INVESTIGACIÓN ACERCA DE LA ENSEÑANZA DEL LÍMITE EN EL MARCO DE TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS

ÁNGEL CONTRERAS DE LA FUENTE
MANUEL GARCÍA ARMENTEROS
CARMEN SÁNCHEZ GÓMEZ

RESUMEN

La enseñanza-aprendizaje de los conceptos elementales del Análisis Matemático en el nivel del Bachillerato, constituye uno de los puntos de investigación en Didáctica de las Matemáticas más relevantes en la actualidad. Desde marcos teóricos diferentes como la ingeniería didáctica, teoría de obstáculos, la teoría antropológica o el APOS, se han realizado investigaciones sobre la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en los niveles de enseñanza de Bachillerato y Universitaria. En este trabajo se presenta una propuesta de investigación, en la que se aplica la teoría de las funciones semióticas (TFS), mediante la cual se busca describir, explicar e identificar factores condicionantes de la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en un contexto institucional fijado.

ABSTRACT

One of the most relevant issues in research studies on mathematics pedagogy is the teaching-learning process of the basic concepts of mathematical analysis at high school level. From different theoretical frameworks, such as didactic engineering, the obstacle and anthropological theories, or the APOS, research has been carried out on the teaching-learning process of the limit of a function both at high school and university levels.The attempt of this paper is to present a research proposal based on the application of the semiotic function theory (SFT), in order to describe, explain, and identify the factors conditioning how the concept of limit of a function is taught and acquired in a given institutional context.

1. INTRODUCCIÓN

La investigación acerca de la naturaleza y fundamentación de la noción de límite de una función y de las dificultades que plantea su enseñanza, ha sido motor en la construcción y formalización de algunas de las teorías más conocidas hoy en la Didáctica del Análisis Matemático. Numerosos investigadores como, por ejemplo, Cornu (1983), Sierpisnka (1991), y, más recientemente, Williams (2001) han utilizado diversas teorías relacionadas con la instrucción de dicha noción.

En nuestro país, Sánchez (1997), lo estudió desde la perspectiva de la teoría de los obstáculos epistemológicos; Espinoza (1998) aplicó la teoría antropológica de lo didáctico; Blázquez (1999) utilizó diversos marcos teóricos, fundamentalmente el método de la epistemología genética. Sin embargo, no existen trabajos sobre la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en el seno de la teoría de las funciones semióticas (TFS a partir de ahora), lo que nos ha impulsado a realizar una propuesta de investigación de naturaleza epistemológica-cognitiva-curricular en la que se busca describir, explicar e identificar factores condicionantes de la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en el contexto institucional del Bachillerato.

Los interrogantes que nos planteamos acerca del límite de una función son:

a) De naturaleza epistemológica: en cuanto a los significados institucionales, a las rupturas epistemológicas y a los conflictos semióticos históricos.
b) De naturaleza cognitiva: relacionados con la coordinación de aspectos intuitivo-geométricos del límite con los numéricos y con la influencia los conflictos semióticos en la posible no transferencia de los procedimientos de cálculo desde el profesor a los alumnos.
c) De naturaleza instruccional: referidos a los contenidos pertinentes sobre el límite que respeten la formación intuitiva del estudiante e impidan una ruptura en su formación.

2. MARCO TEÓRICO

La investigación didáctica, en cuanto a los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, pone en juego múltiples dimensiones (epistemológica, cognitiva, instruccional), aunque delimitadas por dos polos: el personal y el institucional.

Consideramos que la TFS (Godino y Batanero, 1997; Godino, 2002) es un marco teórico adecuado para realizar un análisis conjunto de la manipulación de ostensivos en un contexto social y del pensamiento que la acompaña, la cual guarda relación con lo que Duval (1995, 2000) denomina sistemas de representaciones semióticos o registros semióticos y su hipótesis del aprendizaje matemático, aunque enriquecido con los instrumentos teóricos que aporta la TFS.

A continuación se describen las nociones teóricas que usaremos en el estudio de las dimensiones (epistemológica, cognitiva e instruccional), desarrolladas en el modelo teórico propuesto por Godino y Batanero (1994), y Godino (2002), el cual, aplicado a la Didáctica del Análisis Matemático, tiene en cuenta numerosas aportaciones, entre las que destacan: Font (1999), Contreras (2002) y Contreras y Font (2002). Se hace especial hincapié en lo que se refiere al análisis semiótico, ya que constituye el núcleo básico del trabajo.

Aparte de otras conocidas, las herramientas teóricas que utilizaremos son la función semiótica, que se establece entre dos entidades (ostensivas o no ostensivas) cuando entre ambas existe una dependencia representacional o instrumental. Esta noción permite formular en términos semióticos el conocimiento matemático y explicar en términos de conflictos semióticos las dificultades y errores de los estudiantes (Godino, 2002; Contreras, 2002).

2.1. *El análisis semiótico*

El análisis semiótico de un proceso instruccional consiste en identificar la trama de funciones semióticas y los conflictos semióticos que se establecen en los procesos de comunicación entre los agentes participantes (manual, profesor y alumnos). En este trabajo será, pues, la indagación sistemática de lo que puede significar el texto, y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto, el cual se descompone en unidades semióticas y subunidades.

Este tipo de análisis ayudará a formular hipótesis sobre puntos críticos del proceso instruccional en los cuales pueden haber lagunas o vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio.

2.2. *Conflicto semiótico*

En Godino (2002), se da al conflicto semiótico la definición siguiente: «disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa». Creemos que es necesario clarificar este constructo, denominaremos conflicto semiótico a toda expresión matemática en la que alguno o algunos de los elementos semióticos del significado (entidad primaria o faceta), correspondiente a dicha expresión, entre en contradicción o esté ausente con respecto al significado institucional de referencia.

Obviamente, lo que interesa al profesor en sus análisis a priori es identificar (en la historia, en los manuales, en la clase...) posibles conflictos semióticos, es decir, conflictos semióticos potenciales. En este trabajo se exponen los conflictos semióticos sobre la integral definida que se han detectado y que pueden ejemplificar este constructo.

2.3. *Conflicto semiótico - conversión semiótica no congruente*

Es interesante tratar de relacionar el constructo conflicto semiótico con el de la conversión no congruente (Duval, 1993, 1995), dada la importancia teórica de ambos.

Por ejemplo, una dificultad señalada por Schneider y otros (Group AHA, 1999) respecto al límite surge cuando algunos estudiantes sostienen que *toda sucesión* *decreciente estrictamente positiva converge necesariamente a cero*, puesto que su experiencia está ligada a la intuición atomista, según la cual existe una magnitud no nula más pequeña que todas, lo que hace imposible dividir indefinidamente una magnitud física.

Es un *conflicto semiótico*, ya que se da una contradicción con el significado institucional de referencia, en cuanto a las entidades proposicional, argumental y actuativo. Es proposicional porque choca con el hecho matemático elemental de que una sucesión decreciente estrictamente positiva puede converger a un número $a \neq 0$. Es argumental, dado que se justifica erróneamente debido al intuicionismo atomista. Por último, es actuativo por ausencia de acciones encaminadas a dar una justificación coherente al conflicto semiótico, puesto que al situarse sólo en la intuición geométrica atomista y no efectuar acciones del lenguaje geométrico de las figuras al lenguaje numérico variacional, le impide superar el conflicto.

Este último elemento, el actuativo, nos aproxima a una relación con la teoría de Duval, en cuanto a la operación de conversión entre registros semióticos. Este investigador afirma que la no congruencia semántica entre registros es la causa fundamental de los errores profundos en los alumnos, señalando (Duval 2000, p. 64):

> «La no congruencia es un fenómeno crucial para cualquier tarea de conversión... Pueden efectuarse muchos análisis sistemáticos exactos del carácter congruente o no congruente de la conversión de una representación a otra, explicando entonces de una forma bastante exacta muchos errores».

Estudiemos para un caso particular del conflicto semiótico anterior dónde puede surgir la no congruencia en la conversión entre registros. Sea la sucesión siguiente:

$$1 \quad 0{,}9 \quad 0{,}8 \quad 0{,}7 \quad 0{,}6 \quad 0{,}51 \quad 0{,}501 \quad 0{,}5001\ldots$$

Bajo la perspectiva de la no congruencia, si el sujeto afirma que esta sucesión de valores tiende a cero, es porque no hay congruencia entre este registro numérico y el registro geométrico de la figura (segmento que va de 1 a 0, según su visión atomista). En efecto:

En la conversión del registro numérico al figural se dan las tres condiciones de congruencia:

- correspondencia de unidades significantes, es decir, a cada valor de la sucesión le corresponde un punto del segmento.
- univocidad semántica terminal, es decir, a cada valor numérico le corresponde un único punto.
- orden en la organización de las unidades significantes de ambos registros, es decir, la secuencia de valores de ambas representaciones guardan un orden.

Sin embargo, en la conversión del registro figural al numérico no se da la condición de correspondencia semántica de las unidades significantes, ya que hay unidades significantes del segmento (aquellas que van del 0,5 al 0) que no encuentran unidad del registro numérico en quien aplicarse.

Por tanto, aunque pueda haber congruencia en un sentido, no lo hay en el contrario.

Como consecuencia, encontramos una clara relación entre los constructos conflicto semiótico y no congruencia. En principio, los desajustes de significado en cuanto al elemento actuativo permiten analizar el conflicto semiótico bajo la óptica de la no congruencia.

3. DESCRIPCIÓN, RESUMEN Y ALGUNAS CONCLUSIONES DEL ESTUDIO EXPLORATORIO REALIZADO

El estudio exploratorio que se describe en este apartado es parte de una comunicación presentada en las X CEAM (Luque, Sánchez, Contreras, 2002). Se muestra el análisis de las unidades identificables en el proceso instruccional del límite de una función en un punto a través del análisis semiótico del mismo.

El objetivo específico de este trabajo es doble:

A. Por una parte, se pretende hacer explícitos los distintos significados institucionales y personales sobre el concepto de límite en un texto.
   Para ello se seleccionó un manual de 1° de Bachillerato de Matemáticas I (Bescós y Pena, 2001) (correspondiente al Bachillerato Tecnológico) en el que se introduce por primera vez dicho objeto matemático. Se dividió el texto (página 225 del manual) en las unidades y subunidades que se consideraron pertinentes, y se analizaron las entidades primarias, indagando los significados institucionales puestos en juego en el proceso.
   Por otro lado, se indagaron los significados personales de un grupo de 14 alumnos de 1.° de Bachillerato Tecnológico, a través de sus respuestas a un cuestionario (Anexo 1) realizado a partir del análisis efectuado y que fue pasado antes de la enseñanza del concepto. Estos alumnos siguieron durante el curso el diseño curricular derivado del manual, con lo que sus contestaciones pueden ser un fiel reflejo de los significados personales tras su primera lectura.
B. Por otra, se persigue describir y detectar los posibles conflictos semióticos que una determinada práctica pueda provocar.
   Tras el análisis del manual, se señalan no sólo algunas de las funciones semióticas que aparecen en el mismo sino también las hipotéticas dificultades y conflictos que pueden surgir.
   El texto seleccionado (Anexo 2) constituye para el autor un ejemplo justificativo en el que se pretende enlazar conocimientos que el alumno hipotéticamente ya ha adquirido –límite de una función en el infinito– con lo que posteriormente estudiará –límite de una función en un punto–. Por razones de espacio, se han seleccionado algunas de las unidades de análisis.

Unidad U1:

La figura 9.11. es la representación gráfica de la función

Dicha expresión, junto a la gráfica que aparece al margen en el libro de texto, que en su globalidad debe ser interpretada como una unidad semiótica, se podría a su vez dividir en otras cuatro subunidades:

U1.1: La figura 9.11.; U1.2: representación gráfica; U1.3: función $f(x)=x^2$; U1.4: dibujo.

El libro de texto usa la expresión U1 como una propiedad al asignar al dibujo del margen de la página la característica de ser la representación gráfica de la función dada. A su vez se observa la faceta extensiva al presentarnos un ejemplar del tipo de funciones. Si profundizamos en el estudio de las subunidades, podemos enriquecer el análisis semiótico.

U.1.1 es un registro verbal que se va a usar en representación de U1.4 que corresponde a un registro gráfico, estableciéndose una función semiótica de la siguiente manera:

Expresión		Contenido
La figura 9.11	$\longrightarrow$	Dibujo

U1.2 es una entidad que actúa como propiedad de U1.1 y U1.4 al caracterizarlas como representación gráfica de una función. Podemos observar la siguiente función semiótica:

Expresión		Contenido
U1.1 U1.4	$\longrightarrow$	*Representación gráfica*

U1.3 es un registro semiótico analítico de tipo extensivo al proponernos un ejemplar del conjunto de funciones. Se puede relacionar con las anteriores subunidades mediante la siguiente función semiótica:

Expresión		Contenido
U1.1 U1.4, U1.2	$\longrightarrow$	$f(x)=x^2-1$

De esta manera en U1 podemos formar un esquema siguiendo la estructura de semiótica connotativa propuesta por Hjelmslev:

<table>
<tr><td colspan="3">EXPRESIÓN</td><td>CONTENIDO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión</td><td>Contenido</td><td>$f(x) = x^2 -1$</td></tr>
<tr><td>Expresión</td><td>Contenido</td><td>Representación gráfica</td><td></td></tr>
<tr><td>Figura 9.11.</td><td>Dibujo</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Se podría presentar una dificultad para el lector del nivel de 1.° de Bachillerato en la última función semiótica establecida. Para un estudiante, podría no ser tan transparente, como lo es para el autor, el hecho de que la parábola representada en el dibujo se corresponda con la representación gráfica de la función $f(x) = x^2 -1$, a pesar de que se haya estudiado ya en capítulos anteriores, debido a que se trata de una traslación de la parábola estandarizada $f(x) = x^2$. A fin de detectar los significados personales de los alumnos, se elaboró la cuestión 1, para cuya respuesta el alumno ha de poner en juego sus conocimientos sobre traslaciones de funciones representadas en unos ejes coordenados, y así lo hicieron 11 de los alumnos, mientras que 3 necesitaron elaborar una tabla de valores, previa búsqueda del vértice de la parábola.

Unidad U2

Si x tiende a +∞, la función crece indefinidamente, lo cual se expresa escribiendo: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 -1) = \infty$

Esta entidad corresponde a una proposición, al estudiar el comportamiento de la anterior función cuando la variable independiente diverge hacia +(, que deja validar, de manera transparente, al lector a través del ostensivo de la figura del margen del texto. La podríamos dividir en tres subunidades:

U2.1: Si x tiende a +∞; U2.2: la función crece indefinidamente; U2.3: lo cual se expresa escribiendo: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 -1) = +\infty$.

U2.1 representa la hipótesis de la proposición planteada. La entidad puesta en juego requiere que el alumno actúe sobre la variable independiente x. El libro considera que el significado de esta expresión, para el alumno, ha de ser transparente ya que ha sido tratado en preguntas anteriores. Si nos remitimos a la página 221 del manual podemos encontrar el significado que el autor asigna a la expresión dada: «...x tiende a +∞, es decir, para valores de x muy grandes». A nuestro modo de ver, esta expresión debe aclararse –por ejemplo, señalando que es un modo de expresarnos, pero que no es un valor...–, ya que, en caso contrario, puede conducir al alumno hacia un conflicto semiótico de tipo epistemológico al asignarle al infinito un valor numérico.

En las respuestas de los alumnos a la cuestión 2, se constata este hecho mediante expresiones del tipo «el límite de x se acerca a $+\infty$» o «x toma un valor positivo grande».

U2.2 representa la tesis de la proposición planteada. Para el alumno, el significado de esta expresión será el de observar el comportamiento numérico de la función al sustituir la variable independiente por «valores muy grandes» u observar el comportamiento gráfico de la función para estos valores. El libro, por otra parte, conduce implícitamente al alumno a identificar la expresión «crecimiento indefinido» con «crecimiento hacia el infinito», lo que podría suponer una dificultad posterior cuando el lector se encuentre ante funciones crecientes que presenten una asíntota horizontal. Estamos ante un conflicto semiótico inducido por el manual.

U2.3 es un registro analítico de tipo notacional que viene a representar lo expresado en U2.1 y U2.2. Estamos ante una nueva función semiótica:

Expresión		Contenido
$\lim_{x\to+\infty}(x2-1)=+\infty$	$\longrightarrow$	*U2.1 y U2.2*

Para evaluar los significados personales, elaboramos las cuestiones 3, 4 y 5 en las que pudimos constatar que 12 de alumnos identificaban «crecimiento indefinido» con «crecimiento hacia infinito», aunque sólo 4 de ellos identificaron la gráfica de la función con asíntota horizontal con $\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)=+\infty$. Además en 5 casos se identificaba este límite con la función que presentaba una asíntota vertical aludiendo a que la función no era acotada superiormente.

Unidad U3

Lo mismo sucede si se estudia el comportamiento de la función para valores de x negativos, cada vez más pequeños.

4. CONCLUSIONES

Se ha pretendido, según se desprende de los análisis semióticos del texto y del cuestionario propuesto a los alumnos, explicar algunas de las dificultades del aprendizaje matemático y se han extraído las siguientes conclusiones:

- La transparencia con la que el texto se dirige al lector no está justificada, tal y como lo muestra el análisis del texto y el análisis de las respuestas de los alumnos.
- Se han detectado diversos conflictos semióticos, siendo los más relevantes los siguientes:
  - La asignación de un valor numérico al infinito.
  - Aplicación de una regla como general, cuando sólo es cierta en casos particulares, como en el caso: «si la variable independiente tiende a $+\infty$, entonces la dependiente también».
  - Interpretación del término «indefinidamente», usado para el crecimiento de una función, como un crecimiento hacia infinito.
  - Considerar el límite de la función en un punto como el valor de la función en dicho punto, extendiendo a todos los casos lo que sólo se cumple para funciones continuas.

Para poder ampliar y profundizar en los aspectos anteriores se requiere desarrollar la investigación iniciada, según los objetivos siguientes:

1) Detectar y caracterizar la emergencia de los distintos objetos institucionales por medio de las prácticas ligadas a los diversos campos de problemas a través de un estudio del desarrollo epistemológico-histórico del objeto límite, según los significados institucionales y los conflictos semióticos asociados, en las diversas instituciones de la matemática sabia.
2) Detectar las no congruencias semánticas que pueden darse y la posible repercusión en el aprendizaje del objeto límite de una función, mediante un estudio previo del investigador acerca de las diversas representaciones semióticas del objeto límite y los diferentes cambios (internos y externos) entre las mismas.
3) Localizar las dimensiones: fenomenológicas, didácticas, conceptuales y epistemológicas del objeto matemático que se estudia a través del análisis, tanto del manual utilizado en el aula del centro de Bachillerato como de los apuntes de clase del profesor de dicha aula.
4) Caracterizar los significados personales construidos por los estudiantes, pertenecientes al aula del centro objeto de estudio, en cuanto al objeto matemático límite de una función mediante el estudio de sus respuestas a un cuestionario elaborado con tal fin.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bescós, E. y Pena, Z. (2001), *Matemáticas 1º Bachillerato Ciencias de la Naturaleza y de la Salud*, Zaragoza: Oxford.

Blázquez, M. S. (1999), *Noción de límite en Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales*, Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid.

Contreras, A. (2002), Aplicación de la teoría de las funciones semióticas (TFS) a la Didáctica del análisis, *I Seminari d'investigació en didàctica de les matemàtiques aplicacions a la didáctica de l'anàlisi infinitesimal*, pp. 1-18.

Contreras, A. y Font, V. (2002), ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica?, *XVIII Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Castellón, pp. 1-21.

Cornu (1983), *Apprentissage de la notion de limite*. Thèse de doctorat de troisième cycle de Mathématiques pures. Université de Grenoble.

Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, IREM de Strasbourg, pp. 37-65.

Duval, R (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Suisse: Peter Lang, S.A.

Duval, R. (2000), Basic Issues for research in athematics Education, Plenary Address, *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Tomo I*, Editors: Tadao Nakahara and Masataka Koyama, Hiroshima University (Japan), pp. 55, 69.

Espinoza, L. (1998), *Organizaciones Matemáticas y Didácticas en torno al objeto límite de funciones*. Tesis Doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

Font, V. (1999), *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques*, Tesis doctoral, Universidad de Barcelona.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, nº 3, pp. 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1997), Una aproximación semiótica y antropológica a la investigación en Educación Matemática, *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 10, [URL:http://www.ex.ace.uk/~PErnest/ pome10/aert7.htm].

Godino, J. D. (2003), Un enfoque semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactiques en Mathematiques*, Vol. 22, nº 22, pp. 237-284.

Luque, L.; Sánchez, C.; Contreras, A. (2002), Una aproximación al análisis semiótico del límite de una función en un punto, *X Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* (CEAM), pp. 1-12.

Sánchez, C. (1997), *Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Schneider, M. *et al.* Groupe AHA, (1999), *Vers l'infini pas à pas*, Bruxelles: De Boeck Wesmael.

Sierpinska (1991). *Some remarks on undertanding in mathematics*. Versión revisada del trabajo presentado al Canadian Mathematics Study Group. Vancouver.

Willians, S. R. (2001), Predications of the Limit Concept: An Application of Repertory Grids, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 32, Nº 4, pp. 341-367.

ANEXO 1

NOMBRE:

Lee atentamente el texto que te he dado, tratando de comprender todo lo que ahí te explica.

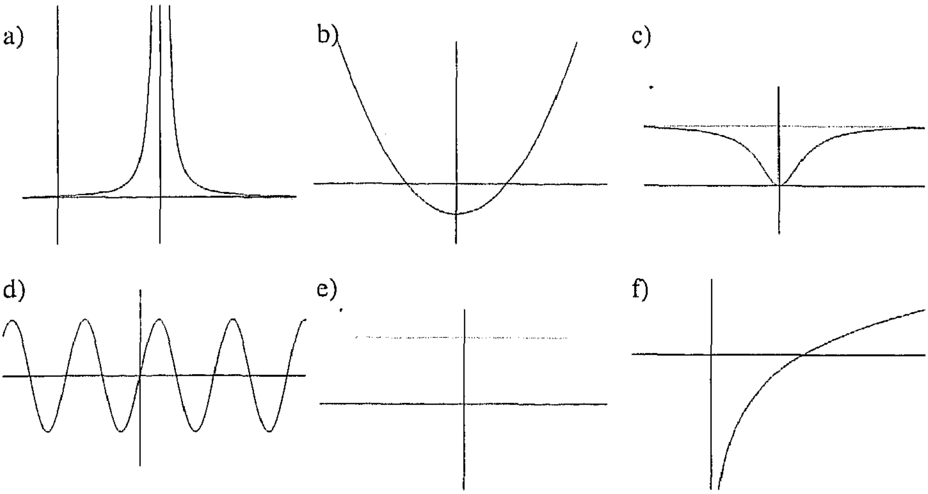
Contesta ordenadamente a todas las preguntas, explicando todos los razonamientos que hagas.

1) Explica por qué la figura 9.11 es la representación gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$.

2) ¿Qué significa la expresión «x tiende a $+\infty$»?

3) ¿Qué entiendes por «una función crece indefinidamente?

4) ¿Cuáles de las siguientes funciones verifican la siguiente expresión: «si x tiende a $+\infty$, la función crece indefinidamente?



5) ¿Cuáles de las funciones, cuyas representaciones gráficas vienen dadas en la cuestión 4), crees que verifican $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Explica, una a una, los motivos de decisión.

6) ¿Qué entiendes por «valores de x negativos, cada vez más pequeños»?

7) ¿Qué crees que quiere decir la frase «lo mismo sucede si se estudia el «comportamiento de la función para valores de x negativos, cada vez más pequeños»?

8) ¿Qué entiendes por «x se aproxima a 3»?

9) Responde a la pregunta que realiza el texto, y explica cómo lo haces: «¿cómo se comporta la función cuando x se aproxima a un valor concreto, por ejemplo a 3?»

10) Observa la tabla dada en el texto y explica por qué crees que «las imágenes conforman una sucesión cuyo límite es 8».

11) ¿Crees que la tabla se corresponde con la función cuya representación gráfica es la de la figura 9.11?

12) Observa la gráfica. ¿Cuánto vale f(3)? ¿Cómo lo has hecho?

Calcula y justifica cómo lo has hecho.

ANEXO 2

6.3. Límites laterales de una función en un punto

■ La figura 9.11. es la representación gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$

Si x tiende a $+\infty$, la función crece indefinidamente, lo cual se expresa escribiendo:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$$

Lo mismo sucede si se estudia el comportamiento de la función para valores de x negativos, cada vez más pequeños.

Pero ¿cómo se comporta la función cuando x se aproxima a un valor concreto, por ejemplo a 3?

Se observa que se puede realizar la aproximación tomando valores próximos a 3 tanto por la derecha como por la izquierda, es decir, para $x > 3$ y para $x < 3$

En cualquier caso, las imágenes conforman una sucesión cuyo límite es 8.

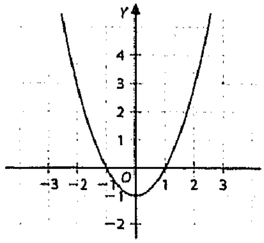


Figura 9.11.

x	2,90	2,95	2,99	3	3,01	3,05	3,10
$f(x)$	7,41	7,7025	7,94	8	8,0601	8,3025	8,61

Como se observa en la tabla, los valores leídos de izquierda a derecha hacia $x = 3$ y los leídos de derecha a izquierda hacia $x = 3$ convergen en un valor que es 8. Por eso se escribe $\lim_{x \to 3} (x^2 - 1) = 8$. Además, $f(3) = 8$