta a las restricciones de la transposición didáctica y en particular a las de programabilidad y autocontención de los saberes.

En secundaria se introduce desde el primer año la notación exponencial en donde se ocupa el modelo de multiplicación reiterada utilizando números concretos y potencias de 10, su introducción se justifica como una economía en la escritura. Las leyes de los exponentes se empiezan a mencionar con ejemplos numéricos específicos y se establece por definición que la potencia uno es el mismo número y que el exponente cero de cualquier número es igual a 1. Después esta misma notación es utilizada en álgebra para simplificar multiplicaciones sucesivas de una literal, y se establecen las mismas definiciones anteriores. En álgebra se realizan operaciones con monomios y posiblemente es “demostrada” la igualdad $a^0=1$ con el argumento de división de potencias y dentro de la aritmética los exponentes son utilizados para notación científica.

En bachillerato y universidad la enseñanza de la noción de exponente no natural se incluye en cursos anteriores a los que se estudian sus ocasiones de uso: las de carácter inmediato como en las transformaciones algebraicas, o en la notación científica o las de uso posterior como lo es en la noción de función exponencial y logaritmo y en la algoritmización del cálculo de derivadas y primitivas. Los argumentos que posiblemente se ofrecen en clase para justificar las igualdades giran alrededor de los encontrados en los libros de texto, pero éstos no son el foco de atención por mucho tiempo, ya que finalmente la atención se centra en proporcionar las igualdades correctas.

La organización de los saberes en la escuela, en relación al exponente no natural se debe a las restricciones causadas por la transposición didáctica. La escuela tiene la tarea de presentar los saberes de una manera ordenada, autocontenida y desperzonalizada que no tenga en cuenta los avances y retrocesos presentes en su desarrollo, por lo que decide presentar, dado que era posible hacerlo, la noción de exponente no natural en términos de un conocimiento considerado más elemental como es el álgebra. Esta “algebrización” de la noción de exponente no natural resulta particularmente apta para las restricciones a las que está sometido un texto de saber: es económica en cuanto a representaciones, parte de nociones comúnmente utilizadas en la época como lo son las progresiones aritméticas y geométricas que a su vez surgen de nociones básicas como multiplicar y sumar.

Al parecer tal adaptabilidad algebraica, junto con las acciones de la noósfera que estableció que era una noción que debía ser enseñada en las matemáticas “elementales” pues era usada en las matemáticas “avanzadas”, ocasionó que la noción de exponente no natural fuera incluida en los textos y cursos de álgebra.

Derivado del estudio con grupo de 18 profesores[11] se pudieron establecer dos posibles escenarios escolares en torno a las argumentaciones para establecer el significado de los exponentes no naturales:

- Donde todas las igualdades sean tratadas como leyes (“leyes de los exponentes”).
- Donde los argumentos tienen un alcance parcial: 1) Ninguno de los profesores que contestaron el cuestionario estableció argumentos para las igualdades que involucraban exponentes fraccionarios, 2) Algunos profesores sólo argumentaban el exponente cero.

La lectura de los argumentos muestra que los profesores tienen la concepción de que la noción de exponente cero y negativo es una noción matemática que se puede “demostrar” (a través de algún argumento que involucra una “ley de los exponentes”), ninguno de los profesores menciona, por ejemplo, que su introducción obedece a la necesidad (en el contexto algebraico) de uniformizar dichas leyes y no estrictamente como consecuencia de ellas. Dicho en otras palabras: los profesores asumen, implícitamente, que el significado de los exponentes cero y negativo son una noción matemática y no una convención matemática (noción metamatemática). Veamos un ejemplo que resume todo lo anterior (para más detalles véase el Anexo B de (Martínez, 2000)):

" La forma de argumentación podría ser la siguiente:

[11] La mayoría de los profesores (16) que contestaron el cuestionario laboran en bachillerato y todos han impartido al menos un curso de álgebra

1. $2^3/2^3 = 2*2*2/2*2*2 = 2^3/2^3 = 2^{3-3} = 2^0 = 1$

2. $2^3/2^5 = 2*2*2/2*2*2*2*2 = 2^{3-5} = 2^{-2} = \cancel{2}*\cancel{2}*\cancel{2}/\cancel{2}*\cancel{2}*\cancel{2}*2*2 = 1/4$
   $2^{-2} = 1/2^2 = 1/4$

3. $2^{½} = 2^{n/m} = \sqrt[m]{2^n} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt[2]{2}$ "

La concepción de que la noción de exponente no natural es una noción matemática que se puede "demostrar" también puede explicar la falta de argumentos para establecer una igualdad que involucre los exponentes fraccionarios; ya que "demostrarlas" (en el sentido de usar una "ley de los exponentes" como hace el profesor anterior) requiere suponer su existencia y no deducirla.

Aclaremos este punto. Para "demostrar" que $2^0=1$ se utiliza la "ley de los exponentes" para la división de la siguiente manera: $1=2^2/2^2=2^0$ entonces $2^0=1$, es decir que su valor se *deduce*. En cambio para "demostrar" que $2^{1/2}=\sqrt{2}$ se podría utilizar la "ley de los exponentes" para la multiplicación de la siguiente manera: $2^{1/2}2^{1/2}=2^1=2=(2^{1/2})^2$ entonces $2^{1/2}=\sqrt{2}$, es decir que en este argumento se debe suponer la existencia de $2^{1/2}$, lo cual puede no considerarse una deducción en el estricto sentido del término. Creemos que esta suposición de existencia es lo que impide a los profesores dar estos argumentos.

Por otra parte están los profesores que establecen que se trata de una ley de los exponentes o una convención no especifican las funciones de ésta. Veamos un ejemplo:

> *"Actividad II.3*
>
> Se simplifican aplicando las leyes de los exponentes
>
> 1. Todo número con exponente cero es igual a uno.
> 2. Todo número con exponente negativo es igual a una fracción, donde el numerador es la unidad y el denominador es la misma base pero con exponente positivo.
> 3. Todo número con exponente fraccionario es igual a una raíz, donde el denominador del exponente indica el índice de la raíz y el numerador afecta al subradical.
>
> *Actividad II.4*
>
> Pero si se aplican las leyes de los exponentes donde se establece "que todo número elevado a la cero es igual a la unidad" entonces se concluye que $2^0=1$"

7. EXPLICACIONES SISTÉMICAS DE LOS FENÓMENOS

En las explicaciones de corte sistémico que a continuación se presentan se seguirá, de manera general, el esquema siguiente: 1) Una explicación centrada en el profesor, 2) Una explicación centrada en los alumnos y 3) Una explicación centrada en el saber (enseñado). Y para cumplir nuestro programa sistémico todas éstas se harán atendiendo sus relaciones.

A la luz de la evidencia acumulada, sobre todo la que nos ha proporcionado nuestro análisis didáctico, interpretamos que los fenómenos que considera esta investigación, relativos a los argumentos que presentan los estudiantes son ocasionados por la concepción, presente tanto en profesores como en algunos libros de texto, de que el significado de los exponentes no naturales es una noción matemática que puede demostrarse, lo que explica lo razonable de todos los argumentos de los estudiantes.

Lo interesante del hecho anterior es que nuestro estudio epistemológico de la noción del exponente no natural, nos ha revelado el carácter metamatemático de la noción, es decir, que ella emergió de consideraciones sobre el funcionamiento del saber matemático.

7.1 Clasificación de fenómenos encontrados

A la luz de las respuestas de los estudiantes determinamos las siguientes categorías con el fin de elaborar nuestras explicaciones:

- Categoría de *Persistencia de operaciones simples* que consisten en las respuestas que recurren a la suma, resta, multiplicación o división entre la base y el exponente para establecer valores de la expresión 2^x.
- Categoría de *Persistencia del modelo de multiplicación reiterada* que consisten en las respuestas que recurren a la interpretación de multiplicación reiterada para establecer valores de la expresión 2^x. Es decir que recurran al modelo 2^x=2*2*2(*x* veces).
- Categoría de *Ausencia de argumentos para establecer las igualdades correctas.*
- Categoría de *Evolución hacia respuestas correctas.*
- Categoría de *El cero como representación de la nada.*
- Categoría de *Deslizamiento de la memoria* a aquellas respuestas que son ocasionadas por recordar equivocadamente las convenciones relativas a los exponentes no negativos.

7.2. Persistencia de operaciones simples

Tomando en cuenta que las respuestas incluidas en la categoría de *persistencia de operaciones simples* se han encontrado en los distintos niveles escolares, esta sección se divide en tres apartados que sucesivamente considerarán las respuestas que ofrecen los estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad.

7.2.1. En estudiantes de secundaria

La primera vez que la noción de exponente, restringido a los números naturales, es enseñado en un segundo curso de matemáticas de la escuela secundaria (alumnos de 13 años) o quizá antes, en un primer curso (alumnos de 12 años). Esta introducción a la noción se ofrece en el marco temático de la aritmética y aún no han tenido contacto con el álgebra.

La noción de exponente es vista usualmente en una clase de matemáticas como lo muestra la Figura 3 (donde el exponente y la base son siempre números concretos).

En este contexto se justifica su enseñanza como una economía en la escritura y los estudiantes han podido resolver en clase y hecho ejercicios del tipo: 2^4 = ? y rige el contrato didáctico propio de la estructura clase/ejercicio.

En cuanto al saber observamos que aquí ha operado una transposición didáctica en el sentido clásico del término: los profesores (la institución) saben que el exponente no siempre va a significar multiplicación 'tantas veces como éste lo indica'. Esta situación no es explícita por el sistema de enseñanza.

En este escenario nos encontramos con respuestas del tipo:

- $2^4 = 8$ (ya que 2*4 = 8) ó $2^3 = 6$ (ya que 2*3 = 6)

La primera tarea que se les presenta a los estudiantes es distinguir la semántica del símbolo 2^4, deben diferenciar que este símbolo no representa una operación aritmética "simple" (suma, resta, división o multiplicación) sino un conjunto de operaciones de multiplicación 'tantas veces como lo indica el exponente'.

Respecto al profesor, diremos que una de las cláusulas del contrato didáctico entra en funcionamiento, ésta asegura que, cuando un profesor plantea un problema a sus estudiantes, el problema está bien planteado y, en un principio, el alumno dispone de los elementos necesarios para resolverlo. En este caso, los alumnos, al asumir esta cláusula del contrato didáctico suponen, que como siempre, la solución del problema resultará de alguna de las operaciones aritméticas simples, por lo tanto, intentarán: sumar, multiplicar, restar o dividir los números que están presentes en la expresión, pero, como hemos señalado, la noción ha sido presentada como cierto número de multiplicaciones, como consecuencia de esto los estudiantes eligen la multiplicación para dar una respuesta.

Existen respuestas en donde utilizan otras operaciones aritméticas simples (por ejemplo: 2^{-3}=2-3) pero el contexto en que fue aplicado el estudio (un examen diagnóstico con calificación) nos sugiere que dichas respuestas son el resultado del funcionamiento del contrato escolar: ante un examen siempre hay que responder.

Ante las afirmaciones de los estudiantes, el único recurso para el profesor es hacer énfasis en la definición de la noción de exponente como multiplicación reiterada, lo que ocasionaría la aparición del tipo de respuestas consideradas en la categoría de *persistencia del modelo de multiplicación reiterada* (tratado en el apartado 7.3).

7.2.2 En estudiantes de bachillerato

Asumamos que en la educación media (15 a 18 años) la noción de exponente no natural es manejada principalmente en el contexto algebraico, de manera típica, como mostramos a continuación (*n* es un natural y *a* distinto de cero): 1) $a^0 = 1$, 2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ y 3) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Estas definiciones son practicadas a través de ejercicios (sobre todo transformaciones de expresiones algebraicas) que son resueltos en clase o bien son dejados como actividad complementaria. Debido a las dificultades de esta sintaxis algebraica, para estudiantes al aprenderlas y para profesores al enseñarlas, el sistema didáctico evoluciona hacia la solución de tales dificultades mediante un proceso de algoritmización (en el sentido de la utilización repetitiva de una o varias de las igualdades 1, 2 y 3).

En este escenario (véase anexo A de (Martínez, 2000) se encuentra con el tipo de respuestas consideradas en la categoría de *persistencia de operaciones simples*:

- $2^{-3/2}$ = 2(-3/2), $2^{1/2}$ = 2(1/2), 2^0 = 2*0 o 2^1=2*1.

Estas respuestas se presentan junto a otras más evolucionadas, en el sentido de los efectos de la enseñanza en los alumnos, que utilizaron el modelo de *multiplicación reiterada* (por ejemplo: 2^{-3} =(-2)(-2)(-2) la cual se estudirá con detalle en el apartado 7.3). Además los alumnos ya habían estudiado la noción de exponente no natural y el análisis didáctico muestra que esta noción es tratada en el contexto algebraico (los ejemplos "numéricos" no son manejados realmente).

En lo que al profesor respecta entra en funcionamiento la cláusula del contrato didáctico que asegura que cuando un profesor plantea un problema, el alumno dispone de los elementos necesarios para resolverlo; además, el contrato ha evolucionado al registrar el «envejecimiento» de los contenidos. En otras palabras, los estudiantes saben que todas las expresiones tienen un valor, que además ya les ha sido enseñada.

Los estudiantes han evolucionado en su manejo de la "potenciación" (ya no utilizan operaciones simples para establecer un valor como 2^{-3}); sin embargo, ante la imposibilidad de utilizar este conocimiento con los números fraccionarios se ven en la necesidad de buscar otro modelo, el cual consiste en interpretar a la potenciación como una multiplicación que forma parte de su universo de operaciones con números.

En términos de los saberes agregamos que el universo de operaciones está determinado por las prácticas en el salón de clase: solución de ecuaciones de primero y segundo grado, operaciones con polinomios, evaluación y graficación de algunos polinomios, etc. Estas operaciones son esencialmente suma, resta, multiplicación y división y esto ocasiona que los estudiantes interpreten a la expresión 2^x en términos de operaciones simples cuando les es imposible interpretarlo con el modelo de multiplicación reiterada (en cierto sentido es la única operación que pueden hacer con los números ya que su escritura al parecer no les sugiere otra operación). Además, la ausencia de prácticas en el contexto gráfico y numérico impiden otra interpretación en los estudiantes (quizá, por ejemplo, el contexto gráfico les motivaría a reconsiderar sus afirmaciones, por ejemplo que $2^{-3/2}$=2(-3/2) al notar que están evaluando 2*x* en los números fraccionarios).

Un argumento singular es: $2^0 = 0$ ya que $2*0 = 0$, ya que posiblemente este razonamiento es motivado por notar el patrón: $2^1=2*1$ y $2^2=2*2$ (un dos es la base y el otro el exponente).

7.2.3. En estudiantes de universidad

Entre estudiantes universitarios hemos encontrado que aún persiste el argumento: $2^0 = 0$ ya que $2*0 = 0$.

En la educación superior, o quizá antes dependiendo de los programas de estudio, el sistema didáctico ha evolucionado de tal manera que el profesor asume que los estudiantes ya pueden interpretar el significado (en términos de igualdades correctas) de los exponentes no naturales. Ahora el contrato didáctico relega toda la responsabilidad a los estudiantes si éstos no son capaces de ello, aún cuando el profesor esté dispuesto a recordarlas rápidamente (como reglas, pues no se detendrá en explicaciones más detalladas). Esta evolución ha sido ocasionada por las prácticas escolares, que han puesto en funcionamiento, quizá de manera parcial, a dicha noción: en distintas transformaciones algebraicas, en la noción de función exponencial y logaritmo y el cálculo de derivadas y primitivas de funciones de la forma $f(x)^{n/m}$.

En cuanto a los estudiantes se puede considerar que son capaces de recordar las "leyes de los exponentes" con más precisión. Ciertas *ocasiones de uso* les han permitido tener más presente el significado de los exponentes no naturales (en el sentido de poder proporcionar respuestas correctas). Como se ha señalado esas ocasiones de uso pueden incluir, por ejemplo, el cálculo de primitivas y derivadas de funciones de la forma $f(x)^{n/m}$. Los estudiantes que escriben igualdades correctas han recurrido a su memoria para hacerlo o preguntando al profesor. Las *ocasiones de uso* les permiten descifrar que cuando el exponente no es natural éste se rige por ciertas reglas o leyes que hay que recordar (en el apartado7.5 se enfatizará que la evolución hacia respuestas correctas no está dentro del marco de argumentos que las justifiquen) por lo que no intentarán establecer argumentos "lógicos" a través, por ejemplo, del modelo de multiplicación reiterada o de operaciones simples para deducir su valor.

En cambio, otros estudiantes, ya sea por la ausencia de ocasiones de uso en su experiencia escolar o por el poco hincapié con que las han manejado, no descifran que el exponente no natural se encuentra regido (en nuestro modelo de la vida escolar de la noción) por reglas o leyes, lo cual ocasiona que ellos busquen argumentos "lógicos" para establecer el valor a través de operaciones elementales, por ejemplo de $2^0=0$ ya que $2*0=0$, (posiblemente motivados por notar la coincidencia de que $2^1=2*1$ y $2^2=2*2$).

7.3. Persistencia del modelo de multiplicación reiterada

Tal modelo lo encontramos en secundaria de la manera siguiente:

$2^0=0$ ya que el dos no se multiplica
$2^1=4$ ya que multiplicamos una vez el dos (2*2)
$2^1=2$ ya que se pone una vez el número
$2^1=2$ ya que se pone (2)()
$2^{-3}=-8$ ya que 2*2*2=8 y sólo se le cambia el signo
$2^{-3}=-8$ ya que (-2)*(-2)*(-2)=-8
$2^{-4}=-16$ ya que (-2)*(-2)*(-2)*(-2)=-16 [12]
En bachillerato:
$2^0=0$ ya que el dos no se multiplica
$2^{-3}=-8$ ya que 2*2*2=8 y sólo se le cambia el signo
$2^{-3}=-8$ ya que (-2)*(-2)*(-2)=-8
$2^{-4}=16$ ya que (-2)*(-2)*(-2)*(-2)=16
En universidad:
$2^0=0$ ya que el dos no se multiplica

En cuanto a los saberes el modelo de multiplicación reiterada es inevitable en la construcción de la noción de exponente; no hay otra alternativa de acuerdo al estudio de corte epistemológico realizado, los exponentes naturales mayores que uno representan, en la aritmética y el álgebra, multiplicación reiterada.

Tal modelo marca el inicio de la enseñanza de la noción de exponente en la educación secundaria. Las restricciones (o condiciones) de la transposición didáctica que pesan sobre los textos de saber lo hacen apto para su introducción: es un modelo que comprende operaciones simples (multiplicaciones) que los estudiantes han trabajado desde hace mucho e involucra una noción tan transparente como es la de contar.

Así el funcionamiento del contrato didáctico en la estructura clase/ejercicio puede ser llevado de manera satisfactoria: la definición está dada, lo único que resta es practicarla un cierto número de veces hasta que los “errores” sean eliminados (por ejemplo los ocasionados por la persistencia de operaciones simples). Es quizá la sencillez de este modelo una de las principales causas de su persistencia entre los estudiantes de todos los niveles escolares que aquí se consideran.

Los estudiantes interpretan, movidos por cierta cláusula del contrato didáctico específico de la noción de exponente, que cuando se les pide establecer una igualdad para el exponente uno, cero y negativo, ésta puede ser interpretada a través del modelo de multiplicación reiterada. A ello se agregan las concepciones que tienen del cero como la representación de la nada[13] y de los enteros negativos no como un objeto sino como un número natural con un símbolo menos asociado. También es posible que tal interpretación de los enteros negativos sea ocasionado por el esfuerzo de los estudiantes por utilizar el modelo de multiplicación reiterada; pero las características de la información que se tiene no nos permiten decidir al respecto[14].

Llama la atención la respuesta de algunos alumnos de secundaria que establecen: ‘$2^1=4$ ya que multiplicamos una vez el dos (2*2)’. Este es un razonamiento irrebatible, ya que la multiplicación es una operación binaria y así ha sido enseñada a los estudiantes desde siempre.

---

[12] Aparentemente los estudiantes que ofrecen estos argumentos han multiplicado equivocadamente los signos.
[13] Esta concepción será tratada someramente en 7.6.
[14] En resumen queda abierta la pregunta: ¿Los estudiantes no interpretan a los enteros negativos como objetos o su interpretación como naturales con símbolo negativo asociado se debe a su esfuerzo por utilizar el modelo de multiplicación reiterada?

Estos razonamientos muestran los afectos de una enseñanza que no identifica que la noción de exponente uno es una convención matemática pues tal parece que el sistema de enseñanza no tiene clara conciencia de ello; ya que por ejemplo es notoria la ausencia en los libros de texto cuando la noción de exponente es tomada como objeto de estudio, de explicación del significado del exponente 1. Comúnmente el profesor dice al estudiante que cuando no hay exponente en la variable entonces hay un 1 sin dar mayores explicaciones.

En relación a esta categoría de *persistencia del modelo de multiplicación reiterada* con la categoría de *persistencia de operaciones simples*, se puede explicar el por qué algunos estudiantes consideran que $2^1=1*2$ (que les proporciona una respuesta correcta que quizá recuerden) al considerar la posibilidad de que encuentren dificultades para interpretar el exponente 1 a través del modelo de multiplicación reiterada por lo que recurren a las operaciones elementales.

7.4. Ausencia de argumentos para establecer las igualdades correctas

El esquema de la vida escolar de los exponentes no naturales que se estableció en el análisis didáctico revela que el único contexto posible, tanto para estudiantes, como para profesores, para argumentar las igualdades que los involucran es el algebraico o el *seudonumérico*[15]. En el análisis de textos se encontró que sólo un libro de cálculo (Stein, 1988) utiliza argumentos sobre la gráfica de $y=2^x$ para afirmar que $2^{1/2} = +\sqrt{2}$.

En cuanto a los saberes, en el contexto algebraico, la noción de exponente natural (a excepción del exponente 1) surge como una economía en la escritura que representa la multiplicación reiterada. El exponente no natural se da a través de un mediador, de tipo metamatemático al que hemos llamado principio de consistencia, que exige la uniformidad de los algoritmos para las operaciones algebraicas (leyes de los exponentes).

En cuanto al profesor existen dos escenarios posibles: el primero en donde la enseñanza involucra argumentos para establecer el significado de los exponentes no naturales (quizá parciales, pues de acuerdo al estudio con profesores estos argumentos pueden incluir solamente al exponente cero y los exponentes negativos) y el segundo en donde son tratadas, desde un principio, como reglas o leyes que hay que memorizar.

En el primer escenario los argumentos no son considerados como verdaderos *objetos de enseñanza* ya que por ejemplo éstos no son evaluados o no se realizan ejercicios a su alrededor y en la práctica escolar (tareas, ejercicios, evaluaciones,...) son únicamente consideradas las leyes resultantes. En otras palabras, los argumentos que están presentes tienen la función de legitimar la noción de exponente no natural ('su significado es éste y no otro') sin que sean considerados como verdaderos *objetos de aprendizaje*; lo cual explica, en parte, la ausencia de éstos en los estudiantes[16].

En el segundo escenario puede ocurrir que el profesor no conozca argumentos para establecer las igualdades y movido por el contrato didáctico establecido, que como parte de la negociación impide que su status sea demeritado; si no da argumentos satisfactoriamente, el recurso de presentar la noción de exponente no natural como ley o convención (aunque no pueda explicar su función) le permitirá subsanar decorosamente lo establecido en el contrato. También puede ocurrir que este último recurso sea utilizado, en ambos escenarios, para eliminar las dificultades

[15] Hemos introducido aquí este término para hacer notar que los argumentos del tipo: $2^{1/2}2^{1/2}=2^1=2=(2^{1/2})^2$ entonces $2^{1/2}=\sqrt{2}$, pueden no ser considerados de tipo numérico; ya que sólo se encuentran presentes símbolos. Lezama (1999) reporta esta concepción en los estudiantes en expresiones del tipo $2^{3/2}=\sqrt{2^3}$.

[16] Decimos que es una explicación parcial; ya que los argumentos son de naturaleza compleja (de tipo metamatemático; ya que requiere reflexionar que la matemática, como disciplina científica, debe estar libre de contradicciones).

intrínsecas que los argumentos presentan; ya que ellos no son producto de un razonamiento lógico en el sentido estricto del término (producto de inferencias lógicas, como por ejemplo, $p \Rightarrow q$ o $\sim q \Rightarrow \sim p$).

En lo que a los estudiantes respecta independientemente de cómo les hayan presentado todos estos conceptos, las evidencias muestran que las igualdades que involucran a los exponentes no naturales no han alcanzado estabilidad como convención matemática para la uniformidad de las operaciones con monomios. Por una parte se encontró que algunos de ellos asumen tal igualdad como convención o ley matemática sin poder detallar las funciones de ésta (como se ha esto es determinado por el sistema de enseñanza). Por otra parte en los estudiantes que ofrecieron argumentos a través de operaciones simples o por el modelo de multiplicación reiterada se apreciar la concepción de los exponente no naturales como una noción matemática (en el sentido de ser susceptible de ser deducido lógicamente).

7.5. Evolución hacia respuestas correctas

Entre estudiantes de secundaria y bachillerato se presentaron las siguientes respuestas para exponentes no naturales: $2^{-3}=.002$, $2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$, $2^{-3/2}=2(-3/2)=-3$ ... y entre estudiantes de superior se detectó que fueron capaces de establecer sin dificultades aparentes (quizá parcialmente), el significado de 2^x (en términos de igualdades correctas), con la particularidad de que si x es un número fraccionario 2^x es una notación ($2^{1/2}=\sqrt{2}$, $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$, etc.) por carecer de medios para establecer su valor numérico. Por otra parte se encontró que entre estudiantes de nivel medio y superior se estableció: $2^0=0$ o $2^0=2$.

El único contexto posible tanto para estudiantes como para profesores, para argumentar tales igualdades es el algebraico o el seudonumérico. Además, la evolución hacia respuestas correctas, en este caso estudiantes universitarios, no está en función de argumentaciones para establecer su validez. Tales respuestas han evolucionado para vivir como reglas o leyes ya que los estudiantes basan sus en las "leyes de los exponentes". También se ha afirmado que en la construcción social del conocimiento fue necesario, para su aceptación, que la noción de exponente no natural admitiera ciertas ocasiones de uso fuera del contexto algebraico. Siendo imposible que un mecanismo semejante esté presente en los sistemas didácticos modernos, por su organización específica de los saberes, nos plantemos la pregunta: ¿Qué ocasiones de uso legitiman entre los estudiantes la noción de exponente no natural en el sentido de poder proporcionar respuestas correctas?

Una primera aproximación a la explicación de esta evolución en las respuestas de los estudiantes puede ser el que hayan estudiado y realizado más "ejercicios" de potenciación y radicación. El análisis de algunos de los programas de estudio nos revela que esto puede ser o no de esta manera.

Independientemente de la situación anterior nosotros agregamos al escenario la existencia de prácticas que posibilitan el consenso, en el sentido de respuestas correctas, de la noción de exponentes no naturales entre estudiantes que han llevado cursos de Cálculo (por ejemplo estudiantes universitarios) en donde han calculado primitivas y derivadas de funciones de la forma $f(x)^{n/m}$, lo cual explica junto a la ausencia de prácticas numéricas y gráficas, el que los estudiantes consideren que cuando x es un número fraccionario 2^x es una notación.

De manera semejante estas prácticas también explican por qué el exponente cero no ha alcanzado la misma estabilidad (entre los estudiantes universitarios) que los otros exponentes; el exponente cero no es tratado de manera explícita en el cálculo de primitivas y derivadas ... se trabaja con la constante y no con la variable con exponente cero.

Es importante destacar que no se han considerado las prácticas relativas a la función exponencial y logaritmo, debido a que algunas investigaciones (Lezama, 1999) dan cuenta que su estudio, en situación escolar, es hecho de manera global únicamente evaluando la función exponencial en los enteros sin detenerse demasiado en los detalles de su definición en todos los reales.

7.6. El cero como representación de la nada

Es común entre los estudiantes de todos los niveles escolares encontrar el argumento siguiente: $2^0=2$ pues no hay nada como exponente. No detallamos los factores que motivan al estudiante a dar una respuesta construida con cierta lógica, pues se ha insistido en ello en las secciones anteriores. La particularidad e importancia de este argumento consiste en que no se apoya en ningún modelo relacionado con la noción de exponente ni en ninguna operación; es decir, que esta categoría es subsidiaria de las concepciones sobre el significado del cero como cero absoluto. Lo único que agregamos es que esta concepción parece estar en estrecha relación con la construcción del conocimiento y no parece estar determinada por la enseñanza; ya que por ejemplo en el análisis epistemológico se encuentra esta concepción en diversas ocasiones.

7.7. Deslizamiento de la memoria

¿Por qué algunos estudiantes afirman que 2^{-3}=.002? Se ha establecido que el único contexto posible, para los estudiantes, para argumentar tales igualdades es el algebraico o el *seudonumérico*. Además se ha mencionado que esta evolución hacia respuestas correctas no está en función de argumentaciones para establecer su validez. Tales respuestas han evolucionado para vivir como reglas o leyes ya que los estudiantes basan sus respuestas en las "leyes de los exponentes". En este escenario el único recurso del estudiante es recordar las ocasiones de uso de este tipo de expresiones lo cual lo lleva a la notación científica de los números. Se destaca esta interpretación del exponente negativo pues posee un elemento de coherencia relacionado con la semántica de los números negativos, ya que verbalmente los alumnos relacionan el exponente -3 con el proceso de "mover a la izquierda" el punto decimal; lo cual es interesante en el marco de la ruptura del discurso matemático escolar ocasionado por la presentación de las convenciones matemáticas del exponente cero y negativo.

Lo anterior esta fuertemente relacionado con la estrategia nemotécnica que utilizan muchos estudiantes para recordar los convencionalismos que consiste en asociar una *transformación* en el signo del exponente (asociada a la noción de *negatividad*); sintetizado en las frases del tipo "al subir o bajar el exponente este cambia de signo".

8. CONSIDERACIONES FINALES

El presente trabajo de investigación centró su interés en las interacciones didácticas de objetos matemáticos a los que hemos llamado *convenciones matemáticas* presentes en el tratamiento de los exponentes. Ya que en primer lugar se tiene evidencia de que sus características, hasta donde sabemos se sabe, no han sido estudiadas en las investigaciones en Matemática Educativa, y en segundo término porque las concepciones relacionadas a estos convencionalismos no permiten la construcción de conocimiento. Ambos intereses indujeron a desarrollar la presente investigación, de corte sistémico, para caracterizar a las convenciones matemáticas en tanto su funcionamiento dentro del sistema didáctico.

Los resultados obtenidos brindaron los elementos necesarios para entender a profundidad los fenómenos didácticos a que atiende y dieron cuenta de la complejidad de las relaciones entre el concepto de exponente no natural, el estudiante y el profesor.

Con el objetivo de comprender dicha complejidad se establecieron algunas categorías de análisis que colocan su punto de atención en la confrontación entre el concepto de exponente natural (mayor que uno) y las convenciones matemáticas presentes en el tratamiento de los demás exponentes. Lo anterior con la intención caracterizar a las convenciones matemáticas como una forma de conocimiento. La pertinencia teórica estuvo presente en el análisis epistemológico y la pertinencia práctica fue reflejada en las categorías utilizadas para explicar los fenómenos didácticos; de esta manera la unidad esencial para el análisis de las convenciones matemáticas son las consideraciones de tipo metamatemático que son hechas para su formulación y validación.

Como ejemplo se tienen las formulaciones hechas por Wallis y Newton en el marco del cálculo de cuadraturas de las curvas algebraicas; en ellas se percibe la intención de conservar o utilizar (consideración metamatemática) cierta noción de *negatividad* a través de convenciones: "no tener" en el caso de Wallis y "estar del otro lado" en el caso de Newton. Dicho ejemplo resalta una de las particularidades fundamentales utilizadas para caracterizar a las convenciones matemáticas como producto de la una organización teórica que busca conservar estructuras anteriores; pero además nos da luz para entender el funcionamiento didáctico de los saberes en juego, pues destaca la presencia de convenciones matemáticas en los contenidos pueden ser fuente de rupturas en el discurso matemático escolar. En este caso la pérdida en las aulas, de la noción de *negatividad* en el tratamiento algebraico de las convenciones de los exponentes al centrarse sólo en la sintaxis algebraica y numérica. Que la ruptura sea o no inevitable es un problema de investigación por sí mismo.

En este sentido el análisis epistemológico realizado, así como la naturaleza de los fenómenos estudiados, situaron a las convenciones matemáticas, como es el caso de las presentes en el tratamiento de los exponentes no naturales, dentro de los procesos del *pensamiento matemático avanzado* (Dreyfus, 1990); ya que este saber está estrechamente relacionado con el desarrollo sistemático de las nociones de igualdad, número, representaciones y organización teórica.

Es por ello que, en nuestra opinión, la presente investigación plantea la emergencia de un campo de investigación que se centre en aportar las bases para entender el papel de las convenciones matemáticas en los diversos planos de la construcción social del conocimiento.

Finalmente los análisis realizados pueden considerarse como el análisis preliminar de una Ingeniería Didáctica, por lo que las bases están puestas para intentar diseños experimentales que busquen generar escenarios para la construcción de las convenciones matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

Albert, A. y Farfán, R. (1997). *Resolución gráfica de desigualdades*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Andrés, C.; Castellanos, S.; Mingüer, L.M.; & Rubio, E. (1998). *Estudio didáctico de la función 2^x*. Tesina de Especialidad, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.

Anfossi, A. & Meyer, F. (1985). *Curso de álgebra*. México: Editorial Progreso, S.A.

Baldor, A. (1983). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural, S.A.

Brousseau, G. (1993). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. En Sánchez, E. y Zubieta, G. (comps.) *Lecturas en didáctica de las matemáticas* (págs. 1-67). DME Cinvestav-IPN, México. Original en *Recherches en Didactique des Mathématiques.* (1986) 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En Parra, C. y Sainz,(comps.) *Didáctica de las matemáticas: Aportes y reflexiones* (Cap. IV pp. 65-94). Argentina: Paidós Educador.

Bos, H.J.M. (1975). Differentials, Higher-Order Differentials and the derivative in the Leibnizian Calculus. *Arch. Hist. Exact. Sci.* 14, 1-90.

Boyer, C. B. (1968). *A history of mathematics*. EEUU: John Wiley & Sons, Inc.
Cantoral, R. & Farfán, R. M. (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales"*. 42, 353-369.

Cajori, F. (1928). *A history of mathematics notations*. EEUU: The Open Court Publishing Company.

Chevallard, Y., (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Editorial Aique.

Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. México: Biblioteca para la actualización del maestro de la SEP.

Confrey, J. & Dennis, D. (2000). La Creación de Exponentes Continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 3(1), 5-31.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking. En A. Hownson y J. Kahane (Eds.) *Mathematics and Cognition. A research synthesis by the international group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113-134). Cambridge: Cambridge University Press.

Euler, L. (1984). *Elements of Algebra.* Traducción de Vollständige Anleitung zur Algebra (1770) por John Hewlett. EEUU: Springer-Verlag.

Farfán, R. (1991). El curso de precálculo un enfoque gráfico. *Publicaciones Latinoamericanas en Matemática Educativa* 5(1), 206-211.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres rélatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 2(3), 303-346.

Harel, G. & Dubinsky, E. (1992). *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy*. EEUU: MAA, Notes 25.

Kalnin R. A. (1978). *Álgebra y funciones elementales*. Traducción del ruso por Akop Grdian. Ex-URSS: Editorial Mir.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. EEUU, New York: Oxford University Press.

Leibniz, I. (1669). Leibniz 'Excerpta' from Newton´s ´'De Analysi per equationes infinitas (october 1676). En D.T. Whiteside (1967) (Ed.) *The mathematical papers of Isaac Newton. Vol. II (1667-1700)*(pp. 248-259). Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproduciblidad: El caso de la función exponencial*, Tesis de Maestría, DME del Cinvestav-IPN. México.

Lezama, J. y Farfán, R.M. (1998). Introducción al estudio de la reproduciblidad. *Serie de Antologías No. 3. Área de Nivel Superior* (pp. 129-152). México: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

L'Hospital, Marqués de (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. México: Colección Mathema-UNAM. Traducción de Rodrigo Cambray del original *Analyse des infiniment petis pour l'intelligence des lignes curbes* (1696).

Mahoney, M. S. (1973). *The mathematical carrer of Pierre Fermat 1601-1665*.

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de Maestría. México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Meavilla, V. (1993). Una aproximación al "Libro primero de arithmetica algebratica" de Marco Aurel. En Teresa Rojano & Luis Puig (Eds.) *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.*(pp. 65-95). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Newton, I. (1665a). Annotations from Wallis (autumm 1665). En D.T. Whiteside (1967) (Ed.) *The mathematical papers of Isaac Newton. Vol. I (1664-1666)* (pp. 89-134). Gran Bretaña: Cambridge Univesity Press.

Newton, I. (1665b). The calculus becomes an algorithm. D.T. Whiteside (1967) (Ed.) *The mathematical papers of Isaac Newton. Vol. I (1664-1666)* (pp. 298-368). Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Newton, I. (1669). De Analysi per equationes infinitas (june 1669). En D.T. Whiteside (1967) (Ed.) *The mathematical papers of Isaac Newton. Vol. II (1667-1700)*(pp. 206-247). Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Newton, I. (1953). Philosophie naturalis principia Mathematica. En *Great Books of the Western World (No. 34): Newton and Huygen*s. EEUU: The university of Chicago and Encyclopaedia Britannica, Inc.

Pacheco, E.; López, A, & Razo, J. L.(1998). *Puesta en escena de la secuencia didáctica 2^x*. Tesina de Especialidad, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Paradís, J. (1993). La triparty en la Science des Nombres de Nicolas Chuquet. En Teresa Rojano & Luis Puig (Eds.) *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.*(pp. 31-63). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Pulido, R. (1997). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar*. Tesis de Doctorado, DME del Cinvestav-IPN. México.

Quiroz, M. (1989). *Instalación de un lenguaje gráfico en estudiantes que inician estudios universitarios. Un enfoque alternativo para la reconstrucción del discurso matemático escolar del precálculo*. Tesis de Maestría, DME del Cinvestav-IPN. México.

Robert, A. & Robinet, J. (1996). Prise en compte du meta en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 16(2), 145-176.
Rees, P. K., Sparks, F. W. & Sparks Rees C.(1982). *Álgebra contemporánea*. México: McGraw-Hill.

Scott, J. F. (1969). *A history of mathematics*. Gran Bretaña: Taylor & Francis LTD.

Soto, P.E. (1988). *Una experiencia de redescubrimiento en el aula: a cerca de los logaritmos de números negativos y los orígenes de la variable compleja*. Tesis de Maestría, DME del Cinvestav – IPN. México.

Stein, S. K.(1988). *Cálculo y geometría analítica.* México: McGraw-Hill.
Struik, D. J. (1986). *A source book in mathematics 1200-1800*. EEUU: Princeton University Press.

Smith , D. E. (1959). *A source book in mathematics*. EEUU: Dover Publications, Inc.

Trujillo, R. (1995). *Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico*. Tesis de Maestría, DME del Cinvestav-IPN. México.

Wentworth, J & Smith, D. E.(1985). *Elementos de álgebra*. México: Editorial Porrúa, S.A.

Youschkevitech, A. P.(1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Arch. Hist. Exact. Sci*. 16, 37-85.