Relime Vol. 1, Núm. 1, marzo1998 pp.56-74

El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones [1]

Francisco Cordero Osorio[2]

RESUMEN

Hemos encontrado en el ámbito escolar un argumento en las gráficas de las funciones que por su naturaleza lo hemos llamado "comportamiento tendencial de las funciones". Este argumento tiene un *status quo* epistemológico y puede ser tratado como una categoría del conocimiento del Cálculo. La categoría misma provoca una reflexión sobre los niveles de abstracción y sobre las bases del conocimiento del Cálculo. Discutimos el tipo de diseño de "situaciones" que se desprenden de estas reflexiones y la relación que éstas guardan con las situaciones didácticas, y el camino que estamos siguiendo para encontrar evidencias de la categoría en la realidad escolar.

ABSTRACT

In the school-teaching context, we have encountered an argument brought by students on the subject of graphics of functions. We shall call this argument "tendential behavior of functions", because of its nature. This argument has an epistemological status quo, and can be treated as a category in the knowledge of calculus. We discuss the type of design of "situations" that follow from these reflections and the relationship that they have with didactic situations, as well as the route that we are following in order to find evidence for this category in a school reality.

RÉSUMÉ

On a trouvé chez les élèves une conception dans les graphiques des fonctions dont sa nature nous l'avons appelé "comportamiento tendencial" des fonctions. Cet argument à un *statu quo* épistémologique et peut être traité comme une catégorie de connaissance du calcul. La catégorie même provoque une réflexion sur les niveaux de l'abstraction et sur les bases des connaissances du calcul. on a discuté le type de dessin des "situations" que se construisent de cette réflexions et la relation que celles ci gardent avec les situations didactiques et le chemin qu'on est entrain de suivre pour rencontrer évidences de la catégorie dans la réalité scolaire.

Introducción

El comportamiento tendencial de las funciones (ctf) es un argumento que establece relaciones entre funciones y está compuesto de una colección coordinada de conceptos y se da en situaciones del Cálculo donde se discuten aspectos globales de variación. La gráfica de la función es un comportamiento que se mira en forma completa. No se percibe explícitamente un proceso previo a la gráfica, sino que la función y su gráfica se consideran las actividades por realizar. Además, el argumento ha sido identificado o hallado en situaciones escolares, muchas veces en forma implícita y siempre en un marco funcional que organiza contenidos matemáticos.

Pero, ¿qué significa este argumento en el ámbito escolar? Dar respuesta a la pregunta requiere poner atención en lo que el ámbito escolar representa en los procesos de construcción del conocimiento matemático. El ámbito escolar, por los elementos que lo componen (conocimiento, maestro, alumno, salón, institución e interacciones sociales, entre otros), ha obligado a reconocer que para alcanzar cualquier explicación sobre cierto contenido matemático es necesario moverse en diferentes dimensiones. Algunas de ellas que hemos considerado en este trabajo son las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica. Y por las características específicas del argumento, importa preguntarse, en el marco de esas dimensiones, ¿cuál es la categoría de este tipo de argumentos en el conocimiento del Cálculo? Y si alcanza una categoría, entonces ¿cuál es su naturaleza epistemológica y su nivel de abstracción?. Pero también, si alcanza un *statu quo* epistemológico y se le identifica un nivel de abstracción, la

[1] Proyecto de investigación financiado por Conacyt., clave 3724P-S, con la colaboración de Antonio Arellano, Cinvestav-IPN, Bronislaw Czarnocha, Hostos Community College, CUNY, Ed Dubinsky, Georgia State University, Georgia, Daniel Hernández, Cinvestav-IPN, Germán Muñoz, Cinvestav-IPN, Asuman Oktaç, Cinvestav-IPN, Miguel Solís, Cinvestav-IPN, Draga Vidakovic, North Carolina University State College.

[2] Cinvestav-IPN

pregunta es ¿cómo interaccionan las construcciones mentales al considerar representaciones de esos argumentos?

Veamos algunos aspectos sobre el ctf en las tres dimensiones anteriormente mencionadas.

La dimensión epistemológica provee explicaciones sobre la naturaleza de la noción del ctf en un contenido matemático. Muchas veces la noción es tratada como marco de referencia en un contenido de Cálculo específico. Por ejemplo, el papel que juega la noción del ctf en una situación sobre el comportamiento asintótico de una función, o en una situación sobre la suma de dos funciones donde el comportamiento de la función suma $h(x)=f(x)+g(x)$ es determinado por el comportamiento local de una función, y global de la otra función, o en una situación de variación de los parámetros de una función prototipo $f(x)$, generando comportamientos de $f(x)$ de acuerdo con los rangos de A, a, b y B en $Af(ax+b)+B$.

La dimensión cognitiva explica cómo esta noción es representada (significados y significantes) por el cognocente, cómo son las relaciones entre los diferentes planos de representación y los procedimientos que se derivan de éstos. Por ejemplo, hemos encontrado, hasta ahora, diferentes representaciones gráficas cuando se piensa en una situación del límite al infinito de una función; acumulación de puntos, asíntotas horizontales y oscilaciones o curvas que se enredan en una recta o curva hasta que se confunden con la recta o curva dada. Unas son más privilegiadas que otras, sin embargo se generan procedimientos para observar comportamientos gráficos, los cuales consisten en determinar patrones gráficos (y a veces analíticos) al considerar previamente un comportamiento específico (forma gráfica y/o forma analítica) y tratar relaciones entre formas gráficas y analíticas para “copiar” tal comportamiento.

Y, por último, la dimensión didáctica enfoca la atención en los argumentos, como esquemas explicativos que se generan de los marcos de referencia y en un aspecto funcional. En ese sentido, y en esta dimensión, el ctf se convierte en un programa que organiza contenidos, conceptos e ideas.

En nuestro caso, las dimensiones son incluyentes. La dimensión epistemológica establece el marco de referencia del contenido matemático, este marco es necesario para la dimensión cognitiva donde aparecen los planos de representación y procedimientos del estudiante; y ambos, el marco y las representaciones y procedimientos, son necesarios para que en la dimensión didáctica se establezcan los argumentos o explicaciones de lo que ahí se organiza.

Ahora bien, la categoría de la noción del ctf describe un nivel de abstracción que tal vez no corresponde a la abstracción reflexiva. Es un nivel de abstracción que corresponde más a una categoría de construcción en un marco funcional, en el sentido de establecer relaciones entre procesos y objetos a través de significados. Es decir, esta categoría no corresponde a las operaciones lógicas.

Piaget establece diferentes tipos de abstracción (Piaget, y García, 1984) y restricciones de las mismas privilegiando las operaciones lógicas. Cuando se actúa sobre objetos, los individuos desarrollan diferentes clases de conocimientos dependiendo de la clase de abstracción que ellos hacen. La abstracción empírica consiste de aislar las propiedades y relaciones de los objetos externos, mientras que la abstracción reflexiva consiste en aislar las propiedades y las relaciones de las operaciones que hacen las personas. Mientras que las restricciones de las abstracciones se deben a que Piaget, el conocimiento lógico matemático deriva de la abstracción reflexiva, y el conocimiento físico o biológico viene de la abstracción empírica. Y el privilegio de las operaciones lógicas se debió a que Piaget trató de caracterizar las “etapas concretas” y las “etapas formales” del desarrollo cognitivo como un conjunto de operaciones lógicas. Sin embargo, Vergnaud (Vergnaud, 1990) señala que los hallazgos de Piaget no fueron libres de contenidos, de ahí que enfrentó problemas llamados *décalage*. Es decir, cuando la misma estructura lógica no aplica de igual manera a objetos diferentes o a aspectos diferentes de los mismos objetos. Por ejemplo, hay un *décalage* entre la conservación de la sustancia (cantidad de materia), el peso y el volumen de la misma pieza de plasticidad.

En ese sentido podemos decir que las abstracciones de las propiedades y de las relaciones de operaciones seguramente explican el conocimiento matemático. Sin embargo, esas abstracciones y relaciones no dan cuenta de la existencia de ese conocimiento matemático. Esto es, ¿por qué existe ese conocimiento matemático? O bien: a) ¿cuál es la relación del conocimiento con las características físicas y sociales de las situaciones que

los estudiantes enfrentan?; b) ¿cuál es la elección adecuada y cuidadosa de las situaciones que hacen el conocimiento matemático significativo? y c) ¿cuál es la relación entre los problemas para ser resueltos y las competencias y concepciones específicas?
El conocimiento matemático no existiría si no fuera un modelo aceptable de alguna realidad, como las entidades físicas, y no ayudara a tratar problemas empíricos.
Entonces, tal vez el aspecto funcional está más en correspondencia con la modelación y el uso y pudiera ser la base del ctf en tanto categoría. Esa base llevaría a establecer relaciones entre procesos y objetos a través de significados.
Las categorías basadas en el aspecto funcional, en nuestro caso el ctf, contrastan con las categorías encontradas en la estructura de la matemática. El contraste radica en los procedimientos que se derivan, por un lado, de las representaciones y, por el otro, de las operaciones formales. En ese sentido el aspecto importante de las categorías, en la didáctica de la matemática, no consiste en establecer una definición matemática, sino más bien en establecer o identificar todas las relaciones en el marco de referencia del contenido matemático (herramienta y significado) a través de representaciones y los procedimientos que se derivan de éstas.
La naturaleza de esas relaciones lleva directamente a *la forma* de construir los procesos y objetos que a los procesos y objetos en sí. La forma corresponde al funcionamiento cognitivo esto quiere decir que la variabilidad de los marcos y la multiplicidad de las representaciones tienen que afectar las formas de construcción. Y para poder determinar cómo son afectadas, analizamos los progresos y las restricciones de las construcciones mentales.

La inter-relación del contenido matemático, las representaciones y los procedimientos son elementos que nos importa ver en una “estructura de desarrollo del entendimiento”. Para ello debemos diseñar situaciones que consideren las inter-relaciones de contextos organizados por esas categorías como veremos en la sección de situaciones.

Statu quo epistemológico del comportamiento tendencial de las funciones

En la sección de situaciones presentamos algunos ejemplos con la intención de hacer ver con más claridad el papel que juega el marco funcional y el sentido que le hemos dado a la noción de relaciones entre procesos y objetos.
La selección de los ejemplos depende de diversas situaciones del Cálculo, las cuales están articuladas por la noción del ctf. Además, para lograr una mejor explicación, empezaremos con nuestra posición epistemológica sobre lo que es el Cálculo.
Consideramos el Cálculo como el estudio de los fenómenos de variación, donde la operación fundamental es una resta que modela la comparación de dos estados, algunas veces en una situación local y otras veces en una situación global. Esta visión epistemológica provee de categorías cuyas bases no son *a priori* la abstracción reflexiva y corresponden más a una base de modelación y uso.
Las categorías de conocimiento matemático que se obtengan de esa epistemología se encuentran en un marco funcional, en el sentido de establecer relaciones entre procesos y objetos a través de significados. Es decir, esas categorías no corresponden a las operaciones lógicas sino más bien a los procedimientos que se derivan de las representaciones.
Las categorías que hemos encontrado hasta ahora en nuestros estudios epistemológicos son las siguientes: noción de predicción (Cantoral, 1990), noción de acumulación (Cordero, 1994) y noción de estado permanente (Farfán, 1997) y cada una está en relación con la estructura matemática del Cálculo y Análisis respectivamente: aproximación, derivación y serie de Taylor, integración y teorema fundamental del Cálculo, y convergencia y serie de Fourier.
Estas aportaciones ya han servido de base para trabajos posteriores. Por ejemplo, se identifican dificultades y obstáculos epistemológicos en las construcciones de las nociones de convergencia potencial, sumabilidad y operatividad (Albert, 1996). Se diseñan secuencias didácticas para un curso de Cálculo en el que los estudiantes se apropien de la idea pragmática que llevó a Newton a la invención de su Cálculo (Alanís, 1996). Pero también han servido de base para encontrar recortes de saberes sobre el diferencial como elementos para una reconstrucción del Cálculo. (Pulido, 1998).

En conjunto, estas categorías se convierten en un programa que organiza contenidos, conceptos e ideas; programa que orienta la investigación y el diseño de situaciones, cuyo funcionamiento consiste en establecer el marco de referencia del contenido matemático (marco epistemológico), donde aparecen los planos de representación y procedimientos del estudiante (dimensión cognitiva), y después, utilizando ambos, el marco de referencia y las representaciones y procedimientos, se establecen los argumentos o explicaciones de lo que en el marco de referencia se reorganiza (dimensión didáctica).
Las explicaciones epistemológicas de esas categorías con sus interacciones sociales (sociedad, escuela, institución, cultura) se han basado en los siguientes cuatro elementos: 1. significados y sistemas simbólicos, 2. procedimientos, 3. procesos y objetos, y 4. argumentos. A estos cuatro elementos en conjunto le llamamos construcción de representaciones.
Las construcciones de representación cubren, hasta ahora, tres grupos: variabilidad de las variables, gráficas de funciones y expresión formal. Cada grupo compone un marco epistemológico del conocimiento matemático y, además, los estudiantes construyen representaciones y aplican procedimientos en relación con las operaciones que ellos son capaces de hacer, en relación con las condiciones que ellos son capaces de capturar y transformar, y en relación con los conceptos que ellos van construyendo progresivamente. Por ejemplo, siguiendo horizontalmente cada grupo del cuadro 1, los procedimientos que se han obtenido de los estudiantes de acuerdo con las representaciones construidas son: comparación de dos estados, variación de la variable y de los coeficientes de una transformación y operaciones formales. Mientras que en relación con los procesos y objetos sobre los cuales suelen trabajar, hemos encontrado la cantidad de variación continua, la forma de la gráfica y el concepto de función. Y de los argumentos que ellos han generado, tenemos la toma del elemento diferencial, el comportamiento tendencial de las funciones y la función analítica (Cordero, F. y Solís, M., 1995) (véase el cuadro 1).

CUADRO 1

Construcción de representaciones	Variabilidad de las variables.	Gráfica de funciones.	Expresión formal
Significados y sistemas simbólicos	° noción de predicción ° noción de acumulación ° noción de estado permanente	° transformación de función ° comportamiento de una función ° función derivada y primitiva	° aproximación ° derivación ° integración ° convergencia
Procedimientos	comparación de dos estados	variación de la variable y de los coeficientes	operaciones formales
Procesos y objetos	cantidad	forma de la gráfica	función
Argumentos	toma del elemento diferencial	comportamiento tendencial de la función	función analítica

El programa no sólo nos orienta sobre lo que debe ser el Cálculo y Análisis para la enseñanza y el aprendizaje, sino también lleva a tomar las herramientas como la base de esas categorías. Así se pondría atención en el mejoramiento de sus ejecuciones o en el desarrollo de nuevos y mejores métodos de uso. Aquí, estructura no es *a priori* un conjunto de arreglos, sino más bien es el resultado de la clase de actividades y acciones que permite una herramienta cuando se siguió un cierto camino. Esto llevaría al acto de ver similitudes en estructuras y éstas alternan diferentes contextos que pudieran ser la fuente o la base de la abstracción. Concretamente nos estamos refiriendo a todas las relaciones e interacciones que se pudieran establecer entre los tres grupos anteriormente mencionados.
En resumen, cada grupo está compuesto de representaciones, procedimientos y objetos. Hay representaciones y procedimientos específicos en cada grupo. Cada grupo es un marco epistemológico del conocimiento matemático y, además, los estudiantes construyen representaciones y aplican procedimientos en relación con las operaciones que ellos son capaces de hacer, en relación con las condiciones que ellos son capaces de capturar y transformar, y en relación con los conceptos que ellos construyen progresivamente. Así, las explicaciones epistemológicas con sus interacciones sociales (sociedad, escuela,

institución, cultura) deberían estar basadas en los siguientes cuatro elementos de la construcción de representaciones:

Significados y sistemas simbólicos
Procedimientos
Procesos y objetos
Argumentos

En ese sentido y en este marco, requerimos estudiar tres preguntas centrales relativas a nuestra investigación sobre las construcciones mentales:
1. ¿Cómo es la naturaleza de las construcciones mentales por cada situación?
2. ¿Cuáles son los progresos de las construcciones mentales ante una secuencia de situaciones?
3. ¿Cuáles son las restricciones de las situaciones que determinan ciertas construcciones mentales?

Así es como tratamos el caso del comportamiento tendencial de las funciones. Ahí, la construcción de representaciones se enfoca en a la gráfica de las funciones, donde los significados y sistemas simbólicos son encontrados en las transformaciones de las funciones, en el comportamiento de la función y en las relaciones entre la función derivada y primitiva. La base de los procedimientos se encuentran en la variación de la variable y de los coeficientes, mientras que la base de los procesos y objetos se encuentran en la forma de la gráfica. Y los argumentos de esta construcción de representaciones son expresados por la noción del comportamiento tendencial de las funciones (véase la columna dos del cuadro 1).

El aspecto importante en esta construcción de representaciones es la relación entre la variación y el comportamiento tendencial, que no es otra cosa sino una relación entre una situación local y global donde hay variación y comportamiento con cierta tendencia. Simultáneamente hay una percepción tanto local como global donde hay una medida de cambio y donde la medida tiene comportamiento.

Por ejemplo, la función $f(x)=1/x$ con $x>0$, muchas veces es descrita a través de su gráfica (véase la figura 1)

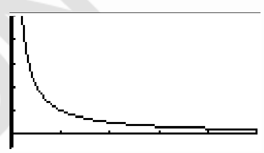


Figura 1

La descripción depende de la forma de la gráfica donde la simultaneidad de la medida del cambio y el comportamiento de la medida son intrínsecos a la gráfica. En ese sentido se dice que la curva $1/x$ tiende al eje x, pero la variación de $1/x$ determina cómo tiende, es decir el comportamiento tendencial al eje x.

Tal vez, en ese sentido Cantoral (Cantoral, 1992) reporta, en un análisis realizado con estudiantes universitarios, la noción de comportamiento tendencial de la siguiente manera:

"...el objeto matemático $y=1/x$ no era visto (por los estudiantes) como una expresión formal que permita operar sobre números concretos, sino como una forma de describir el comportamiento tendencial que exhibía la gráfica o la función misma cuando se le mira con la idea de variación, en el mismo sentido en que se piensa un problema de cambio..."

El ctf es intrínseco a la gráfica y genera un conjunto de situaciones que abarca cierto contenido del Cálculo, enmarcado en situaciones globales de variación. Las gráficas de las funciones son las representaciones privilegiadas de estas situaciones; sin embargo, las representaciones en la perspectiva del ctf conllevan, también, relaciones analíticas.

Hasta ahora hemos logrado diseñar algunas situaciones a través de contenidos concretos del Cálculo. Y están siendo aplicadas a estudiantes del ciclo universitario a través de entrevistas.

Situaciones

Empecemos por justificar el diseño de las tres situaciones que presentamos a continuación. Y la mejor manera de hacerlo es a través de la explicación lo que queremos hacer

con las situaciones en relación con la categoría del ctf.
El término "situación" es usado en un sentido amplio para referirse desde una clase de objetos, ya sea materiales o mentales,y una clase de sucesos o fenómenos, hasta problemas, teoremas o afirmaciones y teorías. Sin embargo, tal vez lo más importante del término está en el papel que juega "la situación" cuando interactúa con un marco teórico sobre el entendimiento en matemáticas. En ese sentido, "situación" es el objeto de entendimiento presentado como una situación dada. Por ejemplo, Sierpinska (Sierpinska, A., 1994) explica la "generalización" como una operación mental y establece que en ella la situación dada es pensada como un caso particular de otra situación.
En este marco tal vez podríamos decir que son las relaciones entre las situaciones las que proveen explicaciones de los entendimientos matemáticos y no en sí la definición del término situación. Tal vez por eso encontramos en Dubinsky (Dubinsky y Harel, 1992) que "situación" no es un concepto de la teoría; sin embrago, en relación con los progresos de las construcciones mentales aparecen los siguientes usos: variedad de situaciones, situaciones en diferentes contextos, categorías de situaciones. No obstante, en Brousseau también encontramos que las raíces de su teoría de situaciones didácticas están en las observaciones en clase, en las tareas sutiles de los procesos reales de enseñanza y aprendizaje y en las características contractuales que hacen proceder las interacciones del salón de clases.
Piaget tuvo el mérito de haber presentado una teoría coherente de la evolución del conocimiento. El conocimiento pasaría de un estado de equilibrio a otro por medio de un desequilibrio de transición, en el curso del cual las relaciones consideradas por el sujeto en el estado anterior estarían en contradicción, ya sea por la consideración de relaciones nuevas o por la tentativa, nueva también, de coordinarlas. Esta fase de conflicto sería superada durante una fase de reorganización y de coordinación que llevaría a un nuevo estado de equilibrio. Aplicar esta teoría al conocimiento matemático nos lleva a considerar que las "situaciones" presentadas a los estudiantes constituyen un factor importante para hacer evolucionar sus representaciones y sus procedimientos. Brousseau ha desarrollado al respecto la "teoría de situaciones didácticas".
Pero, también, la consecuencia más importante del constructivismo epistemológico de Piaget es haber encontrado que el conocimiento es siempre una respuesta a los problemas propios. Los estudiantes en la escuela tienen problemas que no son propiamente matemáticos sino más bien sociales. Éstos son los problemas de supervivencia y de éxito en la institución escolar y no problemas de investigadores quienes quieren establecer y hallar la verdad. Los estudiantes interpretan sus tareas escolares, tropiezan con cosas que son problemas para ellos, y es esa clase de problemas la que resuelven. Por ejemplo, el maestro pudiera haber esperado que el estudiante leyera y analizara cuidadosamente cierto enunciado matemático y asociara las operaciones con el contexto; es decir, el maestro habría esperado que el problema del estudiante sería una modelización matemática de la situación del enunciado matemático, pero para el estudiante este problema fue suponer correctamente la operación que está siendo practicada en clase.
Veamos cómo trabaja un diseño de situación didáctica en la teoría de situaciones. A riesgo de convertir la teoría de situaciones en un esquema, daremos un ejemplo genérico extraído de ejemplos particulares. El siguiente ejemplo es citado por Sierpinska (1996).
Ejemplo.
El objetivo de la "situación" propuesta es comprometer al estudiante para que produzca un argumento matemático de A como opuesto a un argumento empírico del tipo "es claro que del dibujo..." o "de la construcción se pude ver...". La idea del proyecto es poner a los estudiantes en una situación donde la sola "observación" de A lleva a una falsa afirmación, y esta falsedad sólo puede ser probada por permanecer sobre el nivel del conocimiento discursivo. Así, una situación puede ser trabajada como sigue.
Secuencia 1. A los estudiantes se les pide hacer P_1. Una vez hecho P_1 se les pide con base en P_1 hacer P_2. En P_2 es difícil hacer precisiones. Hasta aquí P_1 y P_2 componen un problema y ambas están en relación con A.
Secuencia 2. Después el maestro les plantea un nuevo problema en forma de competencia para hacer P_3 (por ejemplo, "¿cómo pueden hallar...?"), de tal suerte que pongan en duda P_3 por haber hecho P_2. Después de un número de ensayos o intentos fallidos algunos estudiantes ponen en juego algunas conjeturas que deberán ser algunas razones por no ser

capaces de hacer P_3. Un debate puede empezar donde los proponentes de la conjetura están tratando de hallar sus razones y los argumentos del debate no se refieren nunca más a A, puesto que A es engañoso, pero sí a las propiedades de A.
En este caso las secuencia 1 y 2 componen la situación pero además se rompe el contrato usual entre el maestro y el estudiante, donde el maestro está proponiendo sólo problemas que tienen solución.
El maestro está ahora en el papel del más viejo o más inteligente amigo, quien ha tomado a los estudiantes para un engaño. La única forma en que puede desengañarse el estudiante es enfrentar al inteligente con sus propias formas o costumbre, y hallar la razón matemática por la cual la tarea propuesta es imposible.
Entonces, el estado del diseño de nuestra "situación" en la teoría de situaciones es que no tenemos el "engaño" del ctf hasta ahora, pero sí la actividad que se realiza ante el ctf.
Este estado, lejos de marcar una deficiencia del diseño, está marcando una perspectiva distinta y que tal vez coincide con la naturaleza de la categoría tratada. Esto es, la categoría lleva a pensar a la matemática como una herramienta para modelar. No se asignan objetos matemáticos a una realidad separada, sino más bien se reconoce que hacer distinciones y formar construcciones es una parte esencial de la modelación. En ese sentido coincidimos con Confrey (Confrey, J. y Costa, S., 1996) cuando afirma que seleccionar el lenguaje de las herramientas sobre el lenguaje de los objetos viene a señalar una clara relación entre la actividad matemática y la actividad humana. En lugar de confiar en análisis puramente lógicos para decidir cómo desarrollar matemáticas, uno debe considerar mejor en qué actividades están interesados los estudiantes, cuáles son más familiares y cómo conducen esas actividades a otras posibilidades.
Tomar las herramientas como la base de esas categorías generaría mayor atención en el mejoramiento de sus ejecuciones o en el desarrollo de nuevos y mejores métodos de uso, por ejemplo, las acciones de identificar, reconocer, buscar y relacionar. Y entender las relaciones entre la función y la forma de las herramientas lleva a colocar las estructuras en el centro de la investigación. Pero aquí, estructura, como se señalo anteriormente, no es *a priori* un conjunto de arreglos, sino más bien es el resultado de la clase de actividades y acciones que permite una herramienta cuando se siguió un cierto camino. Esto llevaría al acto de ver similitudes en estructuras y éstas alternan diferentes contextos que pudieran ser la fuente o la base de la abstracción.
Entonces, lejos de tener una "adquisición de conocimiento" con la categoría del ctf contamos con un "desarrollo de actividades" al hacer distinciones y formar construcciones como parte esencial de la modelación. Así, las situaciones están compuestas de tres niveles que marcan un desarrollo de la categoría.
Situaciones compuestas de tres niveles. Las tres situaciones:
S_1: variación de coeficientes de la transformación de una función.
S_2: relaciones entre funciones a través de operaciones.
S_3: estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales.
Los niveles describen un desarrollo de la actividad o del uso del modelo.
S_1: variación de coeficientes de la transformación de una función
N1: traslaciones y cambios de pendientes. Se identifican y/o establecen los coeficientes de una función dada para anticipar efectos gráficos de traslación y cambio de pendiente. Se identifican relaciones entre los rangos (valores) de los coeficientes y el comportamiento gráfico y la expresión de la función.
Ejemplo. La función $f(x)=x^3+x^2$ y su gráfica (véase lafigura 2) son transformadas de acuerdo con la función $Y(x)=A[f(x)]+B$ con los siguientes valores de los coeficientes A y B: A=1, 10, 0.5, -1 y B=0

$\leftrightarrow$ $f(x)=x^3+x^2$

Figura 2

La gráfica de la función $f(x)$ es organizada a través de la expresión $Y = A[f(x)] + B$; en ese sentido deja de ser importante la variable "x" y pasan a ser importantes los coeficientes A y B de la expresión (véase la figura 3).

$Y(x) = A[f(x)] + B$

$\downarrow$

A=1, 10, 0.5, -1 y B=0

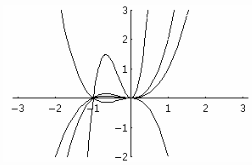


Figura 3

Además, la familia de curvas puede ser trasladada una unidad a la derecha a través de la expresión $Y(x) = A[f(x-1)] + B$ (véase la figura 4).

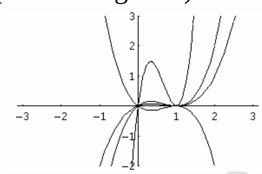


Figura 4

Vale la pena subrayar que en este nivel se establecen relaciones entre contextos gráficos y analíticos a través de la siguiente secuencia de funciones que describe una especie de "iteración lineal":

$$Y_1 = ax + b$$
$$Y_2 = f(x)$$
$$Y_3 = A[f(x)] + B$$
$$Y_4 = A[f(ax+b)] + B$$

Las relaciones entre las "operaciones gráficas" y las "formas analíticas" (expresiones de las funciones) llevan a concebir a la función no como una expresión formal por la cual se operan números específicos, sino, más bien, como una instrucción que organiza comportamientos. Esto es, se anticipan efectos gráficos de la función $Y_2 = f(x)$ a través de los coeficientes a, b, A y B y de la secuencia descrita anteriormente:

$Y_1 = ax+b$ y $Y_2 = f(x) \longrightarrow Y_3 = A[f(x)]+B$ y $Y_4 = A[f(ax+b)]+B$,

donde $f(x)$ es cualquier función prototipo.

Esta secuencia no es una operación explícita que empieza en Y_1 y termina en Y_4. Sin embargo, son sucesos gráficos que transfieren acciones entre cada uno de los elementos de la secuencia. En este caso, Y_4 es el suceso general que representa todos los trazos de la gráfica considerados en la "iteración lineal". Además, se han diseñado actividades y se han aplicado a estudiantes y profesores.

Ejemplos de actividades que se han diseñado y aplicado:

Actividad. La figura a representa la gráfica de la función $f(x)=\text{sen } x + \frac{1}{x}$

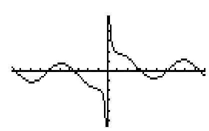
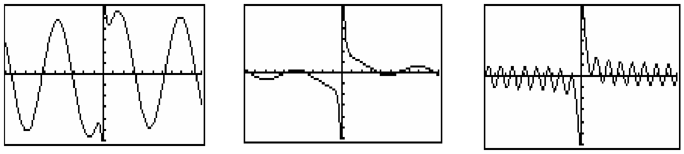


Figura a

De acuerdo con la "iteración lineal" $Y_4 = A[f(ax+b)] + B$ estime el valor de los parámetros para que la gráfica de la función f(x) bosqueje las siguientes situaciones gráficas.

a) b) c)



d)

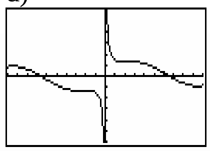


Figura 5

N2: comparación entre gráficas y relaciones de rapidez. Se establecen relaciones entre comportamientos a través de la noción de rapidez.
Por ejemplo, determinar los coeficientes *a*, *b* y *c* para que el límite que a continuación escribimos sea 4:

$$\underset{x\to\infty}{lím}\frac{a}{b+2e^{-cx}}=4\,.$$

La actividad consiste en determinar los coeficientes *a*, *b* y *c* de una función *Y*(*x*) para que el límite sea el propuesto (en este caso 4).
Los coeficientes a y b determinan el comportamiento tendencial a 4, cuando x tiende a infinito. Sin embargo, una vez establecido el comportamiento tendencial destaca significativamente la variación del parámetro c>0. En ese sentido, el aspecto central del problema resulta ser la rapidez de crecimiento de Y(x) (véase la figura 6).

$$Y_1=\frac{4}{1+2e^{-x}}$$

$$Y_2=\frac{4}{1+2e^{-4x}}$$

$$Y_3=\frac{4}{1+2e^{-7x}}$$

$$Y_4=\frac{4}{1+2e^{-\frac{1}{5}x}}$$

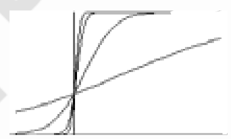


Figura 6

N3: simulación de comportamientos gráficos. Se establecen relaciones entre los comportamientos gráficos de las funciones y las situaciones globales de Cálculo: funciones crecientes y acotadas, máximos y mínimos de una función, continuidad de una función y diferenciabilidad de una función.
Escogemos un ejemplo de máximos y mínimos de una función para ilustrar lo que entendemos como simulación de comportamientos gráficos.
Una situación de Cálculo usual consiste en hallar los máximos y/o mínimos de una función, por ejemplo $y=-x^2+1$.
Sabemos que hay varias maneras de resolver este tipo de problemas. Una es derivar la función e igualar a cero y después analizar el signo de la segunda derivada, donde la primera derivada es cero para determinar su concavidad.
Otra solución es reconocer la forma de la parábola y de acuerdo con el signo de la x^2 determinar el máximo o mínimo.
Sin embargo, si modificamos la situación, no para hallar un máximo de la función sino a fin de pedir que alcance un máximo dado, tenemos una nueva situación:
"Dada la función $y=-x^2+1$ se quiere que alcance su valor máximo en $y(0)=2$, sin que cambien los ceros de la parábola".
Gráficamente quiere decir que se tiene que encontrar una de las parábolas de la figura 7.

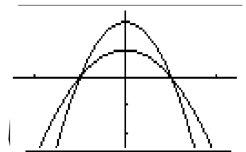


Figura 7

Analíticamente significa determinar los coeficientes adecuados para que la parábola tome su máximo en cero (y(0)=2) sin que pierda los ceros de la parábola.

Para ello, es necesario multiplicar por un coeficiente (constante a) a la función $y=-x^2+1$ definiendo una nueva función $y_1=a(-x^2+1)$.

Luego $2=y_1(0)=a$,

así $y_1=2(-x^2+1)$.

Finalmente podemos verificar que $y(0)=2$ y que $x=1$ y $x=-1$ son los ceros de y_1.

Nuevamente se presenta que este tipo de situaciones favorece una concepción global de función en tanto que para resolver el problema basta con multiplicar por un parámetro adecuado a la función dada. La condición sobre la permanencia de los ceros (o de un punto fijo en otros casos) determina la multiplicación del parámetro y no la suma:

$Y(x)=f(x) \quad \rightarrow \quad Y_1=Af(x)$.

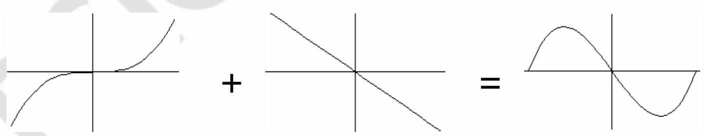
En resumen, la situación S_1 privilegia una concepción global de la función con relación a un comportamiento de la función. Entonces, a partir de que una función es entendida como una relación entre variables donde se presenta una "variabilidad" entre ellas, la función, en el marco de la situación S_1 pasa a ser "una instrucción que organiza comportamientos". Se pone atención en los coeficientes de las funciones en relación con las gráficas de las funciones.

S_2: relaciones entre funciones a través de operaciones

La suma, multiplicación y composición de dos funciones es una relación de tres funciones. Tratamos aquí, como caso particular, la operación suma.

N1: suma de funciones en un contexto gráfico, $f+g=h$. Se establecen relaciones entre los comportamientos gráficos de las funciones para anticipar nuevos comportamientos. Se identifican regiones donde permanecen o recuperan comportamientos gráficos una vez efectuada la operación (suma). Por ejemplo, se generan actividades como la siguiente:

Actividad. Explica ¿por qué la gráfica de h tiene el comportamiento como aparece en la figura A?



Gráfica de *f* Gráfica de *g* Gráfica de *h*

Figura A

La función h es reconocida como la suma de dos funciones con relación a su ctf. La suma de las dos funciones, tanto algebraica $f(x)+g(x)$ como aritmética $f(a)+g(a)$, pasa a ser una instrucción que organiza comportamientos de *h*.

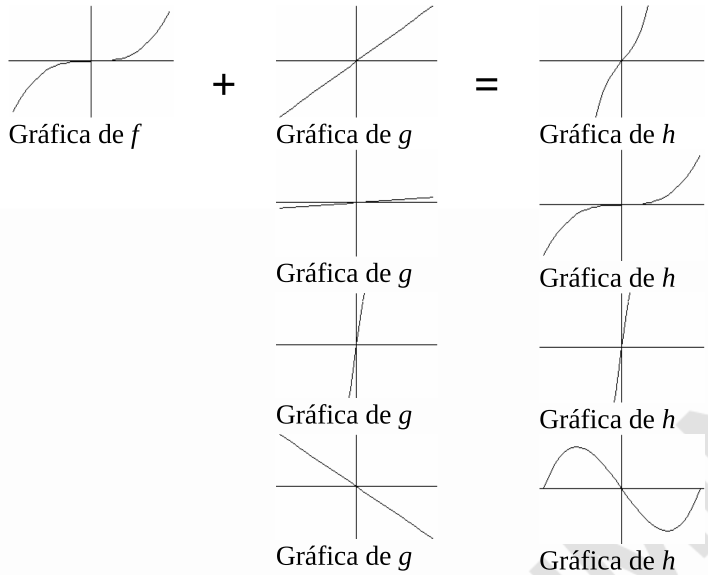
Hemos hallado explicaciones que aluden al ctf. Parafraseamos a continuación una de ellas:

...la gráficas que aparecen en la figura A... la gráfica de *g* pasa por el origen pero también la gráfica de *f*. Ahora bien, la gráfica de *h*, en el origen se parece a la gráfica de *g* y después a la gráfica de *f*... creo que las gráficas se persiguen. La gráfica de *f* quiere ser la gráfica de *g*, esto es, *f* se comporta como *g* en esa misma ventana, pero fuera de esa ventana *g* quiere ser como *f* y eso hace la gráfica *h*...

N2: secuencia de gráficas en la suma de funciones, $f_0+g_k=h_k$. Se establecen relaciones entre un comportamiento dado y la variación de comportamientos. Se generan patrones gráficos de suma de funciones. Por ejemplo, en la tabla 1 aparece un procedimiento para anticipar comportamientos tendenciales de las funciones cuando a la gráfica de una función f se le suma una recta, *f*+recta.

Procedimiento encontrado en los estudiantes.

Tabla 1



El nivel N2 favorece relaciones de ctf entre las tres funciones. Se toma una función f_0 y se varía la otra función g_k y se determina el comportamiento de h_k (h_k depende de g_k). La función h_k es determinada por el comportamiento local de una función y por el comportamiento global de la otra función.

N3: transformación entre gráficas, f+?=h. Se establecen relaciones entre comportamientos tendenciales y transformaciones. Una transformación es un comportamiento tendencial que genera otro comportamiento tendencial. Por ejemplo, una actividad que se puede diseñar alrededor de esta idea consiste en preguntar por una de las gráficas que componen la suma de una función.

Actividad. Bosqueje la gráfica de g de acuerdo con la suma de gráficas que aparece en la figura B.

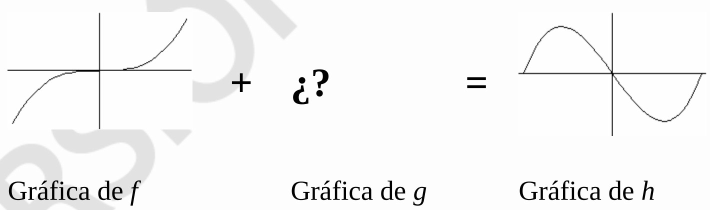


Figura B

La actividad presenta dos planos de representaciones: uno estructural y el otro funcional. Si se quiere encontrar la función g tal que la suma f + ? = h se cumpla y si se quiere encontrar la gráfica g tal que la suma gráfica f+gráfica ? = gráfica h se cumpla, encontramos dos procedimientos diferentes. En el primero, el procedimiento es algebraico por lo que la suma de funciones es una estructura que cumple reglas. La suma f + ? = h es interpretada como una ecuación algebraica con la finalidad de efectuar un despeje y así encontrar la función incógnita g y después graficarla. Mientras que en el segundo plano se busca no en sí una operación, sino más bien una relación entre las gráficas conocidas. Los ctf en las gráficas f y h juegan un papel importante. La gráfica g se establece a través de su comportamiento tendencial deducido por los comportamientos de las gráficas de f y de h. Si el estudiante cuenta ya con la experiencia del nivel N2, el procedimiento se reduce a encontrar un patrón gráfico de una función que traza el comportamiento tendencial de la gráfica de h.

En resumen, la situación S_2 construye un argumento: sumar dos funciones a través de buscar un comportamiento tendencial.

La "aritmética" gráfica dependerá de los comportamientos tendenciales entre la función prototipo $f(x)$ y la función propuesta $g(x)$. Así, la gráfica de la función $h(x)$ es determinada por los coeficientes de $g(x)$ en la secuencia.

Una aritmética gráfica como la anterior puede ser aplicada a relaciones más generales entre gráficas. No obstante, para llevar esta aritmética a relaciones donde entren en juego expresiones y formas arbitrarias de funciones es necesario determinar los comportamientos tendenciales, en los intervalos adecuados entre las funciones *f*(*x*) y *g*(*x*).

El argumento es, entonces, determinar nuevos comportamientos tendenciales que dependen de las formas gráficas que componen la operación. La secuencia de gráficas que se dibujen permitirán reconocer un patrón gráfico o bien una forma específica de la gráfica que ayudará a caracterizar el nuevo comportamiento tendencial.

El argumento provee diseños de actividades como las que a continuación escribimos.

Ejemplos.

Actividad A. Analice la situación gráfica alrededor del cero (tome un intervalo $[-a, a]$ donde $0<a$) de las siguientes funciones.

A.a. $f(x) = \operatorname{sen} x + x^2$

A.b. $g(x) = \operatorname{sen} x + x^3$

A.c. $h(x) = \operatorname{sen} x + 0.005x^2$

A.d. $j(x) = \operatorname{sen} x + 0.005x^3$

Actividad B. La gráfica de la función $h(x)=f(x)+g(x)$ está representada en la figura a, determine que funciones podrían ser $f(x)$ y $g(x)$.

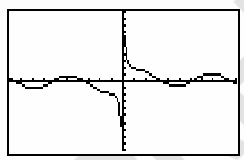


Figura a

S_3: estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial lineal es una relación entre funciones que determina comportamientos.

N1: secuencias de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden $y(x)+y'(x)=F(x)$, variando $F(x)$. Se establecen relaciones entre la solución de la ecuación y el comportamiento de $F(x)$.

Por ejemplo, si pretendemos determinar el comportamiento de las soluciones de la siguiente secuencia de ecuaciones diferenciales:

$y'(x) + y(x) = 0$ y

$y'(x) + y(x) = k$

lleva a anticipar la solución de la ecuación diferencial $y'(x) + y(x) = x$ buscando el comportamiento tendencial de y(x).

De la primera ecuación, $y'(x) + y(x) = 0$, sabemos que su solución es $y(x) = Be^{-x}$. La gráfica de *y*(*x*) dibuja un comportamiento tendencial al eje *x*, esto es, la solución *y*(*x*) tiende a cero. Además, el signo de *B* establece que la curva esté por arriba o por abajo al eje *x* (véase la figura 8).

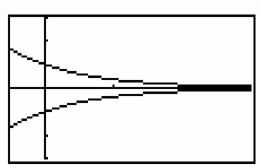


Figura 8

Ahora bien, la segunda ecuación diferencial, $y'(x) + y(x) = k$ tiene como solución $y(x) = k + Be^{-x}$. La gráfica de *y*(*x*) dibuja un comportamiento tendencial hacia la recta *Y*(*x*)=*k*. Es decir, la solución $y(x)$ tiende a k, ya sea por arriba o por abajo de la recta, dependiendo del signo de *B* (véase lafigura 9).

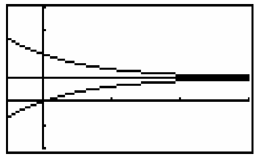


Figura 9

En ambas ecuaciones aparece un comportamiento tendencial. Por una parte, en la ecuación diferencial $y'(x)+y(x)=0$, la solución $y(x)$ tiende a cero. Por otra, en la ecuación diferencial $y'(x)+y(x)=k$, la solución $y(x)$ tiende a k. Entonces, si la ecuación es $y'(x)+y(x)=x$, ¿la solución $y(x)$ tenderá a x?

La solución de esta última ecuación es $y(x)=x-1+Be^{-x}$.

La gráfica de la solución tiende a comportarse como una “recta de pendiente uno” (véase la figura 10):

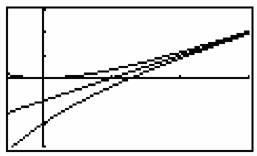


Figura 10

En ese sentido diremos, si $y'(x)+y(x)=x$ la solución tiene un comportamiento tendencial a x, “ $y(x)\longrightarrow x$ “.

La secuencia de las tres ecuaciones diferenciales sugiere el planteamiento de un nuevo problema: explorar el comportamiento tendencial de $y(x)$ y de $F(x)$ cuando la ecuación diferencial es $y'(x)+y(x)=F(x)$.

La búsqueda del comportamiento tendencial, “ $y(x)\longrightarrow F(x)$ “, está orientada por argumentos gráficos.

Ejemplos de actividades que se han diseñado:

Actividad A. Explore los comportamientos tendenciales de las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

3.a. $y'+y=\operatorname{sen} x$

3.b. $y'+y=e^{x}$

3.c. $y'+y=xe^{x}$

Actividad B. Explore situaciones gráficas de la solución de la ecuación diferencial $y'(x)+y(x)=F(x)$, considerando la siguiente secuencia para $F(x)$:

$F(x)=x^2,\quad x^3,\quad \ldots,\quad x^n$

Actividad C. Explore el comportamiento tendencial de la solución de la ecuación diferencial $y'(x)+y(x)=F(x)$, cuando $F(x)$ es una función escalonada (proponga la función escalonada).

Actividad D. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales y bosqueje las gráficas de las soluciones.

6.a. $y'(x)+y(x)=x$

6.b. $2y'(x)+y(x)=x$

6.c. $y'(x)+2y(x)=x$

6.d. $y'(x)+y(x)=2y$

N2: secuencia de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, variando los coeficientes. Se establecen relaciones entre el comportamiento de la solución de la ecuación y los coeficientes. El comportamiento tendencial de las funciones es un argumento.

Por ejemplo, en este nivel hay un reconocimiento sobre la ecuación diferencial. Si $ay'(x)+y(x)=F(x)$ entonces $y(x)$ se comporta como F(x), sin embargo el coeficiente a modifica el comportamiento.

La ecuación diferencial $y'(x)+y(x)=F(x)$ representa una situación en la que, dada $F(x)$, la solución $y(x)$ tiende a $F(x)$. Así, la ecuación diferencial

$$y'(x) + y(x) = F(x)\,,$$

expresada como

$$y'(x) = F(x) - y(x)\,,$$

significa que $y'(x)$ determina la rapidez con que $y(x)$ tiende a $F(x)$ en la situación analizada.

En este marco, la solución $y(x)$ puede ser determinada, en términos globales y cualitativos, si se conoce la gráfica de $F(x)$, mediante el trazo de trayectorias en el entorno de la gráfica de $F(x)$. Esto podrá hacerse independientemente de los diferentes métodos analíticos disponibles.

En este sentido, el punto significativo no radica en hallar la solución sino más bien en determinar comportamientos tendenciales entre la ecuación diferencial y su solución, y con ello lograr simulaciones. Un ejemplo de este tipo de procesos sería encontrar el coeficiente *a* de la ecuación

$$ay'(x) = F(x) - y(x)$$

para que $y(x)$ tienda rápidamente o lentamente hacia $F(x)$.

N3: secuencia de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, haciendo algunas generalizaciones. Se establecen relaciones entre el orden de la ecuación y la estabilidad de la ecuación. Se generaliza el argumento ctf.

La generalización del argumento ctf es trabajada a través de actividades, donde se plantean secuencias de ecuaciones diferenciales de orden distinto: $ay'(x) = F(x) - y(x)$, $ay'(x) + by''(x) = F(x) - y(x)$ y $a_1 y'(x) + a_2 y''(x) + \ldots + a_n y^{(n)} = F(x) - y(x)$. Se trata entonces de encontrar las condiciones, a través de los coeficientes para que la solución $y(x)$ tenga un comportamiento tendencial a $F(x)$. Las condiciones, naturalmente, cumplen con las condiciones de estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Comentarios finales

Hemos expuesto en este artículo el *statu quo* epistemológico del ctf en situaciones del Cálculo. El ctf aparece en los comportamientos asintóticos de las funciones (Arellano, A. *et al*., 1997), en el traslado y dilataciones de las funciones, en las operaciones de las funciones (Cordero, F. *et al*., 1997) y en las ecuaciones diferenciales (Cordero, F. y Solís, M. 1997b) y seguramente en más situaciones; sólo hemos tomado a las situaciones anteriormente mencionadas como ejemplos. Hemos presentado los diferentes significados que adquiere el ctf a través de las distintas situaciones, además de haber considerado sus diferentes niveles. El *statu quo* ofrece más que una etapa sobre los procesos de construcción del conocimiento del Cálculo, tal vez la etapa de herramientas y no de objetos, un marco enorme de razonamiento que la didáctica puede sacar provecho.

Contamos hasta ahora con material didáctico (Cordero y Solís. 1997a) y algunas implementaciones y entrevistas a maestros y estudiantes. En un primer estudio hemos recogido algunos resultados preliminares sobre el aprendizaje del estudiante y algunos efectos en la enseñanza en el ámbito del ctf. En esencia, los resultados preliminares nos dan indicios de la necesidad de repensar nuestro entendimiento sobre cierto tipo de transformaciones de funciones a la luz del ctf.

El estudiante aprende con el ctf a "identificar" coeficientes en la función, a "reconocer" patrones de comportamientos gráficos, a "buscar" tendencias en los comportamientos y a establecer "relaciones" entre funciones. Y algunos efectos en la enseñanza encontrados hasta ahora están en los signos "+" y "=", los cuales son transformados a nociones de tendencia (no de aproximación) en relación con los comportamientos.

Cuatro registros hemos identificado en los procedimientos de los estudiantes. El algebraico: algebraicamente, la clase de transformaciones que el ctf ha restringido o ubicado puede ser descrita por y=Af(ax+b)+B variando A, a, b y B o como un conjunto de transformaciones lineales sobre x y sobre y. El gráfico: gráficamente, "y=Af(ax+b)+B variando A, a, b y B" se puede describir como un conjunto de traslaciones verticales y horizontales, alargamientos verticales y horizontales. El registro de tabulación: tabular las descripciones de las transformaciones incluye el uso de sumar o restar una constante a todas las entradas en una columna, multiplicar o dividir las entradas de las columnas por una constante o multiplicar por –

1. Y un registro sobre la coordinación de las acciones en las diferentes representaciones: se requiere la coordinación de transformaciones visuales, operaciones numéricas y manipulación de símbolos algebraicos.

Por último, queremos llamar la atención en los antecedentes de los estudiantes. Todos los estudiantes con los que hemos trabajado han sido previamente introducidos a las manipulaciones algebraicas a través de cursos enfocados a la solución y simplificación de ecuaciones, factorizando, trabajando con identidades trigonométricas y trazando gráficas de las ecuaciones. Por ejemplo, las relaciones más comunes que el estudiante hace del comportamiento asintótico son las funciones racionales para después buscar indeterminaciones de las formas infinito/infinito o real/infinito. Mientras que a través de la herramienta del ctf el comportamiento asintótico está relacionado con la variación de los coeficientes de la transformación. De ahí la importancia de haber encontrado las categorías anteriormente mencionadas (identificar, reconocer, buscar y relacionar) y de proponernos a explicar sus entendimientos y relacionarlos con el aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Alanís, J. A. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del Cálculo*, tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Albert, A. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior. Un acercamiento sistémico*, tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Arellano, A., Cordero F. y Oktaç, A. (1997). Entendimiento de los comportamientos asintóticos de una función. En R. Farfán (Ed.), *Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 339). Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán, México.

Cantoral, R. (1990). *Desequilibrio y Equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas*, tesis doctoral, Sección de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Cantoral, R. (1992). Acerca de la intuición del rigor. Notas para una reflexión didáctica. En R. Cantoral, R. Farfán y C. Imaz (Eds.), *Publicaciones de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (Volumen 1, pp. 24-29). Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Cuernavaca, Morelos, México.

Confrey, J. y Costa, S. (1996). A Critique of the Selection of “Mathematical objects” as Central Metaphor for Advanced Mathematical Thinking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, volumen 1, No. 2, 139-168.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados. Un estudio del discurso matemático escolar*, tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (1997). Entendimiento de los conceptos del Análisis y Cálculo. Las construcciones mentales como un marco epistemológico. En R. Farfán (Ed.), *Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (conferencia especial por invitación, pp. 27). Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán, México.

Cordero, F., Hernández, D. y Oktaç, A. (1997). Acerca del entendimiento de las relaciones entre función y su derivada. En R. Farfán (Ed.), *Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 340). Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán, México.

Cordero, F. y Solís, M. (1997a). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo*. Serie Cuadernos de Didáctica, Grupo Editorial Iberoamérica, 2a. edición, 79 pp.

Cordero, F. y Solís, M. (1997b). Actos visuales y analíticos en el entendimiento de la ecuaciones diferenciales lineales. En R. Farfán (Ed.), *Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 135). Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán, México.

Cordero, F. y Solís, M. (1995). Las representaciones gráficas como elementos de didáctica del Cálculo. En R. Farfán (Ed.), Publicaciones de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa

(Volumen 2, pp. 431-436). La Habana, Ministerio de Educación, Cuba: Cinvestav-IPN.
Dubinsky, E., y Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). Washington, D. C., Mathematical Association of America.
Farfán, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Piaget, J. y García, R. (1984). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI editores, segunda edición.
Pulido, R. (1998). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar*, tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.
Sierpinska, A. (1996). Whither mathematics education?. *Conferencia plenaria en ICME-8*. Sevilla, España.
Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Studies in Mathematics Education Series: 2, The Flamer Press.
Vergnaud, G. (1990). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. En P. Nesher and J. Kilpatrick. (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). Cambridge: University Press.