UNA EXPERIENCIA DIDACTICA DE BUSQUEDA DE ESTRATEGIAS PARA LA RESOLUCION DE UN PROBLEMA ARITMETICO

José Mª Núñez Espallargas
Escuela Universitaria del Profesorado de E. G. B.
Universidad de Barcelona.

1. Planteamiento de problema

SE exponen en este trabajo los hechos más destacados en torno a una experiencia de carácter didáctico llevada a cabo con alumnos de la Escuela de Magisterio de Barcelona. La experiencia tenía originariamente un triple objetivo. En primer lugar quería servir de elemento motivador para introducir el estudio de las propiedades de las operaciones con números enteros. El segundo objetivo era el de observar la capacidad de los alumnos para formular modelos resolutivos originales. Y finalmente, hacer un modesto intento por fomentar la creatividad de los futuros maestros en el campo de la matemática.

El problema elegido para la experiencia me vino sugerido por un conocido acertijo que fue propuesto al joven Einstein cuando éste apenas contaba seis años de edad (1). Consiste en presentar las nueve cifras distintas de cero, ordenadas de menor a mayor,

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

y pedir que se intercalen entre ellas los signos + o – de tal modo que el resultado de las operaciones sea igual a 100.

---

(1) Véase PEDERSEN, J. J. – ARMBRUSTER, F. O.: *A New Twist. Developing Arithmetic Skills through Problem Solving.* London. Addisson-Wesley. 1979. Pág. 2.

En la primera sesión se propuso este problema a los alumnos y se pidió que lo resolviesen individualmente. Como era lógico, la primera acción llevada a cabo por los sujetos fue la de sumar simplemente todas las cifras y obtener en consecuencia, tan sólo el valor 45. Tras unos instantes de perplejidad la mayoría de los alumnos comprendieron que era necesario realizar agrupaciones de cifras para poder resolver el problema. El hallar entonces, una solución fue ya sólo cuestión de tiempo. Como se les había indicado al comienzo de la prueba que debían anotar todos sus intentos resolutivos sobre una hoja de papel y ésta se recogió una vez concluida la clase, pudieron ser analizados los procesos seguidos por cada alumno. Este análisis me permitió detectar una serie de errores o deformaciones en el aprendizaje del cálculo en algunos individuos del grupo de alumnos sometidos a la prueba y, de este modo, se favoreció su posterior corrección (2).

2. La búsqueda de una estrategia resolutiva

Pero este problema une a su sencillez formal un aspecto de interés esencial, que es el de admitir varias soluciones diferentes y todas ellas perfectamente válidas, lo cual motivó que fuera elegido para realizar la experiencia.

En una segunda sesión, y estando ya familiarizados los alumnos con el problema, se les propuso que intentaran hallar todas las soluciones posibles al mismo. En esta ocasión, no sólo se permitió, sino que se favoreció expresamente una dinámica grupal y siguiendo una metodología heurística, el profesor actuaba como coordinador estimulando con sus indicaciones los intentos más fructíferos y subrayando con sus observaciones las incorrecciones o los caminos sin salida (3). De este modo, se pretendía observar la capacidad de los alumnos para desarrollar por si mismos una estrategia resolutiva, tarea a la que no estaban acostumbrados, pues su distinta procedencia, así como sus estudios dispares hacían de ellos una población bastante hetereogénea, no caracterizada precisamente por unas aptitudes especiales en el campo de la matemática y habitual a aplicar a los problemas los métodos resolutivos

(2) Pueden verse algunas consecuencias de la aplicación de este problema en la detección de deficiencias en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en niños de E.G.B. en la comunicación "Los juegos aritméticos en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo" presentada por el autor en las *IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.* Santa Cruz de Tenerife. 1986. Págs. 243-247.

(3) Véase POLYA, G.: *Cómo plantear y resolver problemas. México, Trillas, 1979.*

aprendidos en un libro de una manera memorística. El problema en cuestión exigía crear una estrategia resolutiva específica no siendo, en general, válidos los modelos usuales conocidos por los alumnos.

Inicialmente la mayoría de los alumnos procedieron por simple tanteo en la búsqueda de soluciones. Fue necesario que transcurriera un cierto tiempo y que se hallaran algunas para que se impusiera un cierto criterio metodológico, que fue, precisamente, el estudio comparativo de las soluciones que se habían encontrado. Dos hechos que llamaron entonces su atención fueron el observar que algunas soluciones incluían más de un agrupamiento y el que estos agrupamientos estaban constituidos por dos o tres cifras. Tras constatar estos hechos se acordó proceder de un modo sitemático analizando las distintas posibilidades de formar agrupamiento con las nueve cifras. Se elaboraron a partir de ese momento diversos diagramas, que reflejaban básicamente el esquema siguiente:

1 agrupamiento (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 cifras)

2 agrapamientos (2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 2-7)

(3-3, 3-4, 3-5, 3-6)

(4-4 4-5)

3 agrupamientos (2-2-2, 2-2-3, 2-2-4, 2-2-5, 2-3-3, 2-3-4)

(3-3-3)

4 agrupamientos (2-2-2-2, 2-2-2-3)

De todas estas posibilidades teóricas fácilmente se podría rechazar algunas de ellas; por ejemplo, las situaciones derivadas de algún agrupamiento de 4 ó más cifras proporcionarían cantidades demasiado alejadas de 100 para que pudieran tomarse en cuenta.

De estas consideraciones y recordando que las cifras aparecen en orden creciente y que este orden no se puede alterar, se pudo simplificar el diagrama dejando solamente aquellas situaciones que podían conducir a soluciones reales del problema:

1 agrupamiento (2, 3)

2 agrupamientos (2-2, 2-3)

3 agrupamientos (2-2-2, 2-2-3)

4 agrupamientos (2-2-2-2, 2-2-2-3)

Una vez determinadas las combinaciones de agrupamientos capaces de proporcionar soluciones al problema se optó por estudiarlas una a una. Se comenzó con el caso más simple, es decir, con la situación derivada de suponer un solo agrupamiento de dos cifras. Las posibilidades de agrupar las nueve cifras eran: emparejar la primera cifra con la segunda, la segunda con la tercera, y así, hasta formar una pareja con la penúltima y la última cifras.

12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89

Llegados a este punto, pregunté a los alumnos si sería posible encontar algún criterio que permitiera eliminar alguna de estas posibilidades al igual que antes se había hecho con el número de agrupamientos. Se sometieron entonces a consideración varios criterios que parecían deducirse de las soluciones ya obtenidas. La mayoría de los cuales fueron siendo descartados por diversas razones, pero uno fue aceptando por su fácil aplicación. Resultó ser un criterio derivado del estudio de la paridad de las cifras. Se observó que al intervenir en el juego únicamente la suma o la diferencia de las nueve primeras cifras, cinco de las cuales son impares y las cuatro restantes pares, el resultado de estas operaciones, sin considerar de momento ningún agrupamiento, iba a proporcionar siempre un número impar; luego existía otro argumento a favor de la necesidad de realizar agrupamientos de cifras para alcanzar el valor de 100 además del simplemente cuantitativo. La introducción de una agrupamiento de dos cifras, forzosamente una de ellas par y la otra impar, pues, recordémoslo una vez más, debe preservarse la ordenación de menor a mayor inicial, sólo puede conducir a la obtención de un número par, en nuestro caso el 100, en aquellos casos en los que la segunda cifra del agrupamiento es también par, ya que en esta situación el cómputo total de números impares pasa de 5 a 4. En resumen, se pueden eliminar las parejas 23, 45, 67 y 89, quedando sólo como posibles engendradoras de soluciones las parejas:

12, 34, 56 y 78

Algunos alumnos propusieron casi inmediatamente descartar las tres primeras posibilidades, pues la suma de las cifras no agrupadas en cada uno de los casos está lejos de proporcionar la cantidad que necesita el agrupamiento para alcanzar 100. Luego, en definitiva, el único agrupamiento de dos cifras que puede proporcionar soluciones válidas al problema es 78.

Para determinar las soluciones que correspondían a este agrupamiento un grupo de alumnos propuso una estrategia que ya habían ensayado anteriormente cuando se había iniciado esta fase de búsqueda de las soluciones del problema. Consistía en sumar todas las cifras no agrupadas, en este caso,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 9 = 30$$

y teniendo en cuenta que el complementario de 78 para 100 es 22, se podía deducir que habría tantas soluciones como modos de escribir con estas cifras no agrupadas la cantidad –4, ya que, de este modo 100 = 78 + 22 = 78 + + (26 – 4). Siendo las formas de escribir –4 solo dos (–4 y –1–3) son también sólo dos las soluciones al problema derivadas de considerar únicamente el agrupamiento 78:

$$1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100$$

$$-1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100$$

A continuación, se analizaron las posibilidades de que se diera un agrupamiento de tres cifras. Pronto se llegó a la conclusión de que la única posibilidad que cabía considerar era la del agrupamiento constituido por las tres primeras cifras, 123, pues cualquier otro agrupamiento de tres cifras proporcionaría números mucho mayores que 100. Este agrupamiento cumplía además el criterio de la paridad, pues siendo un número impar que contiene las cifras impares 1 y 3 dejaba otras tres cifras impares, que sumadas o restadas con el agrupamiento y el resto de cifras pares proporcionaban siempre una cantidad par. Faltaba, por tanto, buscar las soluciones derivadas de esta situación. Aquí, todos se percataron inmediatamente de que podía aplicarse el modelo establecido en el caso anterior. Es decir, se suman primero las cifras no agrupadas (4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39), y como 100 = 123 – 23 = 123 + (– 31 + 8), las únicas posibles soluciones corresponderían a las distintas maneras de escribir con las cifras no agrupadas la cantidad — 31. Como esto último sólo es posible hacerlo de una sola manera (– 4 – 5 – 6 – 7 – 9) se puede afirmar entonces que sólo hay una solución:

$$123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100$$

Con las tres soluciones obtenidas se habían agotado las posibilidades derivadas de considerar un solo agrupamiento; se podían ahora abordar las situaciones que implicaban introducir dos agrupamientos.

Se había establecido en el diagrama de posibles agrupamientos que un doble agrupamiento sólo se podía dar en dos casos: dos agrupamientos de dos cifras cada uno y un agrupamiento de dos cifras combinado con otro de tres cifras.

En el primer caso y sometiendo a análisis la paridad de las distintas combinaciones se descartaron aquellos dobles agrupamientos de dos cifras de igual paridad, pues al estar constituida forzasamente cada pareja por una cifra par y otra impar, quedaban sin agrupar tres cifras impares, lo que obligaba necesariamente a que uno de los agrupamientos fuera un número par y el otro impar. De lo que se desprende que sólo pueden ser viables las siguientes dobles parejas:

12 y 45	12 y 67	12 y 89
23 y 56	23 y 78	
34 y 67	34 y 89	
45 y 78		
56 y 89		

De las alternativas que recogen como uno de los agrupamientos el 12 sólo ofrecen verdaderas posibilidades de proporcionar soluciones las que contemplan como segundo agrupamiento el 67 y el 89; la doble pareja 12 y 45 debe descartarse por que, aún contando con las cifras no agrupadas, su suma está lejos de proporcionar el valor de 100 buscado. Fijándonos en la doble pareja 12 + 67 se aprecia que es 21 su complementario para 100 y siendo, además, la suma de las cifras restantes igual a 29, habrá tantas soluciones al problema como modos haya de escribir – 4 con las cifras no agrupadas; lo que inmediatamente nos conduce a esta única solución:

$$12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100$$

Por su parte, la suma de la doble pareja 12 + 89 da 101 y teniendo en cuenta que la suma de las cifras restantes es 25, fácilmente se comprende que esta situación proporcionará tantas soluciones como maneras haya de escribir – 13 con las cifras 3, 4, 5, 6 y 7:

$$12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89 = 100$$
$$12 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 89 = 100$$

La única solución que contiene los agrupamientos 23 y 56 deriva de los modos posibles de construir – 4 con las cifras 1, 4, 7, 8 y 9, y que evidentemente sólo es uno:

$$1 + 23 - 4 + 56 + 7 + 8 + 9 = 100$$

También tiene sólo una solución la posibilidad de agrupar 23 y 78, ya que en este caso se debe construir – 13 con las cifras 1, 4, 5, 6 y 9:

$$1 + 23 - 4 + 5 + 6 + 78 - 9 = 100$$

En los agrupamientos que aparezca el 34 debe descartarse la posibilidad de que forme pareja con 89, pues se obtendría al sumarlos un número excesivamente alto (o excesivamente bajo si se restaran), quedando solo la posibilidad de combinar 34 con 67 que proporcionará tantas soluciones como modos de escribir – 13 con las cifras 1, 2, 5, 8 y 9, es decir, sólo una:

$$1 + 2 + 34 - 5 + 67 - 8 + 9 = 100$$

Puesto que al sumar (o restar) 45 y 78 ó 56 y 89 se obtienen números demasiado grandes (o pequeños) no es viable alcanzar 100 restándoles (o sumándoles) las cifras no agrupadas y deben, por tanto, rechazarse como situaciones que pueden generar soluciones del problema.

Con estas seis nuevas soluciones se habían agotado las posibilidades derivadas de considerar dos agrupamientos.

Se sometieron entonces a discusión las situaciones que contuvieran tres agrupamientos y, tras analizar la paridad en cada caso y las distintas alternativas de escribir con las cifras no agrupadas las cantidades que faltaran o sobraran para alcanzar el valor 100, se pudieron deducir dos nuevas soluciones al problema:

$$123 + 45 - 67 + 8 - 9 = 100$$
$$123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100$$

Finalmente quedaba por considerar la posibilidad de que se presentasen cuatro agrupamientos, posibilidad que convenientemente estudiada proporcionó la duodécima y última solución:

$$123 - 45 - 67 + 89 = 100$$

3. Establecimiento de un modelo resolutivo

Todo este proceso que acabo de esquematizar, fue realizado íntegramente por el grupo de alumnos con los que, a pesar de la heterogeneidad de aptitudes y actitudes, se siguieron las técnicas de la dinámica de grupos, procurando siempre que mis intervenciones, como profesor, fueran únicamente en el sentido de señalar las alternativas erróneas o para incentivar aquellas direcciones que podían ser más fructíferas, intentando motivar a todos los componentes para la realización de un trabajo de equipo (4).

---

(4) Sobre estas técnicas consúltese BANY, M.A. - JOHNSON, L.V.: *La dinámica de grupo en la educación.* Madrid. Aguilar. 1970.

Para fijar mejor y hacer patentes las fases o etapas seguidas les pedí que hicieran al final un esquema del proceso resolutivo. Distinguieron entonces tres niveles:

1) Establecimiento de un plan con el trazado de un diagrama que contuviera las distintas posibilidades de número y tipo de agrupamientos.

2) Análisis y acotación del problema eliminando aquellos agrupamientos que no pueden proporcionar soluciones, bien por constituir valores demasiado alejados de 100, o bien por el criterio de la conservación de la paridad.

3) Determinación de las soluciones al aplicar la regla siguiente: Tantas soluciones como modos haya de escribir con las cifras que no forman parte de ningún agrupamiento la cantidad negativa (100 – a – b) / 2, donde "a" representa el valor de los agrupamientos más próximo a 100 y "b" la suma de las cifras no agrupadas.

Este proceso no es, desde luego, la única estrategia resolutiva aplicable para hallar todas las soluciones del problema, ni tampoco, posiblemente, la más corta, pero tenía para los sujetos de la experiencia la importancia de haber sido "descubierta" por ellos mismos. Este descubrimiento de un modelo resolutivo es consecuencia del proceso de "matematización" desarrollado a partir de los intentos previos llevados a cabo por los alumnos dentro de una actividad simplemente de tanteo o, mejor dicho, de ensayo y error. Resultó muy instructivo para todos el constatar que el modelo resolutivo diseñado se había obtenido a partir de la formulación de una serie de conjeturas sugeridas por la observación de soluciones particulares, es decir, por vía inductiva (5).

También debemos señalar como otros aspectos positivos de esta parte de la experiencia, que surgieron a lo largo de la misma frecuentes ocasiones de comentar diversas cuestiones metodológicas y didácticas de la teoría de números, así como, a través del trabajo en equipo se fomentó la participación de aquellos alumnos menos predispuestos por la materia.

4. Una modificación del problema

Tras haber resuelto y analizado el problema planteado inicialmente propuse a los alumnos una pequeña variante, aparentemente de carácter trivial, que consistía en presentar invertido el orden de colocación de las nueve cifras:

---

(5) Altamente sugerente es la obra de POLYA, G.: *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid. Tecnos. 1966.

9 8 7 6 5 4 3 2 1

y les sugerí que abordaran ahora esta nueva situación.

Algunos precipitadamente afirmaron que eran válidas las mismas soluciones que se habían obtenido en el problema original. Pero, al intentar corroborar esa suposición, pronto se percataron de su error, pues al agrupar las cifras aparecían números distintos. Una vez que se hubo comprendido que, a pesar de la aparente similitud existente entre ambos problemas, las soluciones debían ser distintas, se procedió a su búsqueda. Desde luego, la estrategia resolutiva podía ser una adaptación del modelo anterior, pues los elementos esenciales que la determinaban no se habían alterado.

El mismo diagrama indicando número y tipo de agrupamientos posibles era válido. Se comenzó, por tanto, directamente a considerar las situaciones que se derivarían de formar un solo agrupamiento de dos cifras. Por el criterio de la paridad para obtener la misma que el número 100 se debían rechazar aquellos agrupamientos que fueran impares, es decir, se tomaron sólo como viables los agrupamientos 98, 76, 54 y 32; de los cuales, los dos últimos no podían proporcionar soluciones al problema por ser valores excesivamente pequeños. Considerando, entonces, la pareja 98 y sabiendo que la suma de las cifras no agrupadas es 28, fácilmente se deducía por la regla práctica ya conocida que habrían tantas soluciones como maneras hubiera de escribir −13 con las cifras 7, 6, 5, 4, 3, 2 y 1:

$$98 + 7 + 6 - 5 - 4 - 3 + 2 - 1 = 100$$
$$98 - 7 - 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 100$$
$$98 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 - 1 = 100$$
$$98 - 7 + 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 100$$
$$98 - 7 + 6 - 5 + 4 + 3 + 2 - 1 = 100$$
$$98 + 7 - 6 - 5 + 4 + 3 - 2 + 1 = 100$$
$$98 - 7 + 6 + 5 + 4 - 3 - 2 - 1 = 100$$
$$98 + 7 - 6 + 5 - 4 - 3 + 2 + 1 = 100$$

Con la pareja 76 no aparecen tantas soluciones, pues la suma de las cifras no agrupadas es 32, lo que implica que habrá el mismo número de soluciones que modos de construir −4 con las cifras 9, 8, 5, 4, 3, 2 y 1, es decir, sólo dos:

$$9 + 8 + 76 + 5 - 4 + 3 + 2 + 1 = 100$$
$$9 + 8 + 76 + 5 + 4 - 3 + 2 - 1 = 100$$

Como cualquier agrupamiento que podamos considerar de tres cifras proporciona cantidades tan elevadas que descartan inmediatamente cualquier posible solución derivada de esta situación, el estudio de los casos constituidos por un solo agrupamiento quedaba concluido.

El análisis de la paridad de los casos de dos agrupamientos constituidos por dos cifras cada uno, indicó que, al igual que había ocurrido en el problema inicial, sólo podían proporcionar soluciones cuando ambos agrupamientos eran de distinta paridad:

98 y 65 98 y 43 98 y 21
87 y 54 87 y 32
76 y 43 76 y 21
65 y 32
54 y 21

Estudiando, entonces, las distintas posibilidades siguiendo la metodología desarrollada ya para el primer problema se obtuvieron las soluciones:

$$98 - 7 - 6 - 5 - 4 + 3 + 21 = 100$$
$$-9 - 8 + 76 - 5 + 43 + 2 + 1 = 100$$
$$9 - 8 + 76 - 5 + 4 + 3 + 21 = 100$$
$$-9 + 8 + 76 + 5 - 4 + 3 + 21 = 100$$
$$9 - 8 + 7 + 65 - 4 + 32 - 1 = 100$$
$$-9 + 8 + 7 + 65 - 4 + 32 + 1 = 100$$

No hay soluciones para los casos de dos agrupamientos de tres cifras cada uno o de uno de dos cifras combinado con otro de tres; y en general, no engendran soluciones aquellos casos que incluyen algún agrupamiento de tres cifras, pues todos ellos proporcionan valores demasiado alejados de 100.

Estudiando, finalmente, los casos de tres agrupamientos y de cuatro agrupamientos se pudieron hallar las dos últimas soluciones al problema propuesto:

$$9 - 8 + 76 + 54 - 32 + 1 = 100$$
$$98 - 76 + 54 + 3 + 21 = 100$$

5. Creación de variantes

Se dio aún un paso más en esta experiencia didáctica proponiendo a los alumnos que fueran ellos mismos los que elaboraran variantes del problema planteado inicialmente. Después de haber explorado la capacidad de los alumnos para utilizar su pensamiento lógico en la búsqueda de estrategias en la resolución de un problema, queríamos conocer el alcance de su pensamiento lateral a través de la variedad y originalidad de las variantes propuestas. Aunque la función del pensamiento lógico es el inicio y el desarrollo de modelos de conceptos y la del pensamiento lateral la reestructuración de esos modelos y la cración de otros nuevos, ambos modos de pensamiento son complementarios y ambos deben ser potenciados en la educación (6). Los resultados de esta actividad fueron muy positivos, pues gran parte del curso se mostró interesado y participativo, siendo varios los alumnos que manifestaron buenas dotes creativas y, entre estos, había algunos que no tenían especial preparación ni altas calificaciones en matemáticas, hecho este último que está de acuerdo con las observaciones realizadas por diversos autores (7).

Comentaremos sucintamente algunas de las variantes sugeridas por los alumnos.

Las primeras variantes que se propusieron consistían en obtener, manteniendo las mismas condiciones del problema inicial, números distintos de 100. Pregunte si esta alteración modificaría el modelo resolutivo que habían elaborado y, en caso afirmativo, de que modo. Fácilmente se observó que no debían hacerse cambios esenciales en la estrategia resolutiva, sólo algunos de detalle, así, por ejemplo, la paridad del número a construir determinaba las agrupaciones que debían rechazarse o aceptarse siguiendo el criterio de la paridad. El caso del 0 era especialmente interesante, pues bastaba fijarse en algunas de las soluciones:

$$\begin{aligned}
12 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 - 9 &= 0 \\
-12 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 + 9 &= 0 \\
1 - 2 - 34 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 &= 0 \\
-1 + 2 + 34 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 &= 0 \\
1 + 2 - 34 - 56 + 78 + 9 &= 0 \\
-1 - 2 + 34 + 56 - 78 - 9 &= 0
\end{aligned}$$

para apreciar que se presentaban en grupos de a dos, de manera que a cada solución distinta le correspondía otra invirtiendo los signos + por los – y viceversa. Este "descubrimiento" condujo inmediatamente a la evidencia de que la obtención de números negativos no constituía una verdadera variante, pues para hallar sus soluciones bastaría con intercambiar los + por los – y los – por los + en las soluciones del número positivo asociado.

(6) Véase BONO, E. de: *El pensamiento lateral. Manual de creatividad.* Barcelona. Programa Editorial. 1974.

(7) Consúltese WALLACH, M - KOGAN, N.: "Nueva aprehensión del problema de la distinción inteligencia-creatividad" en *La Creatividad* (dirigido por A. BEAUDOT). Madrid. Narcea. 1980. pp. 50-64.

Otros alumnos propusieron como variante, no el hallar todas las soluciones correspondientes a un determinado valor, si no el determinar una única solución para cada uno de los números comprendidos dentro de un intervalo. Como ejemplo se consideró el intervalo de 90 a 110:

$$12 + 3 + 45 + 6 + 7 + 8 + 9 = 90$$
$$1 + 23 - 4 - 5 - 6 - 7 + 89 = 91$$
$$12 + 3 - 4 + 5 - 6 - 7 + 89 = 92$$
$$-12 + 34 - 5 - 6 - 7 + 89 = 93$$
$$12 + 34 + 56 - 7 + 8 - 9 = 94$$
$$-12 + 34 + 5 + 67 - 8 + 9 = 95$$
$$1 + 23 + 4 + 5 - 6 + 78 - 9 = 96$$
$$12 + 3 - 4 + 5 - 6 + 78 + 9 = 97$$
$$-1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 98$$
$$1 + 23 + 4 - 5 - 6 - 7 + 89 = 99$$
$$1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100$$
$$12 + 34 + 5 + 67 - 8 - 9 = 101$$
$$-1 + 23 + 4 - 5 - 6 + 78 + 9 = 102$$
$$12 - 34 + 56 + 78 - 9 = 103$$
$$12 + 34 - 5 - 6 + 78 - 9 = 104$$
$$1 + 23 - 4 - 5 - 6 + 7 + 89 = 105$$
$$-1 + 23 + 4 + 5 + 6 + 78 - 9 = 106$$
$$1 + 23 + 4 - 5 + 67 + 8 + 9 = 107$$
$$12 + 34 + 56 + 7 + 8 - 9 = 108$$
$$12 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 109$$
$$12 + 34 + 56 + 7 - 8 + 9 = 110$$

Si bien estas soluciones fueron halladas básicamente por ensayo y error es una cuestión abierta la obtención de una estrategia resolutiva para esta variante.

Tratándose de alumnos de una Escuela de Magisterio es lógico que se propusieran variantes útiles para ser introducidas en los ciclos de la E.G.B.. Así una simplificación del problema consiste en tomar un número menor de cifras, por ejemplo, las cinco primeras y tratar de obtener con ellas los diez primeros múltiplos de 5:

$$1 - 2 - 3 + 4 + 5 = 5 \qquad 5 + 4 - 3 - 2 + 1 = 5$$
$$1 + 2 + 3 + 4 - 5 = 5 \qquad -5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 5$$
$$-1 + 2 + 3 - 4 + 5 = 5 \qquad 5 - 4 + 3 + 2 - 1 = 5$$

$$12 - 3 - 4 + 5 = 10$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \qquad 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$$
$$1 + 23 - 4 - 5 = 15 \qquad -5 - 4 + 3 + 21 = 15$$

$$1 + 23 - 4 - 5 = 25 \qquad 5 - 4 + 3 + 21 = 25$$

$$-1 + 2 + 34 - 5 = 30 \qquad 54 - 3 - 21 = 30$$
$$-12 - 3 + 45 = 30 \qquad -5 + 4 + 32 - 1 = 30$$

$$-5 + 43 - 2 - 1 = 35$$

$$-1 + 2 + 34 + 5 = 40 \qquad 5 + 4 + 32 - 1 = 40$$

$$1 + 2 - 3 + 45 = 45 \qquad 5 + 43 - 2 - 1 = 45$$
$$-1 - 2 + 3 + 45 = 45$$

$$54 - 3 - 2 + 1 = 50$$

No tardaron en aparecer variantes que contenían modificaciones más esenciales del problema inicial. Se propuso en este sentido, dividir el grupo de nueve cifras en dos, uno formado por las cinco primeras (1, 2, 3, 4 y 5) y el otro por las cuatro últimas (6, 7, 8 y 9) y, colocándolas en los dos miembros de una ecuación, intentar igualarlos empleando sólo los signos + y –:

$$12 + 3 - 4 + 5 = 6 - 7 + 8 + 9$$

Pero es fácil ver que esta variante no es tal, ya que corresponde a uno de los casos contemplados anteriormente: el de obtener 0 con las nueve cifras.

Si constituye, en cambio, una nueva variante el tratar de obtener un número empleando las nueve cifras ordenadas, pero escribiendo primero las impares y luego las pares. Por ejemplo:

$$97 - 5 + 3 + 1 + 2 + 4 + 6 - 8 = 100$$
$$9 + 75 + 3 + 1 + 2 - 4 + 6 + 8 = 100$$
$$9 + 7 + 5 + 3 + 12 - 4 + 68 = 100$$

El análisis de esta variante no resulta difícil adaptando el modelo resolutivo desarrollado para el problema inicial, fijándose especialmente en el estudio de la paridad.

Para no extendernos más nos limitaremos a apuntar que se propusieron variantes que incluían modificaciones más radicales, entre ellas estaban las que suprimían, por ejemplo la ordenación de las cifras o, las que permitían la introducción de paréntesis y otras operaciones además de la adicción a y la sustracción. Cada una de estas variantes obligaba también a modificar esencialmente el modelo resolutivo, con lo que de este modo se perfilaba, acotándolo, su campo de aplicación, pero, en igual medida, se ampliaban los recursos disponibles por parte de los alumnos para plantear y resolver satisfactoriamente estas nuevas situaciones.

Con esta experiencia que he expuesto sucintamente quiero mostrar que no es necesario recurrir a complejos artificios, si no que con problemas tan aparentemente simples como el propuesto, es posible en el aula alcanzar pequeñas "invenciones" que contribuyan a desarrollar el pensamiento lógico del alumno así como fomentar su creatividad en el campo de la matemática.