HISTORIA DE LAS IDEAS ALGEBRAICAS: COMPONENTES Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

LUIS PUIG

INVESTIGAR EN LA HISTORIA PARA LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Para que la historia pueda usarse con provecho en la investigación en didáctica de las matemáticas, la situación óptima es que la propia investigación histórica se realice teniendo en cuenta las preguntas que están presentes en la investigación en didáctica de las matemáticas y no sólo las preguntas propias de la investigación histórica. Filloy propuso hace tiempo con esta intención un programa ideal de uso de la historia en la investigación en didáctica de las matemáticas que se caracteriza entre otras cosas por un vaivén entre el análisis de textos históricos y el de las actuaciones de alumnos en los sistemas educativos. Ese vaivén está ejemplificado en Filloy y Rojano (1984), en el que se expone cómo, en el trabajo del que se cuenta en ese artículo, se plantea un tipo de lectura de los textos clásicos de la historia de las matemáticas en el que la historia de las ideas matemáticas se analiza con el fin de elaborar secuencias didácticas que tengan en cuenta lo determinado teóricamente en tal análisis, secuencias didácticas que luego se usan en los actuales sistemas educativos de forma controlada. Éste es, sin embargo, sólo un primer movimiento, ya que, una vez analizados los comportamientos de los alumnos en esos procesos de enseñanza controlada, se puede volver al análisis de la historia de las ideas con los resultados prácticos obtenidos con los alumnos, leyendo de nuevo los textos ahora en busca de hechos a los que se les pueda dar nuevos sentidos a partir de los hechos observados en el comportamiento de los alumnos –y así sucesivamente[1].

[1] En una ocasión nos atrevimos a escribir que, conducida por este vaivén, «la Historia de las Ideas Algebraicas se ha revelado como un elemento indispensable para adentrarse en el conocimiento de ciertos aspectos del devenir de los sistemas simbólicos dentro del conocimiento y esto, a su vez, en un formidable elemento de análisis teórico para las Ciencias de la Cognición» (Filloy y Puig, 1993, pág. I).

EL MÉTODO CARTESIANO COMO PARADIGMA DE LO ALGEBRAICO

Para poder comparar las escrituras de las ecuaciones que representan los problemas verbales en distintos textos históricos de forma que esa comparación traiga a colación lo que es pertinente para la didáctica, una buena estrategia es tomar como referencia lo que se hace en el método cartesiano, que es el método algebraico por excelencia y que puede considerarse como el canon de los métodos que se enseñan tradicionalmente en los sistemas escolares.

La razón de llamar cartesiano a ese método es que una parte de las *Regulæ ad directionem ingeni (Reglas para la dirección del espíritu)* de Descartes[2] puede interpretarse como el examen de la naturaleza del trabajo de traducción de un problema aritmético-algebraico de enunciado verbal al sistema matemático de signos (SMS) del álgebra y su solución en ese SMS. Así lo entendió Polya, quien en el capítulo «El patrón cartesiano» de su libro *Mathematical Discovery*, reescribió las reglas cartesianas pertinentes de tal forma que se pudieran ver como pautas de resolución de problemas que usan el SMS del álgebra. La paráfrasis de Polya de las reglas de Descartes es la siguiente:

> (1) En primer lugar, comprender bien el problema, luego convertirlo en la determinación de cierto número de cantidades desconocidas. (Reglas XIII a XVI[3]) [...]

[2] La edición canónica de las obras de Descartes es la de Charles Adam y Paul Tannery, *Œuvres de Descartes*, en cuyo tomo X está recogido el original latino de las reglas. Estas *Regulae ad directionem ingeni* no se publicaron en vida de Descartes, apareciendo impresas por primera vez en una recopilación de inéditos hecha en Holanda en 1701, bajo el título de *Opuscula posthuma physica et mathematica*. La primera traducción francesa está contenida en el tomo undécimo de la edición de Victor Cousin, *Œuvres de Descartes*, que se publicó en 1826. En las notas subsiguientes citaré de la traducción editada por Cousin y, en alguna ocasión, de la edición latina de 1701.

[3] Aunque Polya diga que con esta frase parafrasea cuatro de las reglas de Descartes, en realidad la regla XIII contiene todo lo que parafrasea: «Quand nous comprenons parfaitement une question, il faut la dégager de toute conception superflue, la réduire au plus simple, la subdiviser le plus possible au moyen de l'énumération». (Descartes, 1826, tomo undécimo, pág. 284). Anteriormente (regla VII) Descartes ya ha afirmado la importancia de la «énumération», que define como «la recherche attentive et exacte de tout ce qui a rapport à la question proposée. [...] cette recherche doit être telle que nous puissions conclure avec certitude que nous n'avons rien mis à tort» (Descartes, 1826, tomo undécimo, pág. 235). La regla XIV habla de la comprensión de «l'étendue réelle des corps» y dice que a ella se aplica también la regla anterior. Las reglas XV y XVI constituyen consejos para que el espíritu esté atento a lo esencial y la memoria no se fatigue con lo que, aun siendo necesario, no exige la atención del espíritu. Así, la regla XV recomienda trazar figuras para mantener el espíritu atento: «Souvent il est bon de tracer ces figures, et de les montrer aux sens externes, pour tenir plus facilement notre esprit attentif». (Descartes, 1826, tomo undécimo, pág. 313). La regla XVI, por su parte, recomienda no usar figuras enteras, sino simples anotaciones para descargar la memoria, cuando no se precise la atención del espíritu: «Quant à ce qui n'exige pas l'attention de l'esprit, quoique nécessaire pour la conclusion, il vaut mieux le designer par de courtes notes que par des figures entières. Par ce moyen la mémoire ne pourra nous faire défaut, et cependant la pensée ne sera pas distraite, pour le retenir, des autres opérations auxquelles elle est occupée». (Descartes, 1826, tomo undécimo, pág. 313)

(2) Examinar el problema de la manera más natural considerándolo como resuelto y presentando en un orden conveniente todas las relaciones que deben verificarse entre las incógnitas y los datos según la condición planteada. (Regla XVII[4])
[...]
(3) Separar una parte de la condición que permita expresar una misma cantidad de dos maneras diferentes y obtener así una ecuación entre las incógnitas. Descomponer eventualmente la condición en varias partes. Obtendréis así un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas. (Regla XIX[5])
[...]
(4) Transformar el sistema de ecuaciones en una única ecuación. (Regla XXI[6]) (Polya, 1966, págs. 27-28)

Desglosado en pasos ideales, es decir, los que recorrería el usuario competente, el método cartesiano comienza por una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.

El segundo paso consiste en la elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con letras

[4] El texto de Descartes de la regla XVII es bastante diferente de la paráfrasis de Polya: «Il faut parcourir directement la difficulté proposée, en faisant abstraction de ce que quelques uns de ses termes sont connus et les autres inconnus, et en suivant, par la marche véritable, la mutuelle dépendance des unes et des autres». (Descartes, 1826, tomo undécimo, pág. 319) «Proposta difficultas directe est percurrenda, abstrahendo ab eo quod quidam ejus termini sint cogniti, alii incogniti, & mutuam singulorum ab aliis dependentiam per veros discursus intuendo». (Descartes 1701, pág. 61). La paráfrasis de Polya no señala como sí lo hace el texto de Descartes el que se hace abstracción de que unos términos sean conocidos y otros desconocidos. Este tratar de la misma manera lo conocido y lo desconocido es precisamente uno de los rasgos fundamentales del carácter algebraico del método y el mismo Descartes señala que ahí radica lo fundamental de su método: «[...] tout l'art en ce lieu doit consister à pouvoir, en supposant connu ce qui ne l'est pas, nous munir d'un moyen facile et direct de recherche même dans les difficultés les plus embarrassées». (Descartes, 1826, tomo undécimo, pág. 320) «[...] totum huius loci artificium consistet in eo, quod ignota pro cognitis supponendo possimus facilem & directam quærendi viam nobis proponere, etiam in difficultatibus quantumcumque intricatis». (Descartes, 1701, págs. 61-62).

[5] En el caso de esta regla XIX, la paráfrasis de Polya contiene la formulación explícita de lo que en el método cartesiano da sentido a la construcción de la ecuación, la expresión de una cantidad de dos maneras diferentes. El texto de Descartes pone además el énfasis en que por ese procedimiento hay que construir el mismo número de ecuaciones que el de cantidades desconocidas que hemos supuesto conocidas [«terminos incognitos pro cognitis supponimus» (Descartes, 1701, pág. 66)]. Suponer conocido lo desconocido es la clave para la escritura de las expresiones algebraicas y para el desarrollo del análisis. «C'est par cette méthode qu'il faut chercher autant de grandeurs exprimées de deux manières différentes que nous supposons connus de termes inconnus, pour parcourir directement la difficulté; car, par ce moyen, nous aurons autant de comparaisons entre deux choses égales». (Descartes, 1826, tomo undécimo, pág. 328).

[6] «S'il y a plusieurs équations de cette espèce, il faudra les réduire toutes à une seule, savoir à celle dont les termes occuperont le plus petit nombre de degrés, dans la série des grandeurs en proportion continue, selon laquelle ces termes eux-mêmes doivent être disposés». (Descartes, 1826, tomo undécimo, pág. 329).

distintas) y el tercer paso consiste en representar otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica. Con el sistema matemático de signos del álgebra escolar actual esto se hace manteniendo la representación de cada cantidad por una letra distinta y teniendo el cuidado de que cada letra represente una cantidad distinta y combinando las letras con los signos para las operaciones y con los delimitadores, observando además ciertas reglas de sintaxis que expresan el orden en que se realizan las operaciones representadas en la expresión.

El cuarto paso consiste en el establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso), lo que se hace igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad.

Con ello termina la parte del método descrita en las *Regulæ*, que se corresponde con la traducción del enunciado del problema al SMS del álgebra. La continuación del método, que describe la resolución de la ecuación, hay que ir a buscarla en la Geometría que Descartes publicó como apéndice del *Discurso del Método*[7], que es donde de hecho desarrolla lo que él mismo llama «su álgebra»[8].

[7] Hay una buena traducción castellana del *Discurso del Método* que contiene los apéndices, en particular, la *Geometría* (Descartes, 1981) y una edición en facsímil del original francés de la *Geometría*, acompañada de su traducción al inglés (Descartes, 1925).

[8] En una carta a Mersenne de abril de 1637, que aparece en las páginas 294-301 del tomo sexto de la edición de Cousin, Descartes dice que las reglas de su álgebra las da a partir de la página 372 de la *Geometría*: «dans la page 372, qui est l'endroit où je commence à donner les règles de mon Algèbre» (Descartes, 1826, tomo sexto, pág. 300). En esa página lo que Descartes comienza a hacer, por usar por un momento la terminología de la fenomenología, es tomar las propias ecuaciones no ya como un medio de organización de fenómenos, sino, en un movimiento de matematización vertical, como un campo de objetos sometidos a exploración fenomenológica, que necesitan nuevos medios de organización para ello. A partir de la idea de que si a es una raíz de una ecuación $x - a$ divide al polinomio correspondiente, Descartes explora el número de raíces de las ecuaciones, el efecto que tiene sobre las raíces el cambiar x por $y - a$, etc. Cardano ya había estudiado el número de soluciones en algunos casos en el primer capítulo de su *Ars Magna* y, en el capítulo séptimo, el efecto que tiene sobre las raíces de una ecuación el cambiar alguno de los términos de miembro –lo que para Cardano suponía cambiar a otra forma canónica–, y Vieta le había dedicado el libro *De emendatione æquationum*, pero Descartes dice que él empieza su álgebra precisamente donde la dejó Vieta en ese libro. (*De emendatione æquationum* está incluido en la edición de Witmer que lleva el título *The Analytical Art*, pero que en realidad no contiene sólo ese libro de Vieta. Del *Ars Magna* de Cardano hay una edición y traducción inglesa también de Witmer. En ambos casos Witmer traduce no sólo del latín al inglés sino los sistemas de signos de Cardano y Vieta al SMS del álgebra actual, por lo que para poder indagar en cualquiera de las preguntas que expongo al final de este texto su traducción no sirve y es preciso recurrir al original latino o a una traducción más conforme. En mi caso, dispongo de una edición latina de 1663 de la *Opera Omnia* de Cardano, en cuyo cuarto volumen se encuentra el *Ars Magna*. En Puig (1994, 1998) muestro con ejemplos cómo lo que interesa de los textos históricos para la investigación didáctica difícilmente puede verse si los textos han sido traducidos al SMS actual. Afortunadamente hay historiadores cuyas traducciones son más conformes con las características de los SMS de los textos que traducen; un excelente ejemplo es Høyrup, que incluso expone las reglas de lo que él llama «conformal translation» –ver, por ejemplo, Høyrup, 2002).

En efecto, en la *Geometría* Descartes explica el método en un apartado titulado «Comment il faut venir aux Equations qui servent a resoudre les problemes»[9], en el que subraya también el tratamiento indiferente de lo conocido y lo desconocido, «sans considerer aucune difference entre ces lignes connuës, & inconnuës»[10], y la escritura de una ecuación a partir de la expresión de una cantidad de dos maneras diferentes, «iusques a ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une mesme quantité en deux façons: ce qui se nomme une Equation; car les termes de l'une de ces deux façons sont esgaux a ceux de l'autre»[11] (Descartes, 1925, pág. 300). Pero, a diferencia de lo que puede encontrarse en las *Regulæ* (que de hecho acaban con el mero enunciado de la última regla), Descartes continúa el desarrollo del método, explicando que una vez se tienen construidas todas las ecuaciones (ya sea tantas como letras, o menos y entonces el problema es indeterminado), hay que transformar las ecuaciones.

Descartes no expone aquí las reglas de transformación de las expresiones algebraicas, las da por conocidas, lo que sí que dice es la forma que ha de tener la ecuación canónica indicando que las transformaciones han de hacerse de modo que se obtenga al final una ecuación para «expliquer chascune de ces lignes inconnuës; & faire ainsi en les demeslant, qu'il n'en demeure qu'une seule, esgale a quelque autre, qui soit connuë, ou bien dont le quarré, ou le cube, ou le quarré du quarré, ou le sursolide, ou le quarré du cube, &c, soit egel a ce, qui se produist par l'addition ou soustraction de deux ou plusiers autres quantités, dont l'une soit connuë, & les autres soient composées de quelques moyennes proportionnelles entre l'unité, & ce quarré, ou cube, ou quarré de quarré, &c. multipliés par d'autres connuës. Ce que i'escris en cete sorte.

$$
\begin{gathered}
z \propto^{12} b \cdot \text{ou} \\
z^2 \propto - az + bb \cdot \text{ou} \\
z^3 \propto + az^2 + bbz - c^3 \cdot \text{ou} \\
z^4 \propto az^3 - c^3 z + d^4 \cdot \&\text{c}
\end{gathered}
$$

C'est a dire, z, que ie prens pour la quantité inconnuë, est esgalé a b, ou le quarré de z est esgal au quarré de b moins a multiplié par z [...]». (págs. 300-301)[13].

[9] «Sobre el procedimiento para acceder a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas» (Descartes, 1981, pág. 282).

[10] «[...] sin establecer distinción entre las líneas conocidas y las desconocidas» (Descartes, 1981, pág. 282).

[11] «[...] hasta que se idenfique un medio de expresar una misma cantidad de dos formas: esto es lo que se entiende por una ecuación, pues los términos de una de estas expresiones son iguales a los de la otra» (Descartes, 1981, pág. 282).

[12] El símbolo de Descartes para la igualdad no es éste, sino su simétrico. Escribo éste porque el otro no lo he encontrado en los tipos que tengo disponibles.

[13] «obtener un valor para cada una de las líneas desconocidas; debe procederse de este modo hasta que no exista sino una sola línea desconocida que sea igual a alguna línea conocida o cuyo cuadrado, cubo, cuadrado del cuadrado, supersólido, cuadrado del cubo, etc., sea igual a la suma o diferencia de dos o más cantidades, una de las cuales sea conocida y las otras estén compuestas de algunas medias proporcionales entre la unidad y ese cuadrado, cubo, cuadrado del cuadrado, etc., multiplicado por otras conocidas. Esto lo expreso del modo siguiente:

El método continúa, por tanto, transformando las expresiones algebraicas escritas y las ecuaciones resultantes para reducirlas a una forma canónica. Esto supone que previamente se haya determinado qué expresiones y qué ecuaciones se van a considerar canónicas, y que se disponga de un catálogo de todas las formas canónicas posibles y de procedimientos de solución para cada una de ellas.

Acabamos de mostrar cuáles son las que presenta concretamente Descartes, pero podríamos decir que todas ellas se reducen a una única forma canónica, que Descartes presenta desglosada por grados, ya que en todos los casos la forma es la misma. El desglose por grados está justificado por el hecho de que el procedimiento de solución es distinto para cada uno de los grados (o no hay, en función del grado). La forma que tiene la ecuación canónica, escrita de forma más general es:

$$x^n = a_{n-1}x^{n-1} \pm a_{n-2}x^{n-2} \pm \ldots \pm a_2x^2 \pm a_1x \pm a_0$$

Descartes iguala pues la potencia de mayor grado sin coeficiente (con lo que sólo hay una cantidad desconocida y ninguna conocida en el miembro izquierdo de la ecuación) con el resto del polinomio. Como en el resto del polinomio sigue habiendo cantidades desconocidas (las otras potencias de la incógnita) dice que lo que hay ahí es una cantidad conocida (el monomio de grado cero) y cantidades «compuestas de algunas medias proporcionales entre la unidad y ese cuadrado o cubo, etc.», expresión en la que está presente la idea que conduce a establecer los «grados», es decir, el hecho de que 1: x: x^2, etc.

Las expresiones algebraicas que se consideran canónicas son pues los polinomios (o, más generalmente, los elementos del cuerpo R[x, $1/x$]). Esto es así porque la reiteración de las cuatro operaciones aritméticas elementales conduce, cuando estas operaciones se realizan sobre cantidades desconocidas, a que todas las multiplicaciones (y divisiones) produzcan una cantidad *multiplicada por sí misma tantas veces* y multiplicada por un número determinado, es decir, produzcan un monomio, y la reiteración de adiciones (y substracciones), que sólo puede realizarse –y este hecho es crucial– entre monomios del mismo grado, produzca una suma (y resta) de monomios.

Desde que se dispone del SMS del álgebra escolar actual y de los números reales, esto conlleva que las reglas que permiten reducir cualquier ecuación a una forma canónica son las reglas del cálculo literal y la transposición de términos y que sólo haya una expresión canónica

---

$$z = b$$
$$\text{o } z^2 = -az + bb,$$
$$\text{o } z^3 = +az^2 + bbz - c^3,$$
$$\text{o } z^4 = az^3 - c^3z + d^4, \text{ etc.}$$

Es decir, z, tomada como la cantidad desconocida es igual a b; o el cuadrado de z es igual al cuadrado de b menos a multiplicado por z [...] (Descartes, 1981, pág. 282).

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

y una ecuación canónica

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

Acabamos de ver que en el caso de Descartes, las formas canónicas son casi éstas. Las diferencias son dos. En primer lugar, Descartes no establece como forma canónica un polinomio igualado a cero, sino el monomio de mayor grado igualado a la suma o resta de los demás. Igualar el polinomio a cero es algo que Descartes sólo hará 71 páginas después, cuando trate lo que él llama «su álgebra».

En segundo lugar, la forma canónica actual presenta los monomios unidos todos por el signo más, mientras que en la de Descartes no es así. Esto segundo es debido a que las letras que representan los coeficientes o las cantidades conocidas en el SMS de Descartes representan siempre números positivos y los monomios están unidos por las operaciones de adición o substracción que él concibe como dos operaciones distintas; sin embargo, en la forma canónica actual, la adición es la única operación que aparece (porque la substracción ha dejado de concebirse como una operación con entidad propia), gracias a que los coeficientes son cualquier número real. Incluso aunque Descartes admita la existencia de raíces negativas («falsas», en su terminología) y pueda escribir un monomio precedido de un signo menos aunque no esté restando a ningún otro monomio, como en $z^2 \propto - az + bb$, las letras en cuanto representan números conocidos (líneas) no pueden ser más que números «verdaderos», es decir, positivos. Es sintomático que cuando Descartes explica esa ecuación traduciéndola al lenguaje natural, cambia el orden para poder darle sentido y escribe: «le quarré de *z* est esgal au quarré de *b* moins *a* multiplié par *z*»[14].

Pero además en el texto de Descartes, aunque las formas canónicas se escriben ya como polinomios, todavía los monomios se nombran por su especie, con nombres que combinan las especies básicas cuadrado y cubo, en el caso de Descartes de forma multiplicativa[15]. Sin embargo, Descartes rompe con la vinculación geométrica de los nombres de las especies al mostrar al comienzo de la *Geometría* cómo el producto de una línea por una línea puede representarse como otra línea y no como una superficie con lo que las especies «cuadrado» o «cubo» ya dejan de ser heterogéneas.

[14] «el cuadrado de *z* es igual al cuadrado de *b* menos *a* multiplicado por *z*».

[15] La combinación multiplicativa de las especies proviene de las álgebras hindúes como la de Bhaskara y la siguieron la mayor parte de los matemáticos medievales del occidente cristiano. Como las potencias que permite construir son sólo las que tienen el 2 y el 3 como factores, hacen falta otros nombres para las demás: ésa es la razón por la que la quinta potencia, por ejemplo, tiene el nombre especial de *sursolidum* o primer relato. La combinación aditiva es la que usó Diofanto y tras él Abû Kâmil, al-Karâji, as-Samaw'al y la mayor parte de los matemáticos árabes, así como Leonardo de Pisa y Vieta. Una excepción entre los matemáticos árabes es Sinân ibn al-Fath, que también usa la combinación multiplicativa.

Este análisis de lo que supone el uso del método cartesiano con el SMS del álgebra escolar actual, lo hemos entrelazado con algunas observaciones procedentes del examen de textos de Descartes y, por tanto, ya procedentes del estudio de la historia de las ideas algebraicas. Esto lo hemos hecho así porque podemos decir que en Descartes está ya prácticamente constituido el SMS del álgebra actual. La indagación ahora de la historia de las ideas algebraicas puede hacerse desde la perspectiva que da este análisis.

En efecto, los polinomios son el final en esta historia de todo aquello a lo que se ha considerado en un momento u otro como formas canónicas, pero previamente ha sido necesario que apareciera la idea de búsqueda de formas canónicas. Para que esta idea pueda aparecer es necesario que la resolución de los problemas no se plantee con el único objetivo de obtener el resultado del problema concreto planteado, sino que haya establecida alguna forma de la fase cuarta de Polya[16], en la que el procedimiento de solución se analice y se generen problemas que pueden resolverse con el mismo procedimiento o con variantes o generalizaciones de ese procedimiento de solución. Pero además hace falta que se disponga de un SMS en el que el análisis de la solución pueda realizarse desprendiéndose de los números concretos con los que se hacen los cálculos, esto es, que de alguna manera se pueda representar los números con los que se calcula y los cálculos que se hacen con ellos como expresiones.

Entonces, la idea de búsqueda de formas canónicas se presenta por la necesidad de reducir el número de expresiones que se producen como resultado de la traducción de los problemas a algunas expresiones que ya se saben resolver. Las expresiones que se saben resolver se conciben entonces como «ecuaciones».

Esta idea de reducir a expresiones que ya se saben resolver conduce a dos proyectos además del de identificar a qué se va a llamar forma canónica: por un lado, a tener un catálogo de las expresiones que ya se sabe resolver, y, por otro, a desarrollar un cálculo con las expresiones que permita transformarlas en las que se sabe resolver.

Este proyecto adopta una forma que para nosotros es cada vez más algebraica, cuando el catálogo de expresiones que se sabe resolver deja de constituirse por acumulación de problemas resueltos, las expresiones correspondientes y las técnicas, procedimientos (o algoritmos) de solución de cada uno de ellos y para a ser un catálogo de todas las formas canónicas posibles[17].

Ahora bien, la búsqueda de todas las formas canónicas posibles precisa, por un lado, disponer de un SMS en que las expresiones estén representadas de forma lo

[16] Ver a este respecto el carácter epistémico que le atribuyo a la cuarta fase de Polya al rebautizarla como «revisión-extensión» en vez del original *looking back* en Puig (1996), nota 4 del capítulo 2, «El modelo de competencia», y apartado 4.3 del capítulo 4, «El modelo de enseñanza».

[17] El álgebra babilónica no supera este criterio, a pesar de que haya catálogos de técnicas y de problemas que se saben resolver, se usen los sumerogramas que significan «largo» y «ancho» para representar cantidades que nada tienen que ver con las figuras geométricas, los procedimientos de solución sean analíticos y se reduzcan configuraciones a otras que ya se sabe resolver. Pero tampoco lo supera la *Aritmética* de Diofanto.

suficientemente precisa como para poder realizar la búsqueda de posibilidades. Eso no implica que el SMS tenga que ser «simbólico» en el sentido de la distinción entre «retórico», «sincopado» y «simbólico» de Nesselmann (1842), como atestigua el que al-Khwârizmî establezca tal catálogo de formas canónicas[18] en un SMS que sólo está formado por la lengua natural, en este caso el árabe, y algunas figuras geométricas, que se insertan en el texto como representaciones (*sura*, «figura», pero también «representación» o incluso «fotografía») precedidas siempre por la frase «ésta es la representación» o «ésta es la figura». Por otro lado, modifica el proyecto de elaborar un catálogo de lo que ya se sabe resolver para convertirlo en el proyecto de saber resolver todas las formas canónicas.

Este nuevo proyecto se acomete en la historia estableciendo conjuntos de formas canónicas que son completos en algún sentido. Así, al-Khwârizmî establece todas las posibilidades para lo que para nosotros son los trinomios de grado no superior al segundo. Para él forman un conjunto completo[19] ya que los «tipos de números que aparecen en los cálculos» son tres, *mâl*, raíz y simples números[20]. Los «tipos de números que aparecen en los cálculos» de al-Khwârizmî se corresponden con los *eidei* de Diofanto. Ahora bien, Diofanto no establece un conjunto completo de formas normales ni plantea las combinaciones posibles de eidei, ni, por tanto, establece un cálculo para reducir las expresiones a una forma normal. Las operaciones que Diofanto define al comienzo de la *Aritmética* y que son similares a al-jabr y al-muqabala, no persiguen reducir a una forma normal, sino simplemente a una igualdad de *eidei*. Por otro lado, los *eidei* de Diofanto no pueden identificarse con las potencias de la incógnita, sino que responden a la idea euclídea de algo que está «dado en forma», una de las formas en que una figura geométrica puede haber sido dada[21]. De hecho Diofanto define las expresiones *dynamis*, cubo, *dynamodymanis*, *dynamocubo*, etc. para números determinados.

[18] Según Luckey (1941), al-Khwârizmî llama a las formas canónicas bâb, literalmente «puerta», «entrada», pero también «capítulo» de donde se derivaría el uso de «capitulum» entre los algebristas medievales del occidente cristiano para las formas canónicas –ver, por ejemplo, Cardano–; Thâbit ibn Qurra, en el opúsculo «Verificación geométrica de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas» las llama usûl, formas básicas.

[19] Aunque las discusiones sobre prioridad no sean importantes desde el punto de vista de la investigación didáctica, merece la pena señalar que al menos yo no conozco ningún texto anterior al *Libro conciso de cálculo de al-jabr y al-muqabala* de al-Khwârizmî en el que se establezca un conjunto completo de formas canónicas. En ese sentido, lo que constituye una radical novedad del libro de al-Khwârizmî no son los procedimientos que explica para resolver cada una de las formas canónicas, ya que esos procedimientos se pueden encontrar en textos anteriores que ya son en algunos casos milenarios, sino el que comience estableciendo un conjunto completo de posibilidades y exponga algoritmos de solución de todas las posibilidades. Dicho de otra manera, antes de al-Khwârizmî se sabía resolver problemas cuadráticos con procedimientos tipificados, quizá incluso se sabía resolver cualquier problema cuadrático, pero no se sabía que se sabía resolver todos los problemas cuadráticos.

[20] Ver Puig (1998) para una discusión detallada de la conceptualización monetaria de los «tipos de números» de al-Khwârizmî y la improcedencia de traducir *mâl*, que literalmente significa «tesoro», «posesión (de dinero)», por «cuadrado». Ver también Høyrup (2002).

[21] Véanse las definiciones de «haber sido dado» al comienzo del libro de Euclides *Data* (Taisbak, 2003).

La continuación del proyecto se realiza aumentando el grado al tercero, que también constituye un conjunto de formas canónicas naturalmente completo. Basta para ello que los «tipos de números que se usan en los cálculos» se conciban como las magnitudes aristotélicas, como lo hace ᶜUmar al-Khayyam en su *Tratado de álgebra y al-muqâbala* (Rashed et Vahebzadeh, 1999).

El tropiezo en los grados superiores al cuarto conducirá ulteriormente a la modificación del proyecto: dado que no se consigue encontrar un algoritmo de solución de las formas canónicas a partir de ese grado, la pregunta se transforma en otra acerca de la posibilidad de que el algoritmo exista y se precisará en términos de las condiciones de existencia de un algoritmo. Esta es la obra de Abel y Galois, pero con ella comienza otra historia de otra álgebra: el álgebra moderna.

CARACTERÍSTICAS DE LO ALGEBRAICO

El examen que acabo de realizar del método cartesiano, tomado como paradigma de lo algebraico, junto con los resultados de los análisis expuestos en Puig (1994, 1998) me permite reformular y ampliar las características de lo algebraico discutidas en Mahoney (1971) y Høyrup (1994) de la siguiente manera:

1. El uso de un sistema de signos al resolver problemas que permite expresar el contenido del enunciado que es preciso para resolverlo (su 'estructura') desprendido de lo que no es preciso. Con ese sistema de signos, además, se puede operar en el terreno de la expresión sin recurrir al del contenido.
2. La búsqueda sistemática (usualmente combinatoria) de tipos de estructura expresados por expresiones en ese sistema de signos (formas canónicas).
3. El desarrollo de un conjunto de reglas para calcular en el nivel de la expresión con el fin de reducir cualquier expresión a uno de los tipos de estructura (formas canónicas).
4. La búsqueda de reglas (principalmente algorítmicas) para resolver todos los tipos de estructuras (formas canónicas).
5. La ausencia de 'compromiso ontológico' del sistema de signos, que así permite expresar y operar con cualquier tipo de objetos matemáticos.
6. El carácter analítico del uso del sistema de signos para reducir el enunciado del problema a una forma canónica (un tipo de estructura).

COMPONENTES DE LA HISTORIA DE LAS IDEAS ALGEBRAICAS Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Como consecuencia de esa caracterización de lo algebraico, la historia de las ideas algebraicas puede descomponerse en una serie de componentes (que, por supuesto, se presentan interrelacionados), que se pueden enunciar de la siguiente manera:

1. La historia de la elaboración de SMS del álgebra, en particular, la del cálculo en el nivel de la expresión.
2. La historia de los problemas y los métodos de resolución de problemas.
3. La historia de la resolución de ecuaciones.
4. La historia de los conceptos de número.

De hecho, esos puntos se han transformado para mí en un esquema para examinar los textos históricos, que puede servir como guía para un programa de investigación con sólo enunciar preguntas derivadas de esos puntos. La manera de formular preguntas de ese estilo que estoy utilizando en estos momentos es la siguiente:

1. En qué medida el sistema de signos del texto permite expresar el contenido del enunciado que es preciso para resolver los problemas que se plantea (su «estructura») desprendido de lo que no es preciso, y cómo lo hace.
2. En qué medida el sistema de signos permite operar en el nivel de la expresión sin recurso al del contenido.
3. [Para abordar las dos preguntas anteriores]. Describir el sistema de signos en uso en el texto.
4. En qué medida hay búsqueda sistemática de tipos de estructura expresados por expresiones en ese sistema de signos. Si la hay o no. Si la hay, de qué tipo.
5. En qué medida se desarrolla un conjunto de reglas para calcular en el nivel de la expresión con el fin de reducir cualquier expresión a uno de los tipos de estructura. (O si no se desarrolla en absoluto).
6. [Derivada de la anterior] En especial, qué forma adopta en esas reglas de cálculo la «regla de los signos».
7. Cómo se desarrolla la búsqueda de reglas para resolver todos los tipos de estructuras, si es que la hay.
8. Cómo se conciben los «tipos de números que se usan en los cálculos» [Correspondiente a la «ausencia de compromiso ontológico»].
9. En qué medida hay analiticidad en el texto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cardano, G. (1663). *Opera Omnia.* Lyon.

Descartes, R. (1701). *Opuscula posthuma physica et mathematica.* Amsterdam: Typographia P. & J. Blaev.

Descartes, R. (1826). *Œuvres de Descartes*, publiées par Victor Cousin. Paris: Chez F. G. Levrault, libraire.

Descartes, R. (1925). *The Geometry* of René Descartes with a facsimile of the first edition, translated from French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham. Chicago, Ill: Open Court Publishing Co. [Reprinted New York, NY: Dover, 1954.]

Descartes, R. (1996). *Regulae ad directionem ingeni.* In *Œuvres de Descartes.* Tome X. Édition de Charles Adam et Paul Tannery. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Descartes, R. (1981). *Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría.* Prólogo, traducción y notas de Guillermo Quintás. Madrid: Alfaguara.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). La Aparición del Lenguaje Aritmético-Algebraico, *L'Educazione Matematica*, Vol. 5, No. 3, pp. 1-16.

Filloy, E. y Puig, L. (1993). Presentación. En Filloy, E.; Puig, L. y Rojano, T., eds. *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Historia de las Ideas Algebraicas*, pág. I. México, D. F.: CINVESTAV / PNFAPM.

Høyrup, J. (1994). The Antecedents of Algebra, *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter. 3. Række: Preprint og Reprints* 1994 nr. 1.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer Verlag.

Luckey, P. (1941). Thâbit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen. *Sitzungsberichte des sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-physische Klasse*. Berichte 93, pp. 93-114.

Mahoney, M. S. (1971). Babylonian Algebra: Form vs Content. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 1, págs. 369-380.

Nesselman, G. H. F. (1842). *Versuch einer Kritischen Geschichte der Algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen*. Berlin: G. Reimer.

Polya, G., (1966), *Mathematical Discovery. 2 vols*. New York: John Wiley and Sons.

Puig, L. (1994). El *De Numeris Datis* de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos, *Mathesis*, Vol. 10, págs. 47-92.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En Hitt, ed. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica, págs. 109-131.

Rashed, R. et Vahebzadeh, B. (1999). *Al-Khayyâm mathématicien*. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Taisbak, C. M. (2003). *Euclid's Data. The Importance of Being Given*. Copenhagen: Museum Tusculanum Press.

Witmer, T. Richard, ed., trans. (1968). *Girolamo Cardano, The Great Art or The Rules of Algebra*. Cambridge, Mass., and London: M.I.T. Press. [Reprinted New York, NY: Dover, 1993.]

Witmer, T. Richard, ed. (1983). *François Viète. The Analytic Art*. Kent, OH: The Kent State University Press.