

Estrategias de visualización en el cálculo de varias variables

Pedro Vicente Esteban Duarte

Helmuth Trefftz Gómez

Juliana Restrepo Toro



Alexander Calder, *Glaciar con pétalos de colores*, fragmento, tapiz de Aubusson, 1971.

Resumen

Estrategias de visualización en el cálculo de varias variables

Para las matemáticas, los ambientes virtuales y de realidad aumentada permiten visualizar objetos creados a partir de ecuaciones con los que es posible interactuar de manera semejante a como lo haría un estudiante con modelos reales. El presente artículo sustenta que, de esta forma, se potencian los procesos de aprendizaje de los conceptos estudiados, integrándolos con el entorno y, por tanto, dotándolos de sentido empírico en la experiencia cotidiana de los alumnos.

Résumé

Stratégies de visualisation dans le calcul de plusieurs variables

Pour les mathématiques, les atmosphères virtuelles et de réalité accrue permettent de visualiser des objets créés à partir d'équations avec lesquels il serait possible d'interagir de manière semblable à ce qui ferait un étudiant avec des modèles réels. Cet article affirme que, de cette manière, on renforce les processus d'apprentissage des concepts étudiés, en les intégrant avec l'environnement et, par conséquent, en leur dotant de sens empirique dans l'expérience quotidienne des élèves.

Abstract

Visualization strategies in the calculus of variables

For mathematics, the virtual environments and the enhanced reality allow to visualize objects created from equations with which it is possible to interact in a similar way as a student would using real models. This article supports that, this way, the learning processes of the studied concepts, integrating them with the environment, and endowing them with an empiric sense of every-day experience of students, are enhanced.

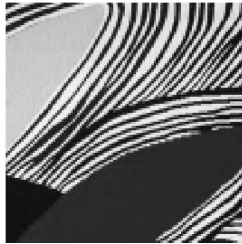
Palabras clave

Enseñanza de las matemáticas, realidad virtual, realidad aumentada.

Teaching of math, virtual reality, enhanced reality.

Estrategias de visualización en el cálculo de varias variables*

Pedro Vicente Esteban Duarte**
Helmuth Trefftz Gómez***
Juliana Restrepo Toro****



Introducción

Las estructuras geométricas están presentes en todos los objetos de la naturaleza, siendo ésta una de las características que ayudan a reconocerlos y a distinguirlos. Las clasificaciones de los objetos que parten de la observación están asociadas con su forma, color y tamaño. Partiendo de la capacidad de observación y abstracción, las matemáticas han ayudado a sintetizar y a estructurar de manera formal fenómenos de la naturaleza.

En los cursos de matemáticas se enfatizan los aspectos numéricos, algebraicos, simbólicos y lógicos; pero, en general, poco se motiva a los alumnos a razonar a partir de los aspectos gráficos que surgen de los conceptos mismos. En investigaciones recientes se pudo comprobar

que alumnos que habían aprobado cursos de cálculo en los que se enfatizó la manipulación de fórmulas, no reconocieron los conceptos estudiados cuando se los presentaron a partir de gráficos y de problemas prácticos relacionados con su entorno (Vinner, 1991: 65-79). Es decir, las experiencias de aprendizaje en las que intervengan representaciones visuales asociadas a los conceptos matemáticos son necesarias para integrarlos con aplicaciones relacionadas con su medio ambiente.

Durante el desarrollo histórico de las ciencias, los aspectos gráficos se han utilizado para ilustrar los conceptos matemáticos y geométricos. Las gráficas utilizadas sirven de motivación a los alumnos para realizar un primer acercamiento, como lo afirma Guzmán:

* El artículo es resultado de la investigación "Realidad Aumentada en la enseñanza de la matemática", financiada por Colciencias (C.C.C. 013-102) y la Universidad Eafit.

** Profesor de la Escuela de Ciencias y Humanidades de la Universidad Eafit.
E-mail: pesteban@eafit.edu.co.

*** Profesor de la Escuela de Ingenierías de la Universidad Eafit.
E-mail: htrefftz@eafit.edu.co

**** Asesora de Proyectos Pedagógicos.
E-mail: jrestre@eafit.edu.co

[...] las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geoméricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo (Guzmán, 1996: 16).

El cálculo es un lenguaje que permite la integración de diferentes formas de representar conceptos matemáticos que están relacionados con la realidad, como el de razón de cambio, desde el cual se define la velocidad, la aceleración, la pendiente de la recta tangente a una curva plana en uno de sus puntos, entre otros. Por tanto, para los alumnos, el cálculo debe ayudarles, por un lado, a desarrollar la capacidad de ver y de transformar lo observado en ecuaciones con un significado propio; y por otro, a partir de formulas que se pueden representar gráficamente, a relacionarlas con fenómenos de la naturaleza; de esta forma, la visualización potencia la comprensión de conceptos matemáticos.

Una gran variedad de fenómenos tienen una ley de formación que se puede describir a partir del cálculo, como lo afirman Zimmermann y Cunningham:

Si la matemática es la ciencia de los patrones, es natural tratar de encontrar las más efectivas formas de visualización de esos patrones y usar la visualización creativamente como una herramienta para el entendimiento. Esta es la esencia de la visualización matemática (1991: 35).

La visualización, "entendida como la capacidad para llevar a cabo operaciones mentales específicas con sensaciones o imágenes" (Font, 2001: 32), no es un nuevo descubrimiento; a través de la historia, siempre se ha recurrido a ella para explicar a otros, o así mismos, los conceptos propios de la matemática o de la geometría. En la actualidad, con los avances

en computación, es posible diseñar experiencias de aprendizaje significativas que permitan comprender los conceptos matemáticos con ayuda de la visualización

A los alumnos se les debe propiciar experiencias de aprendizaje que les posibilite visualizar los conceptos matemáticos en diferentes sistemas de representación (Duval, 2004: 15-29), como son los verbales, gráficos, formales, entre otros, y que, a la vez, puedan trasladar la información de un sistema a otro. Codificar y decodificar información simbólica, numérica o gráfica fortalece la integración entre los conceptos, mejorando la comprensión y la capacidad de relacionar el cálculo con su entorno y con otras materias de su plan curricular.

En este artículo se muestra la importancia de la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de conceptos del cálculo en varias variables. Las experiencias de visualización en las que participaron los alumnos fueron diseñadas utilizando herramientas de *realidad virtual* y *realidad aumentada*, para promover la comprensión de conceptos estudiados en el desarrollo del curso.

Los ambientes virtuales y la visualización

La virtualidad es lo que se "siente como más cercano e influyente en nuestro quehacer, dándose para ella tantas interpretaciones como campos en los que se utiliza" (Sangra, 2001: 120). En la virtualidad, lo simbólico adquiere una mayor relevancia, ya que los interlocutores deben acordar de antemano el significado de los símbolos que utilizan y la definición e interpretación de lo nuevo que aparezca dentro del contexto en el cual trabajan. Por esto, en diversos ambientes se entiende que "la virtualidad es la utilización de las tecnologías digitales en conjunto con lo semiótico" (127). Esta definición lleva la visión de virtualidad a todo lo que tiene que ver con el uso de las tecnologías digitales y a la interpretación de los símbolos que crean quienes las utilizan, am-

pliando las interpretaciones que se le pueden atribuir a éstos a partir de la visualización.

Los ambientes virtuales permiten interactuar con objetos creados en forma sintética para construir *nuevas realidades*, en las que se le asignan diversas interpretaciones a los símbolos existentes en nuestro entorno. Por otro lado, generan nuevos símbolos, que enriquecen la visión del mundo, potenciando nuevas formas de pensamiento y creando, a la vez, nuevas tecnologías que permiten *visualizar* los conceptos de diferentes formas, enriqueciendo la imaginación y fortaleciendo las redes conceptuales de los alumnos expuestos a procesos de enseñanza y de aprendizaje en los que se requiere fortalecer los procesos de razonamiento a partir de la visualización.

Lo virtual ayuda a crear espacios para la educación, permitiendo que, desde etapas muy tempranas, la formación de los alumnos puedan entrar en contacto con las tecnologías que utilizarán en su desarrollo profesional y que en un futuro ayudarán a transformar. Por esto, la educación va más allá de la simple transmisión de conocimientos; debe acercarse a los educandos a los desarrollos tecnológicos, permitiendo una formación en contexto, para que puedan tener una visión a largo plazo. Lo anterior lleva implícito un reto: que lo virtual no sobrepase lo real. La educación debe estar al servicio de las ideas y del hombre.

Con la virtualidad nacieron nuevas ramas de la ciencia y se crearon "espacios" que, de una u otra forma, son parte de la cotidianidad, como la *realidad virtual*, en la que las situaciones que se pueden crear no están en el mismo lugar del usuario; en contraste, las de *realidad aumentada* le adicionan a la realidad imágenes virtuales que enriquecen el entorno. De acuerdo con Azuma:

[...] es una variación de los ambientes virtuales, o realidad virtual como se conoce más comúnmente. La realidad virtual sumerge al usuario dentro de un ambiente sintético (generado por la computadora). Mientras está inmerso, el usuario no puede ver el mundo real alrededor de él. En contraste, la realidad aumentada le permite al usuario ver el mundo real, con objetos virtuales superpuestos sobre el mundo real, o compuestos con él (1997: 356).

En este sentido, la realidad aumentada adiciona información al campo visual, permitiendo que el alumno compare en tiempo real objetos virtuales con objetos reales (véase figura 1). Para la enseñanza del cálculo se pueden generar imágenes tridimensionales (Álvarez *et al.*, 2003: 86-92), con las que el profesor y los alumnos pueden interactuar.

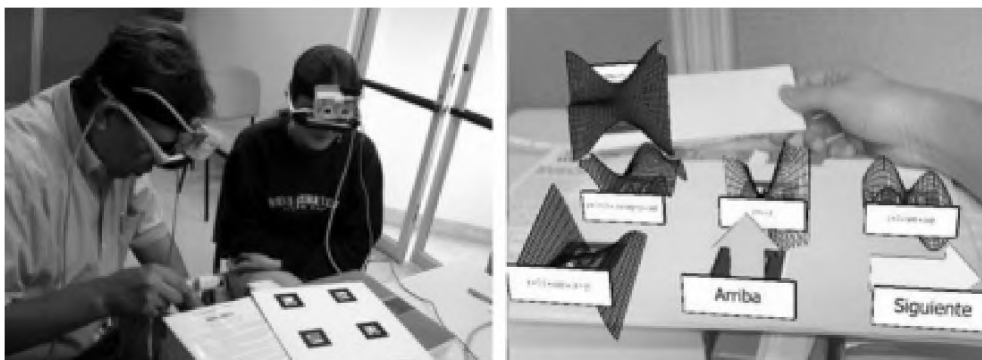


Figura 1. Profesor y alumno interactuando en un ambiente de realidad aumentada. La cámara capta imágenes de la realidad y las gafas integran los objetos reales con las gráficas generadas en el computador

La utilización de los espacios virtuales en la educación ha comenzado a influir en las propuestas metodológicas en la enseñanza de las matemáticas, propiciando cambios imprevisibles hasta hace poco tiempo. En la actualidad, los cursos que se apoyan en la virtualidad requieren de equipos de trabajo interdisciplinarios para diseñar las experiencias de aprendizaje que serán expuestas a los alumnos: pedagogos, ingenieros, diseñadores de *software*, matemáticos, entre otros. El uso de estas nuevas herramientas en la educación contribuye al trabajo interdisciplinario, beneficiando de este modo a los alumnos, ya que desde sus primeras etapas de aprendizaje adquieren distintas visiones de un concepto.

Los ambientes virtuales ayudan a promover la interacción entre los alumnos que construyen un mismo conocimiento, permitiendo múltiples formas de comunicación, de visualización y de aprendizaje, creando nuevas dimensiones cognitivas que amplían sus capacidades mentales.

La visualización en la construcción de conceptos del cálculo

Los desarrollos tecnológicos han permitido el diseño de herramientas muy especializadas para el aprendizaje de conceptos matemáticos específicos, facilitando que el estudiante pueda tener distintas maneras de acercarse a un mismo concepto. La utilización de la tecnología debe ayudar a modificar las estructuras de pensamiento de los alumnos. De acuerdo con Artigue *et al.*:

[...] la tecnología no es la solución a los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, hay indicios de que ella se convertirá paulatinamente en un agente catalizador del proceso de cambio en la educación matemática. Gracias a la posibilidad que ofrece de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples sistemas de representación

dentro de esquemas interactivos, la tecnología abre espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel) en las que él puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración. Estas experiencias matemáticas serán fructíferas siempre que se tenga en cuenta la complejidad del contenido matemático a enseñar, la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas y el papel fundamental que deben jugar los diseñadores de currículo y los profesores en el diseño e implantación de situaciones didácticas que, teniendo en cuenta las dificultades y las necesidades de los estudiantes, aprovechen la tecnología para crear espacios en los que el estudiante pueda construir un conocimiento matemático más amplio y más potente. El principal aporte de la tecnología consiste en que la interacción entre ella, el profesor y el estudiante está cambiando la visión que los actores tienen del contenido matemático y del proceso didáctico (1998: 61).

Para la enseñanza del cálculo existen, en la actualidad, diversos asistentes matemáticos que le permiten al alumno múltiples interacciones: por un lado, le ayudan a solucionar en forma rápida muchos ejercicios, y por otro, le sirven de laboratorios en los que, mediante ensayo y error, pueden explorar nuevas soluciones a los problemas planteados o construir nuevos problemas a partir de los ya existentes.

Para explicar el papel de la visualización y la simbolización como herramientas mediadoras en el proceso de abstracción y, más en general, en los procesos cognitivos movilizados por los objetos matemáticos, Tall (Tall, 1997: 289-325) profundiza y desarrolla los tres tipos de sistemas de representación propuestos por Bruner, y los adapta para el cálculo infinitesimal de la siguiente manera:

- *Representaciones enactivas*. Son acciones humanas que dan la sensación de cambio, velocidad o aceleración.
- *Representaciones numéricas y simbólicas*. Son representaciones que pueden ser manipuladas manualmente o con computadora (incluyendo la posibilidad de ser programadas por los estudiantes).
- *Representaciones visuales*. Son las que pueden ser producidas manualmente de manera aproximada o, más precisamente, con ordenadores dinámicos.
- *Representaciones formales*. Son representaciones que dependen de definiciones y pruebas.

Cada uno de los tipos de representaciones propuestas por Tall se puede generar, manualmente o en ambientes virtuales, para obtener diferentes formas de visualización. Al diseñar experiencias de aprendizaje en las que se tienen en cuenta varios tipos de representaciones intervienen, de una manera u otra, los sentidos, de modo que se ayuda al alumno a comprender los conceptos expuestos en forma activa.

Las investigaciones realizadas en este campo dan cuenta de las dificultades que los estudiantes experimentan al enfrentarse a las definiciones formales, de las resistencias a visualizar, de las dificultades de pasar de una forma de representación a otra, de la resistencia que encuentra el profesor para llevar al aula propuestas novedosas para exponer los conceptos matemáticos. Ejemplos de estas situaciones son los estudios realizados para el concepto *continuidad puntual* (Campillo, 1999), la visualización de la recta tangente a través del haz de secantes (Esteban, 2000), la convergencia de series positivas (Jaramillo, 2000), la extensión del modelo de Van Hiele al análisis matemático (Llorens, 1994), la convergencia de sucesiones (Navarro, 2002), la modelización del espacio y del tiempo (De la Torre, 2000), la exploración

del concepto *tangente* en cursos de cálculo (Tall *et al.*, 1981), entre otros. Sin embargo, cada día son más los profesores de matemáticas que se preocupan por utilizar los ambientes virtuales para encontrar nuevas formas para que los alumnos tengan un acercamiento intuitivo a los conceptos del cálculo, preparándolos para el tratamiento formal que se requiere en el ámbito educativo, y que los ayude a construir bases sólidas que les permita avanzar a través de su currículo. En general, los conceptos matemáticos tienen variadas formas de representación; un objetivo de la educación matemática es ayudarles a comprenderlos desde diferentes formas de representación.

Los conceptos matemáticos son las ideas más importantes sobre las cuales se construye el edificio matemático. La comprensión y el razonamiento que surja a partir de ellos debe ser el objetivo fundamental de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En el cálculo se tienen conceptos como los de *función, clases de funciones, límites, continuidad, derivada, integral, serie, funciones de varias variables, derivadas parciales, integrales múltiples*, entre otros, que deben ser adquiridos e integrados por el alumno a su estructura cognitiva. De acuerdo con Vinner (Tall y Vinner, 1981: 151-169), para la enseñanza y el aprendizaje de un concepto, éste se puede dividir en dos partes, a saber:

- *Concepto imagen*. Son todas aquellas ideas evocadas cuando se hace referencia a un concepto matemático en particular. Estas ideas han sido formadas a lo largo de la vida de un sujeto, e influyen positiva o negativamente en la adquisición y manejo del verdadero concepto matemático. Las palabras involucradas para referirse a un concepto matemático tienen diferentes significados en distintos contextos.
- *Concepto definición*. Es la definición formal descrita en los textos de matemáticas, en la cual las palabras tienen significados específicos referidos a ese contexto particular.

Un alumno puede razonar a partir de su *concepto imagen* (en este caso, sus conclusiones no siempre son verdaderas), o apelar al *concepto definición*, pudiendo darse el caso que no reconozca el concepto estudiado en muchas situaciones en las cuales se expone. Decimos que un alumno no ha comprendido un concepto matemático hasta que no haya integrado el concepto imagen y el concepto definición; para ello, deben buscarse experiencias de aprendizaje pertinentes que le permita lograr las relaciones adecuadas para que integre a su estructura cognitiva el concepto matemático estudiado. Una forma de integrar el concepto imagen y el concepto definición es a partir de la visualización de las experiencias de aprendizaje que se diseñan en ambientes virtuales colaborativos, en los que interactúan los alumnos entre sí y con el profesor.

La visualización como elemento integrador entre el concepto imagen y el concepto definición

En general, cuando los profesores hablan de la visualización como una técnica para ayudar a sus alumnos a comprender un área específica de la matemática, se refieren a todos los aspectos que tiene que ver con las gráficas como ilustración de un concepto o de un ejercicio hecho en clase o resuelto en el libro de texto. Pero la visualización es mucho más que la capacidad de interpretar los conceptos del cálculo a partir de las gráficas; evocar las imágenes mentales asociadas a los conceptos estudiados permite la integración con los preconceptos y los prerrequisitos que se les exigen a los estudiantes al momento de comenzar un tema nuevo.

Los *preconceptos* son todas las "ideas" formadas por un alumno a lo largo de su vida sobre diversos temas, y que influyen a favor o en contra del entendimiento de los conceptos matemáticos. Para todo docente de matemáticas, es claro que los términos que se definen en

cálculo no significan lo mismo que en el lenguaje natural. Los términos de *límite*, *continuidad*, *tangente*, *derivada*, entre otros, en el lenguaje natural tienen muchas acepciones que no le aportan claridad al estudio del cálculo; por el contrario, dificultan su asimilación en el sentido matemático, no permitiendo la resolución de ejercicios o la construcción de redes conceptuales que potencien una verdadera integración entre los distintos conceptos estudiados.

- La virtualidad posibilita la construcción de experiencias de aprendizaje significativas en las que el alumno es el protagonista y, por tanto, puede ampliar e integrar sus redes de conocimiento. Estas experiencias se pueden construir a partir de *software* especializado, como *Derive*, *MuPad*, *Matemática*, *MatLab*, en páginas de internet en las cuales se encuentran *applets* (programas cortos que hacen tareas específicas), diseñados para graficar una función específica y para experiencias a la medida, en las que a partir de *software* especializado se pueden conjugar varias herramientas para construir ambientes de realidad aumentada.

La utilización de una metodología adecuada y de la visualización que se obtiene con *software* comercial o diseñado para situaciones concretas, le ayuda a los alumnos a integrar los conceptos del cálculo y comprenderlos de manera que los puedan relacionar unos con otros y con situaciones reales. En los ambientes virtuales se pueden diseñar experiencias de aprendizaje que ayuden a comprender un concepto desde diferentes puntos de vista.

La visualización de conceptos del cálculo de varias variables con la ayuda de la realidad aumentada

El diseño de experiencias de aprendizaje con herramientas de realidad aumentada contri-

buye a la visualización de conceptos a los que no es posible construirles representaciones adecuadas en ambientes virtuales. Las gráficas que se estudian son funciones de dos y tres variables, que forman superficies con las que los alumnos pueden interactuar y comparar con objetos reales. Las propiedades que se pueden estudiar son puntos de corte con los ejes coordenados; los máximos, mínimos y los puntos de silla; derivadas direccionales y gradientes; integrales dobles y triples; los conceptos *densidad*, *volumen* y *áreas de superficies*; las integrales de línea, entre otros.

A continuación se presentan los objetivos del diseño de algunas de las experiencias de aprendizaje a las que fueron expuestos los alumnos de un curso de cálculo en varias variables. El ambiente en el que se trabajó cada uno de los conceptos fue el de realidad aumentada.

1. *Relacionar cambio promedio, derivadas parciales y derivadas direccionales con conceptos aplicados a otras áreas del conocimiento. Comprender el concepto cambio promedio para funciones de varias variables es fundamental para definir el concepto derivadas parciales y direccionales y su significado en relación con las aplicaciones en otras ramas del conocimiento, en especial en la física, la mecánica y la economía. Los objetivos que se*

tuvieron en cuenta para diseñar la experiencia con la herramienta fueron los siguientes (véase figura 2):

- Graficar una superficie y algunas de sus trazas sobre los planos $x = k$ y $y = k$. Sobre la traza obtenida, interpretar el cambio promedio de la función con respecto a cada una de las variables. Interpretar la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos de una traza como la razón promedio de cambio.
- Graficar una superficie y trazas sobre los planos $x = k$ y $y = k$. Sobre la traza obtenida, interpretar el cambio promedio de la función respecto de cada una de las variables, encontrando la ecuación de la recta secante que pasa por un punto fijo y puntos cada vez más cercanos al punto fijo dado.
- Graficar una superficie y trazas sobre los planos $x = k$, y $y = k$. Sobre la traza obtenida, interpretar el cambio instantáneo de la función con respecto a cada una de las variables x e y como la derivada parcial con respecto a cada una de las variables.

Algunas de las apreciaciones de los alumnos se presentan a continuación:

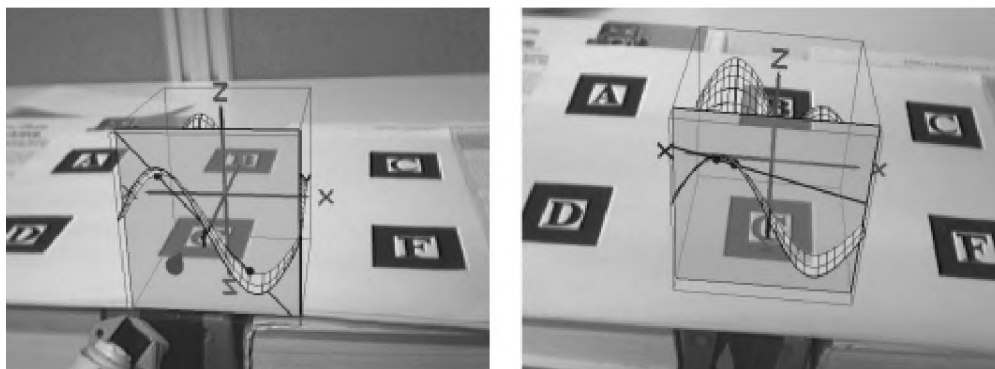


Figura 2. Gráficas para visualizar el cambio promedio y las derivadas direccionales. Se muestra una superficie, la intersección con un plano, una recta secante sobre la traza formada y una recta tangente en un punto.

"Me causó la impresión de llenar un vacío, ya que estaba manejando los conceptos de memoria y a través de la herramienta logre comprenderlos".

"Definitivamente la visualización de las gráficas de las superficies con la herramienta de realidad aumentada permite comprender y afianzar los conceptos que se ven en clase y que se estudian en el libro".

"Facilidad de poder entender de manera sistemática conceptos que me había tocado aprender mecánicamente".

"Me causó impresión la forma tan clara en la que se puede ver la diferencia entre la recta tangente y la recta secante con las que se define el cambio promedio y las derivadas direccionales".

Comprender el significado de la derivada parcial a partir de las gráficas que se obtienen con ayuda de la herramienta, le facilita a los alumnos relacionarlo con conceptos

propios de la física y de otras materias que forman parte de su currículo.

2. *Relacionar conceptos de la física con gráficas de superficies.* En el cálculo en varias variables se estudia el concepto *densidad* [$\rho(x, y)$] de un sólido, en el que se presentan ejemplos y ejercicios para los cuales la densidad es variable (véase figura 3). En muchos de ellos, la densidad varía de acuerdo con una fórmula de una, dos o tres variables. En muchos casos, imaginarse cómo puede estar construido un sólido, para el que la densidad es variable en cada uno de sus puntos, no siempre es fácil. Con ayuda de la herramienta de realidad aumentada se logró diseñar una actividad en la cual se integra un sólido y distintas funciones de densidad, que se podían visualizar de varias maneras:

- Mover la función de densidad "dentro" del sólido y observar los cambios de tonalidad en los colores.
- Visualizar el sólido y la función de densidad al mismo tiempo.

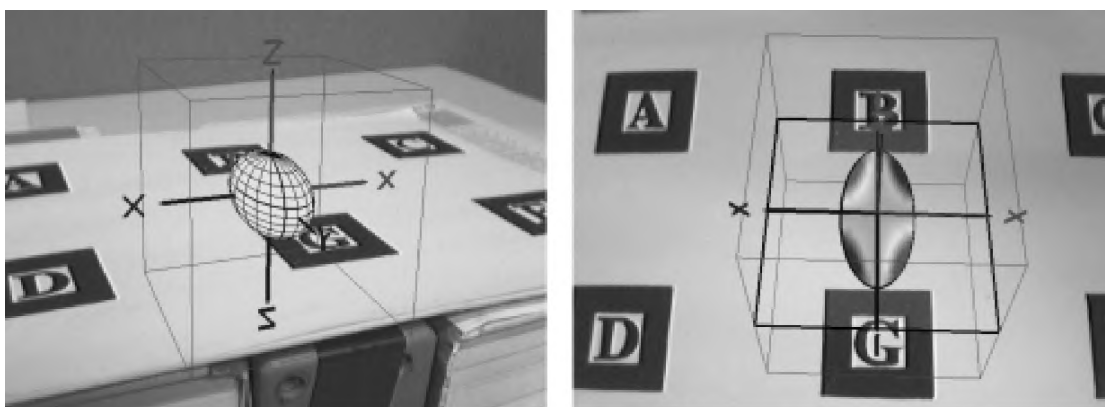


Figura 3. Visualización del concepto *densidad*. Se muestra un elipsoide y la variación de la densidad en forma de hipérbolas.

Las siguientes son algunas de las impresiones que manifestaron los alumnos al finalizar la experiencia:

"Me llamó mucho la atención cómo vemos la densidad para diferentes sólidos con diferentes funciones de densidad. Además, esta herramienta presenta una gran ventaja, al poder mostrar con colores donde hay mayor densidad".

"Me impresionó ver cómo se puede medir dónde hay más densidad en un sólido y cómo se puede sacar la función de densidad a partir de lo que se ve con la herramienta de realidad aumentada".

"Con esta herramienta se hace más fácil el entendimiento del cálculo. Para el tema que estamos viendo, se puede hacer más entendible el concepto de densidad".

El estudio del concepto *densidad* con ayuda de la herramienta le ayudó a los alumnos a reestructurar y modificar una de las ideas que se tienen preconcebidas: los objetos que utilizamos a diario están diseñados con materiales que tienen la misma densidad en cualquiera de sus puntos.

Conclusiones

Los programas de cálculo siguen una estructura secuencial –tema 1, tema 2.–, y de esta forma se presentan en clase a los alumnos. Esta metodología de trabajo no permite la integración de los diversos temas y conceptos tratados a lo largo de los cursos, y los alumnos ven en modo aislado los conceptos estudiados. La visualización que se obtiene con el uso de ambientes virtuales, permite integrar los conocimientos previos con los que se les presentan a lo largo del curso de cálculo en varias variables.

Por otro lado, el empleo de la visualización y de la virtualidad en el proceso enseñanza y

aprendizaje de conceptos matemáticos, conlleva al uso de los medios tecnológicos que se encuentran en el medio, o contribuye a que se puedan desarrollar otros a la medida. Por tanto, el éxito o el fracaso de la enseñanza de los conceptos del cálculo depende, en buena parte, del uso que los profesores hagan de estas herramientas.

En nuestra experiencia, los alumnos dieron sus opiniones acerca de la utilización de la herramienta de realidad aumentada. Se presentan algunas de sus conclusiones:

"En este curso estudiamos la superficie cuadrática paraboloidal hiperbólico, que además de una inusual belleza, presenta resistencia, estabilidad, continuidad formal (sin quiebres) y estructural, propiedades que fueron de gran ayuda para la realización de los productos trabajados".

"Gracias a la herramienta de realidad aumentada se comprendió, de manera más rápida y clara, la forma que presentan las superficies, reforzando así los conocimientos adquiridos en clase".

"Para nuestras carreras es de gran ayuda tener conocimiento de las superficies cuadráticas, ya que de ellas podemos sacar diferentes ideas para nuestros diseños".

"Encontramos que, en nuestro medio, incluyendo la naturaleza, se utilizan las formas de las superficies estudiadas en diversas aplicaciones. El hombre, como la naturaleza, sacan el mayor provecho de las propiedades y características que éstas nos ofrecen".

"Con éste trabajo logramos ver el cálculo desde una perspectiva más práctica y útil en nuestra vida cotidiana".

"Tuvimos la oportunidad de aplicar los conceptos estudiados en el salón de clase, por fuera de éste, de una forma divertida y creativa".

"Con este trabajo logramos integrar conceptos y conocimientos aprendidos en diferentes asignaturas".

Como se puede deducir de estas apreciaciones, los estudiantes relacionaron el cálculo con múltiples aplicaciones a la ingeniería, modelando y diseñando objetos a partir de funciones sencillas. También se relacionó el cálculo con la optimización para diseñar productos que requieren de diferentes mecanismos y estructuras. Uno de los fines de la Ingeniería de Diseño es elaborar productos y servicios que satisfagan necesidades de los seres humanos y para ello se requiere aplicar los conceptos estudiados en un curso de cálculo de varias variables.

La interacción alumno-tecnología-mundo real, en la que se da una manipulación consciente de los objetos, y se utiliza la tecnología para modelar y construir nuevos objetos, o modificar los existentes, lleva a postular una nueva categoría de la visualización: la *visualización dinámica*.

El uso adecuado de la tecnología junto con diseños metodológicos apropiados permite que los alumnos se motiven a aprender y comprender los conceptos matemáticos. Este hecho es muy importante, pues el desarrollo científico del país requiere de personas que comprendan y apliquen las ciencias básicas.

Referencias bibliográficas

Álvarez, N.; Jaramillo, N.; Restrepo, J.; Trefftz, H. y Esteban, P, 2003, "Augmented Reality for Teaching Multi-Variate Calculus", en: Vilas, A. M.; González, J. A. M. y González, J. M., eds., *Advances in Technology-Based Education: Toward a Knowledge-Based Society. II International Conference on Multimedia ICT's in Education*, vol. I, Badajoz, España, Junta de Extremadura, Consejería de Education.

Artigue, M.; Douday, R. y Moreno, L., 1998, *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un*

esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, Bogotá, Universidad de los Andes.

Azuma, R., 1997, "A Survey of Augmented Reality", *Presence: Teleoperators and Virtual Environments*, vol. 6, núm. 4, pp. 355 - 385.

Campillo, P, 1999, "La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele", Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, España.

De la Torre, A., 2000, *La modelización del espacio y del tiempo: su estudio vía el modelo de Van Hiele*, Valencia, España, Universidad Politécnica de Valencia.

Duval, R., 2004, *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, Calí, Universidad del Valle.

Esteban, P., 2000, "Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de Van Hiele", Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, España.

Font, V, 2001, "Representation in Mathematics Education", *Philosophy of Mathematics Education Journal*, núm. 14, pp. 25-67.

Guzmán, M. de, 1996, *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático. Elementos básicos del Análisis*, Madrid, Pirámide.

Jaramillo, C., 2000, *La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele*, Valencia, España, Universidad Politécnica de Valencia.

Llorens, J., 1994, *Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local*, Valencia, España, Universidad Politécnica de Valencia.

Navarro, M., 2002, *Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo educativo de Van Hiele*

y su correspondiente propuesta metodológica, Sevilla, España, Universidad de Sevilla.

Tall, D., 1997, *Functions and Calculus*, Dordrecht, Kluwer A. P pp. 289 - 325.

Tall, D. y Vinner, S., 1981, "Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, núm. 2, pp. 151-169.

Sangra, A., 2001, "Enseñar y aprender en la virtualidad", *Educar*, núm. 28, pp. 117-131.

Vinner, S., 1991, *The Rol of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics*, vol.11. *Advanced Mathematical Thinking*, Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

Zimmermann, W. y Cunningham, S., 1991, *Visualization in teaching and learning mathematics*, MAA Notes.

Referencia

Esteban Duarte, Pedro Vicente; Trefftz Gómez, Helmuth y Restrepo Toro, Juliana, "Estrategias de visualización en el cálculo de varias variables", *Revista Educación y Pedagogía*, Medellín, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, vol. XVIII, núm. 45, (mayo-agosto), 2006, pp. 119-131.

Original recibido: mayo 2006

Aceptado: julio 2006

Se autoriza la reproducción del artículo citando la fuente y los créditos de los autores.