DIDACTICA DE LA COMBINATORIA

Antonio González Carlomán

1.- Factoriales

Siendo N un conjunto natural; la aplicación $f:N \to N$ tal que

$$n \in N \Rightarrow f(n) = \prod_{x<n} (x+1)$$

recibe el nombre de aplicación factorial y convenimos en representar abreviadamente, para cualquier $n \in N$, f(n)=n¡, que leeremos n factorial -

Propiedades:

Siendo $n, m \in N$, se cumplen

1.1.- $0¡=1$

En efecto:

$$0¡ = \prod_{x<0} (x+1) = 1$$

1.2.- $n¡.(n+1)=(n+1)¡$

En efecto:

$$n¡.(n+1) = \prod_{x<n} (x+1) \cdot (n+1) = \prod_{x<n+1} (x+1) = (n+1)¡$$

1.3.- $m \leq n \Rightarrow m¡.(n-m)¡ \mid n¡$ (si $m \leq n$, $\frac{n¡}{m¡.(n-m)¡} \in N$)

En efecto:

Demostrémoslo por inducción particular sobre n en N

1º.- Si $n=0$, $m \leq n \rightarrow m \leq 0 \rightarrow m!.(n-m)!=0!.0! \rightarrow m!.(n-m)!=1 \rightarrow m!.(n-m)! \mid n!$

2º.- Si se cumple la propiedad para $n=s$ entonces se cumple para $n=s^+$ $(s^+=s+1)$

Demostración:

a) Si $m=0$

$m \leq s^+ \rightarrow m!.(s^+-m)!=s^+! \rightarrow m!.(s^+-m)! \mid s^+!$

b) Si $m \neq 0$

$m \leq s^+ \rightarrow m=s^+ \vee m<s^+ \rightarrow m=s^+ \vee (m-1<s \wedge m \leq s) \rightarrow m=s^+ \vee ((m-1)!.(s-(m-1))! \mid s! \wedge m!.(s-m)! \mid s!) \xrightarrow{1} m=s^+ \vee (m!.(s^+-m)! \mid s!.m \wedge m!.(s^+-m)! \mid s!.(s^+-m)) \xrightarrow{2} m!.(s^+-m)!=s^+! \vee m!.(s^+-m)! \mid s!.s^+ \rightarrow m!.(s^+-m)! \mid s^+! \vee m!.(s^+-m)! \mid s^+! \rightarrow m!.(s^+-m)! \mid s^+!$

1.- Por VII-1.10* y por 1.2

2.- Por VII-1.7

1.4.- Siendo α una aplicación de N en N

$$\sum_{x<m} \alpha_x = n \rightarrow \prod_{x<m} (\alpha_x!) \mid n! \qquad \left(\text{si } \sum_{x<m} \alpha_x = n,\ \frac{n!}{\prod_{x<m} (\alpha_x!)} \in N\right.$$

En efecto:

Demostrémoslo por inducción particular sobre m en N

1º.- Si $m=0$, $\sum_{x<m} \alpha_x = n \rightarrow 0=n \wedge 1 \mid 0! \rightarrow \prod_{x<m} (\alpha_x!) \mid n!$

2º.- Si se cumple la propiedad para $m=s$, entonces se cumple para $m=s^+$

Demostración:

$$\sum_{x<s^+} \alpha_x = n \rightarrow \sum_{x<s} \alpha_x + \alpha_s = n \rightarrow \sum_{x<s} \alpha_x = n-\alpha_s \rightarrow \prod_{x<s} (\alpha_x!) \mid (n-\alpha_s)! \xrightarrow{1} \prod_{x<s} (\alpha_x!).\alpha_s! \mid (n-\alpha_s)!.\alpha_s! \wedge (n-\alpha_s)!.\alpha_s! \mid n! \rightarrow \prod_{x<s^+} (\alpha_x!) \mid n!$$

* Citas del libro "Conjuntos Numéricos" (capítulo VII, apartado 1.10), de próxima aparición en el Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo.

1.- Por VII-1.10 y por 1.3

2.- Números combinatorios

Siendo N un conjunto natural; la aplicación $g:N\times N\rightarrow N$ tal que, para cualquier $n,m\in N$

a) Si $n<m$, $g(n,m)=0$

b) Si $m\leq n$, $g(n,m)=\frac{n!}{m!.(n-m)!}$ (1.3)

define una operación interna binaria en N, y convenimos en representar abreviadamente, para cualesquiera $n,m\in N$,

$g(n,m)=\binom{n}{m}$

que leeremos n sobre m

Propiedades:

Siendo $a,b,n,m\in N$, se cumplen

2.1.- $m\leq n\Rightarrow\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$

En efecto:

Supuesto $m\leq n$

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!.(n-m)!}=\frac{n!}{(n-m)!.(n-(n-m))!}=\binom{n}{n-m}$$

2.2.- $\binom{n}{0}=1$

En efecto:

Como $0\leq n$

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!.(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1$$

2.3.- $\binom{n}{n}=1$

En efecto:

$\binom{n}{n}=\binom{n}{n-n}=\binom{n}{0}=1$

2.4.- $\binom{n}{1}=n$

En efecto:

a) Supuesto $n=0$

$\binom{n}{1}=\binom{0}{1}=0=n$

b) Supuesto $n\neq 0$ $(1\leq n)$

$$\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!.(n-1)!}=\frac{(n-1)!.n}{(n-1)!}=n$$

2.5.- $\binom{n}{m}+\binom{n}{m+1}=\binom{n+1}{m+1}$

En efecto:

a) Si $n<m$

como entonces $n<m+1$ y $n+1<m+1$

$\binom{n}{m}+\binom{n}{m+1}=0+0=0=\binom{n+1}{m+1}$

b) Si $n=m$

Como entonces $n<m+1$ y $n+1=m+1$

$\binom{n}{m}+\binom{n}{m+1}=1+0=1=\binom{n+1}{m+1}$

c) Si $m<n$

Como entonces $m+1\leq n$ y $m+1<n+1$

$$\binom{n}{m}+\binom{n}{m+1}=\frac{n!}{m!.(n-m)!}+\frac{n!}{(m+1)!.(n-(m+1))!}=\frac{n!.(m+1)}{(m+1)!.(n-m)!}+\frac{n!.(n-m)}{(m+1)!.(n-m)!}$$

$$=\frac{n!.(n+1)}{(m+1)!.(n-m)!}=\frac{(n+1)!}{(m+1)!.((n+1)-(m+1))!}=\binom{n+1}{m+1}$$

2.6.- $(a+b)^n=\sum\limits_{x<n+1}\binom{n}{x}.a^{n-x}.b^x$

En efecto:

Demostrémoslo por inducción particular sobre n en N

1º.- Si $n=0$, $(a+b)^n=1=\binom{n}{0}.a^{n-0}.b^0=\sum\limits_{x<n+1}\binom{n}{x}.a^{n-x}.b^x$

2º.- Si se cumple la propiedad para $n=m$, entonces se cumple para $n=m^+$

Demostración:

$$(a+b)^{m^+}=(a+b)^m.(a+b)=\left(\sum_{x<m+1}\binom{m}{x}.a^{m-x}.b^x\right).(a+b)=\left(\sum_{x<m+1}\binom{m}{x}.a^{m-x}.b^x\right).\ a+$$
$$\left(\sum_{x<m+1}\binom{m}{x}.a^{m-x}.b^x\right).b=\sum_{x<m+1}\binom{m}{x}.a^{m^+-x}.b^x+\sum_{x<m+1}\binom{m}{x}.a^{m^+-(x+1)}.b^{x+1}=\binom{m}{0}$$
$$.a^{m^+}.b^0+\sum_{x<m}\binom{m}{x+1}.a^{m^+-(x+1)}.b^{x+1}+\sum_{x<m}\binom{m}{x}.a^{m^+-(x+1)}.b^{x+1}+\binom{m}{m}.a^0.b^{m+1}\overset{1}{=}$$
$$\binom{m+1}{0}.a^{m^+}.b^0+\sum_{x<m}\binom{m+1}{x+1}.\ a^{m^+-(x+1)}.b^{x+1}+\binom{m+1}{m+1}.a^0.b^{m+1}=\sum_{x<m^+}\binom{m^+}{x}.a^{m^+-x}$$
$$.b^x+\binom{m^+}{m^+}.a^0.b^{m^+}=\sum_{x<m^++1}\binom{m^+}{x}.a^{m^+-x}.b^x$$

1.- Por 2.2, 2.3, 2.5 y III-1.21.1

2.7.- Siendo β una aplicación de N en N ($\beta\in N^N$), $m\neq 0$ y

$F=\{\alpha \mid \alpha\in N^{m^<}\wedge\sum\limits_{x<m}\alpha_x=n\}$, entonces

$$\left(\sum_{x<m}\beta_x\right)^n=\sum_{\alpha\in F}\left(\frac{n!}{\prod\limits_{x<m}(\alpha_x!)}.\prod_{x<m}\beta_x^{\alpha_x}\right)\quad(1.4)$$

En efecto:

Demostrémoslo por inducción particular sobre m en N-{0} que tiene a 1 como mínimo

1º.- Si $m=1$, $\left(\sum_{x<m} \beta_x\right)^n=\beta_0^n \stackrel{1}{=} \sum_{\alpha\in F} \beta_0^{\alpha_0}= \sum_{\alpha\in F} \left(\frac{n!}{\alpha_0!}.\beta_0^{\alpha_0}\right)= \sum_{\alpha\in F} \left(\frac{n!}{\prod_{x<m}(\alpha_x!)}.\prod_{x<m} \beta_x^{\alpha_x}\right)$

1.- $\alpha\in F \leftrightarrow \alpha\in N^{1^<} \wedge \alpha_0=n$

2º.- Si se cumple la propiedad para $m=s$, entonces se cumple para $m=s^+$

Demostración:

Siendo, para cualquier $y<n$, $F_y=\{\alpha \mid \alpha\in N^{m^<} \wedge \sum_{x<m} \alpha_x=n-y\}$

$$\left(\sum_{x<s^+} \beta_x\right)^n= \left(\sum_{x<s} \beta_x+\beta_s\right)^n= \sum_{y<n+1} \left(\binom{n}{y}.\left(\sum_{x<s} \beta_x\right)^{n-y}.\beta_s^y\right)= \sum_{y<n+1} \left(\binom{n}{y}. \sum_{\alpha\in F_y} \right. ---$$
$$\left(\frac{(n-y)!}{\prod_{x<s}(\alpha_x!)} . \prod_{x<s} \beta_x^{\alpha_x} \right).\beta_s^y\Big)= \sum_{y<n+1} \sum_{\alpha\in F_y} \left(\frac{n!}{y!.(n-y)!}.\frac{(n-y)!}{\prod_{x<s}(\alpha_x!)}.\prod_{x<s} \beta_x^{\alpha_x}.\beta_s^y\right)$$
$$= \sum_{y<n+1} \sum_{\alpha\in F_y} \left(\frac{n!}{\prod_{x<s}(\alpha_x!).y!} . \prod_{x<s} \beta_x^{\alpha_x} .\beta_s^y\right)\stackrel{1}{=} \sum_{\alpha\in F} \left(\frac{n!}{\prod_{x<s^+}(\alpha_x!)}.\prod_{x<s^+} \beta_x^{\alpha_x}\right)$$

1.- Para cualquier $y<n+1$ y para cada correspondiente $\alpha\in F_y$ sería -- $\alpha_s=y$

3.- Variaciones con repetición

Dados dos conjuntos finitos no vacíos A y B de cardinales a y b, -- $A^{\oplus}=a$ y $B^{\oplus}=b$; llamamos variaciones con repetición de A en B a las distintas aplicaciones de inicial A y final B.

Convenimos en representar al conjunto de tales aplicaciones por VR_B^A (también por B^A) y al cardinal de tal conjunto, $(VR_B^A)^{\oplus}$, por VR_b^a

Propiedades:

3.1.- Siendo A,B conjuntos finitos no vacíos, $a=A^{\oplus}$ y $b=B^{\oplus}$
$VR_b^a=b^a$
En efecto:

$VR_b^a=(VR_B^A)^{\oplus}=(B^A)^{\oplus} \stackrel{1}{=} B^{\oplus A^{\oplus}}=b^a$

1.- Por IV-2.3-1º y IV-2.3.20

3.2.- Aplicaciones de Boole

Dado el conjunto $E=\{0,1\}$ con las operaciones $+$, $.$, $*$ que le dan carácter de algebra de Boole (A.1-x-11) y, siendo $n\in N$, dada una aplicación $f:E^{n+1}\to E$ (aplicación de Boole); si $C=\{\alpha|\ \alpha\in VR_{2<}^{(n+1)<} \wedge f(\alpha(0),\alpha(1),\ldots\alpha(n))=1\}$, entonces $f(x_0,x_1,\ldots x_n)=\sum_{\alpha\in C}\prod_{i<n+1} y_{i,\alpha(i)}$ en que $y_{i,\alpha(i)}=x_i$ si $\alpha(i)=1$ ó $y_{i,\alpha(i)}=x_i^*$ si $\alpha(i)=0$

En efecto:

Sustituyendo $(x_0,x_1,\ldots x_n)$ por $(\beta(0),\beta(1),\ldots\beta(n))$ para cualquier $\beta\in VR_{2<}^{(n+1)<}$, $f(x_0,x_1\ldots,x_n)$ toma el mismo valor que $\sum_{\alpha\in C}\prod_{i<n+1} y_{i,\alpha(i)}$

Demostrémoslo teniendo en cuenta los siguientes casos

1º.- Que $\beta\in C$

En este caso, por definición de C, $f(x_0,x_1,\ldots.x_n)$ toma el valor 1 y también $\sum_{\alpha\in C}\prod_{i<n+1} y_{i,\alpha(i)}$, ya que $\prod_{i<n+1} y_{i,\beta(i)}$ toma el valor 1, por tomar dicho valor cada uno de los n+1 factores, y para cualquier $\alpha\in C$ tal que $\alpha\neq\beta$, $\prod_{i<n+1} y_{i,\alpha(i)}$ toma el valor 0 puesto que uno por lo menos de sus n+1 factores toma el valor 0

2º.- Que $\beta\notin C$

En este caso, por definición de C, $f(x_0,x_1,\ldots.x_n)$ toma el valor 0 y también $\sum_{\alpha\in C}\prod_{i<n+1} y_{i,\alpha(i)}$, ya que para cualquier $\alpha\in C$, $\prod_{i<n+1} y_{i,\alpha(i)}$ toma el valor 0 puesto que uno por lo menos de sus n+1 factores toma el valor 0

3.2.1.- Si $D=\{\alpha|\ \alpha\in VR_{2<}^{(n+1)<} \wedge f(\alpha(0),\alpha(1),\ldots.\alpha(n))=0\}$, entonces $f(x_0,x_1,\ldots\ldots x_n)=\prod_{\alpha\in D}\sum_{i<n+1} z_{i,\alpha(i)}$ en que $z_{i,\alpha(i)}=x_i$ si $\alpha(i)=0$ ó $z_{i,\alpha(i)}=x_i^*$ si $\alpha(i)=1$

En efecto:

Definiendo la aplicación $g:E^{n+1}\to E$ tal que $g(x_0,x_1,\dots x_n)=f(x_0,x_1,\dots x_n)^*$, tendremos:

$$f(x_0,x_1,\dots\dots x_n)\overset{1}{=}f(x_0,x_1,\dots\dots x_n)^{**}\overset{2}{=}g(x_0,x_1,\dots\dots x_n)^*\overset{3}{=}\Big(\sum_{\alpha\in D}\prod_{i<n+1}y_{i,\alpha(i)}\Big)^*\overset{4}{=}\prod_{\alpha\in D}\sum_{i<n+1}y^*_{i,\alpha(i)}\overset{5}{=}\prod_{\alpha\in D}\sum_{i<n+1}z_{i,\alpha(i)}$$

1.- Por II-7.2

2.- Por definición de g

3.- Por 3.2, ya que $D=\{\alpha \mid \alpha\in VR_2^{(n+1)<}\wedge g(\alpha(0),\alpha(1),\dots,\alpha(n))=1\}$

4.- Por III-3.23.5 y III-3.23.6

5.- Por definición de $z_{i,\alpha(i)}$ y ser $x_i^{**}=x_i$

4.- Variaciones ordinarias

Dados dos conjuntos finitos no vacíos A y B de cardinales a y b en que $a\leq b$; llamamos variaciones ordinarias de A en B a las distintas aplicaciones de A en B que sean inyectivas.

Convenimos en representar al conjunto de tales aplicaciones por V_B^A y al cardinal de tal conjunto, $(V_B^A)^{\oplus}$, por V_b^a

Propiedades:

Siendo A,B conjuntos finitos no vacíos, $a=A^{\oplus}$ y $b=B^{\oplus}$

4.1.- Siendo $a< b$

$V_B^A\subset VR_B^A$

En efecto:

Por definición de V_B^A, VR_B^A y existir aplicaciones de A en B no inyectivas

4.2.- Siendo $a\leq b$

$V_b^a = \frac{b\,¡}{(b-a)\,¡}$

En efecto:

Demostrémoslo por inducción particular sobre a en N-{0} que tiene a 1 como mínimo (I-6.4.20)

1º.- Si a=1, $V_b^a = (V_B^A)^{\theta} = (V_{b^<}^{1^<})^{\theta} \overset{1}{=} b = \frac{(b-1)\,¡\,.b}{(b-1)\,¡} = \frac{b\,¡}{(b-a)\,¡}$

1.- Cada aplicación de $V_{b^<}^{1^<}$ asigna al elemento 0 cada uno de los elementos de $b^<$ e inversamente

2º.- Si se cumple la propiedad para a=c, entonces se cumple para $a=c^+$

Demostración:

Supuesto $c^+ < b$ y por lo tanto $c < b$

$$V_b^{c^+} \overset{1}{=} V_b^c.(b-c) \overset{2}{=} \frac{b\,¡}{(b-c)\,¡}.(b-c) = \frac{b\,¡\,.(b-c)}{(b-c^+)\,¡\,.(b-c)} = \frac{b\,¡}{(b-c^+)\,¡}$$

1.- Cada aplicación $\alpha \in V_{b^<}^{c^<}$ produce, por extensión, b-c aplicaciones distintas $\beta \in V_{b^<}^{c^{+<}}$ tales que $\forall_{x<c}\ (\beta(x)=\alpha(x))$ y siendo $\beta(c)$ cada uno de los b-c elementos distintos de $b^< - \alpha(c^<)$, e inversamente

2.- Por lo supuesto, ya que $c < b$

4.3.- Siendo a=b

1- Las aplicaciones de V_B^A son biyecciones

2- $V_b^a = a\,¡$

En efecto:

Demostración de 1-

Por I-6.4.14

Demostración de 2-

$$V_b^a = \frac{b!}{(b-a)!} = \frac{a!}{(a-a)!} = \frac{a!}{0!} = a!$$

5.- Permutaciones Ordinarias

Dado un conjunto finito no vacío A de cardinal a; llamamos permutaciones ordinarias en A a las distintas biyecciones de A en A. Convenimos en representar al conjunto de tales biyecciones por P_A y al cardinal de tal conjunto, $P(A)^{\ominus}$, por P_a

Otras definiciones ligadas a la anterior:

Supuesto A bien ordenado por el orden $<$

a) Sucesiones e inversiones de una permutación

Dada cualquier permutación ordinaria $\alpha \in P_A$, llamamos sucesiones en α a cada elemento pareja del conjunto

$$S_\alpha = \{(x,y) \mid x<y \wedge \alpha(x)<\alpha(y)\}$$

Llamamos inversiones en α a cada elemento pareja del conjunto

$$Y_\alpha = \{(x,y) \mid x<y \wedge \alpha(x)>\alpha(y)\}$$

Y por medio de él definimos la aplicación $i:P_A \to N$, tal que $\alpha \in P_A \to i(\alpha) = Y_\alpha^{\ominus}$, que nos da el cardinal de las inversiones de cada permutación.

b) Permutaciones cíclicas

Una permutación α en A es una permutación cíclica si, siendo 0 y m respectivamente el mínimo y máximo en A, se cumple para cualquier $x \in A$:

1º.- Si $x<m$, $\alpha(x)=x^+$

2º.- Si $x=m$, $\alpha(x)=0$

c) Trasposiciones en A

Una permutación ordinaria α en A es una trasposición, si existen dos elementos distintos $b,c\in A$ tales que, para cualquier $x\in A$, se cumple:

1ª.- Si $x=b$, $\alpha(x)=c$

2ª.- Si $x=c$, $\alpha(x)=b$

3ª.- Si $x\notin\{b,c\}$, $\alpha(x)=x$

Cuya trasposición decimos es de b en c. En el caso de que $b^+=c$ decimos que la trasposición es sucesiva en b

Propiedades:

Siendo A un conjunto finito no vacío bien ordenado de cardinal a, -- que podemos considerarlo sumergido en el conjunto natural $N(A\subset N)$, y α, - β, $\gamma\in P_A$

5.1.- $P_a=a!$

En efecto:

$P_a=V_a^a=a!$

5.2.- Siendo 0 y m respectivamente los elementos mínimo y máximo en A; - $n,b\in N$ y representando $r(b,m+1)$ el resto entero de b entre m+1, se cumple para cualquier $x\in A$, siendo α una permutación cíclica

$\alpha^n(x)= r(x+n,m+1)$

En efecto:

Demostrémoslo por inducción particular sobre n en N

1ª.- Si $n=0$, $\alpha^n(x)=\alpha^0(x)\overset{1}{=} I_A(x)=x=r(x,m+1)= r(x+n,m+1)$

1.- Por A.I-VI-7.15 tenemos definido en P_A una operación producto, - con I_A como elemento neutro, que induce una operación potencia -

de exponentes naturales como se indica en II-6.

2º.- Si se cumple la propiedad para $n=s$, entonces se cumple para $n=s^{+}$

Demostración:

a) Si $s^{+}=1$

a.1) Siendo $x<m$

$\alpha^{s^{+}}(x)=\alpha(x)=x^{+}=(m+1).0+x^{+}=r(x+1,m+1)=r(x+s^{+},m+1)$

a.2) Siendo $x=m$

$\alpha^{s^{+}}(x)=\alpha(x)=0=r(x+1,m+1)=r(x+s^{+},m+1)$

b) Si $s^{+}>1$

$\alpha^{s^{+}}(x)=(\alpha^{s}.\alpha)(x)=\alpha(\alpha^{s}(x))=\alpha(r(x+s,m+1)=r(r(x+s,m+1)+1,m+1)\overset{1}{=}r(x+s^{+},$ -- $m+1)$

1.- Por II-3.32.7

5.2.1.- $\alpha^{m+1}=I_{A}$

En efecto:

Para cualquier $x\leq m$

$\alpha^{m+1}(x)=r(x+m+1,m+1)=x=I_{A}(x)$

5.3.- Siendo γ una trasposición

$\gamma.\gamma=I_{A}$

En efecto:

Si γ es una trasposición de b en c

1ª.- $(\gamma\cdot\gamma)(b)=\gamma(\gamma(b))=\gamma(c)=b=I_A(b)$

2ª.- $(\gamma\cdot\gamma)(c)=\gamma(\gamma(c))=\gamma(b)=c=I_A(c)$

3ª.- Siendo $x\notin \{b,c\}$

$(\gamma\cdot\gamma)(x)=\gamma(\gamma(x))=\gamma(x)=x=I_A(x)$

5.4.- Si $Y_\alpha\neq\emptyset$, entonces existe una trasposición sucesiva γ tal que --- $i(\gamma\cdot\alpha)=i(\alpha)-1$, siendo α una permutación cualquiera

En efecto:

a) Si fuese b la máxima primera componente de Y_α, entonces $(b,b^+)\in Y_\alpha$

Demostración:

Si $(b,b^+)\notin Y_\alpha$, entonces $\alpha(b)<\alpha(b^+)$ y como existe c tal que $b<c$ y -- $\alpha(b)>\alpha(c)$, resultaría que $b^+<c$, $\alpha(c)<\alpha(b)<\alpha(b^+)$ y por lo tanto $(b^+,c)\in Y_\alpha$ en contra de lo supuesto.

b) Si γ es la trasposición de b en b^+

$i(\gamma\cdot\alpha)=i(\alpha)-1$

Demostración:

Como $\alpha(b)>\alpha(b^+)$, $(\gamma\cdot\alpha)(b)=\alpha(\gamma(b))=\alpha(b^+)$ y $(\gamma\cdot\alpha)(b^+)=\alpha(\gamma(b^+))=\alpha(b)$, resulta que $(\gamma\cdot\alpha)(b)<(\gamma\cdot\alpha)(b^+)$; luego la pareja (b,b^+), cuyas componentes son los únicos elementos de A que tienen imágenes distintas respecto a las aplicaciones α y $\gamma\cdot\alpha$, es inversión respecto a la biyección α y sucesión respecto a $\gamma\cdot\alpha$

5.5.- Siendo α y β dos permutaciones ordinarias cualesquiera

$i(\alpha\cdot\beta)\in\dot{2}\Leftrightarrow i(\alpha)+i(\beta)\in\dot{2}$

En efecto:

Demostrémoslo por inducción particular sobre $i(\alpha)$ en N

1º.- Si $i(\alpha)=0$, entonces α es la identidad ($\alpha=I_A$) y $i(\alpha.\beta)\in\dot{2}\Leftrightarrow i(\beta)\in\dot{2}\Leftrightarrow$ -- $i(\alpha)+i(\beta)\in\dot{2}$

2º.- Si se cumple la propiedad para $i(\alpha)=n$, entonces se cumple para --- $i(\alpha)=n^+$

Démostración:

Siendo γ una trasposición sucesiva tal que $i(\gamma.\alpha)=i(\alpha)-1$ (5.4), entonces

$$i(\alpha.\beta)\in\dot{2} \overset{1}{\Leftrightarrow} i(\gamma.(\alpha.\beta))\notin\dot{2}\Leftrightarrow i((\gamma.\alpha).\beta)\notin\dot{2} \overset{2}{\Leftrightarrow} i(\gamma.\alpha)+i(\beta)\notin\dot{2} \overset{3}{\Leftrightarrow} i(\alpha)+i(\beta)\in\dot{2}$$

1.- Al ser γ una trasposición sucesiva, la permutación $\gamma.(\alpha.\beta)$ tiene una inversión más o menos que la permutación $\alpha.\beta$

2.- Por lo supuesto, ya que si $i(\alpha)=n^+$, entonces $i(\gamma.\alpha)=n$

3.- Por ser $i(\gamma.\alpha)=i(\alpha)-1$

5.6.- Si γ es una trasposición cualquiera, entonces $i(\gamma)\notin\dot{2}$

En efecto:

Si γ es la trasposición en b,c ($b<c$), por ser $\gamma(b)=c>b=\gamma(c)$, entonces las únicas inversiones de γ son:

1º.- Todas las parejas con primera componente b y segunda cada elemento de los $c-b$ elementos del segmento $]b,c]$

2º.- Todas las parejas con segunda componente c y primera cada elemento de los $c-b$ elementos del segmento $[b,c[$

Como la pareja (b,c) es la única que pertenece simultáneamente a -- las parejas de 1º y 2º, el número total de ellas será $i(\gamma)=2.(c-b)-1\notin\dot{2}$

5.7.- Llamando T al conjunto de las trasposiciones sucesivas en P_A y -- siendo α una permutación cualquiera distinta de la identidad ($i(\alpha)\neq 0$), entonces existe un número natural n y una aplicación $\tau : n^{<} \to T$ tales que

$$\alpha = \prod_{x<n} \tau_x$$

En efecto:

Demostrémoslo por inducción particular sobre $i(\alpha)$ en $N-\{0\}$ que tiene a 1 como mínimo

1º.- Si $i(\alpha)=1$, entonces $\alpha \in T$ y $\alpha=\tau_o=\prod_{x<1} \tau_x=\prod_{x<n} \tau_x$

En que $n=1$ y $\tau_o=\alpha$

2º.- Si se cumple la propiedad para $i(\alpha)=s$, entonces se cumple para --- $i(\alpha)=s^+$

Demostración:

Siendo γ una trasposición sucesiva tal que $i(\gamma.\alpha)=i(\alpha)-1$, entonces

$$\alpha=I_A.\alpha=(\gamma.\gamma).\alpha=\gamma.(\gamma.\alpha)\overset{1}{=}\gamma.\prod_{x<s} \tau_{1+x}=\tau_o.\prod_{x<s} \tau_{1+x}=\prod_{x<s^+} \tau_x$$

1.- Por lo supuesto, ya que $i(\gamma.\alpha)=s$

5.7.1.- Si $\alpha=\prod_{x<n} \tau_x$

$i(\alpha)\in\dot{2} \Leftrightarrow \sum_{x<n} i(\tau_x)\in \dot{2}$

En efecto:

Demostrémoslo por inducción particular sobre n en $N-\{0\}$ que tiene a 1 como mínimo

1º.- Si $n=1$

$$i(\alpha)\in\dot{2}\Leftrightarrow i(\tau_o)\in\dot{2}\Leftrightarrow \sum_{x<1} i(\tau_x)\in \dot{2}\Leftrightarrow \sum_{x<n} i(\tau_x)\in \dot{2}$$

2º.- Si se cumple la propiedad para $n=s$, entonces se cumple para $n=s^+$

Demostración:

$$i(\alpha)\in \dot{2} \Leftrightarrow i(\prod_{x<s^+} \tau_x)\in \dot{2} \Leftrightarrow i(\prod_{x<s} \tau_x\cdot\tau_s)\in \dot{2} \Leftrightarrow i(\prod_{x<s} \tau_x)+ i(\tau_s)\in \dot{2} \Leftrightarrow \sum_{x<s} i(\tau_x)+i(\tau_s)\in \dot{2} \Leftrightarrow \sum_{x<s^+} i(\tau_x)\in \dot{2}$$

6.- Combinaciones con repeticion

Dados dos conjuntos finitos no vacíos A y B, bien ordenados y de cardinales a y b; llamamos combinaciones con repetición de A en B a las distintas aplicaciones de A en B que sean homomorfismos del buen orden normal en A al buen orden normal en B.

Convenimos en representar al conjunto de tales aplicaciones por CR_B^A y al cardinal de tal conjunto, $(CR_B^A)^{\ominus}$, por CR_b^a

Propiedades:

Siendo A,B conjuntos finitos no vacíos bien ordenados, $a=A^{\ominus}$ y $b=B^{\ominus}$

6.1.- $CR_B^A \subset VR_B^A$

En efecto:

Por definición de CR_B^A, VR_B^A y existir aplicaciones de A en B no homomorfas

6.2.- $CR_{b+1}^a + CR_b^{a+1} = CR_{b+1}^{a+1}$

En efecto:

$$CR_{b+1}^a + CR_b^{a+1} = (CR_{(b+1)^<}^{a^<})^{\ominus}+(CR_{b^<}^{(a+1)^<})^{\ominus} \overset{1}{=} (CR_{(b+1)^<}^{a^<} \cup CR_{b^<}^{(a+1)^<})^{\ominus} \overset{2}{=} (\{\alpha| \alpha\in CR_{(b+1)^<}^{(a+1)^<} \wedge \alpha(a)=b\}\cup\{\alpha| \alpha\in CR_{(b+1)^<}^{(a+1)^<} \wedge \alpha(a)\neq b\})^{\ominus}=(CR_{(b+1)^<}^{(a+1)^<})^{\ominus}= CR_{b+1}^{a+1}$$

1.- Por IV-2.1.14

2.- Porque $\{\alpha| \alpha\in CR_{(b+1)^<}^{(a+1)^<} \wedge \alpha(a)=b\}\cong CR_{(b+1)^<}^{a^<}$, ya que a cada α del primer conjunto asociamos una y solamente una β del segundo tal que

$\forall_{x<a}\ (\alpha(x)=\beta(x))$ e inversamente ,y además $\{\alpha \mid \alpha \in CR_{(b+1)^<}^{(a+1)^<} \wedge \alpha(a)\neq b\} = CR_{b^<}^{(a+1)^<}$

6.3.- $CR_b^a = \binom{b+a-1}{a}$

En efecto:

Demostrémoslo por inducción particular sobre b+a en el conjunto --- $N-\{0,1\}$ que tiene a 2 como mínimo

1·.- Si $b+a=2$, entonces $b=1$ y $a=1$, y $CR_b^a = CR_1^1 \overset{1}{=} 1 = \binom{1}{1} = \binom{1+1-1}{1} = \binom{b+a-1}{a}$

1.- La única aplicación de $CR_{1^<}^{1^<}$ es la que asigna al elemento 0 el elemento 0

2ª.- Si se cumple la propiedad para $b+a=c$, entonces se cumple para $b+a=c^+$

Demostración:

Supuesto $b+a=c^+$

a) Si $a=1$

$CR_b^a = CR_b^1 \overset{1}{=} b = \binom{b}{1} = \binom{b+1-1}{1} = \binom{b+a-1}{a}$

1.- Cada aplicación de $CR_{b^<}^{1^<}$ asigna al elemento 0 cada uno de los elementos de $b^<$ e inversamente

b) Si $b=1$

$CR_b^a = CR_1^a \overset{1}{=} 1 = \binom{a}{a} = \binom{1+a-1}{a} = \binom{b+a-1}{a}$

1.- La única aplicación de $CR_{1^<}^{a^<}$ es la que asigna 0 a cada elemento de $a^<$

c) Si $1<a$ y $1<b$

$CR_b^a \overset{1}{=} CR_b^{a-1} + CR_{b-1}^a \overset{2}{=} \binom{b+(a-1)-1}{a-1} + \binom{(b-1)+a-1}{a} = \binom{b+a-2}{a-1} + \binom{b+a-2}{a} \overset{3}{=} \binom{b+a-1}{a}$

1.- Por 6.2

2.- Por lo supuesto, ya que $b+(a-1)=(b-1)+a=c$, puesto que $b+a=c^{+}$, puesto que $b+a=c^{+}$

3.- Por 2.5

7.- Combinaciones ordinarias

Dados dos conjuntos finitos no vacíos A y B, bien ordenados y de cardinales a y b en que $a\leq b$; llamamos combinaciones ordinarias de A en B a las distintas aplicaciones de A en B que sean homomorfas del buen orden estricto en A al buen orden estricto en B.

Convenimos en representar al conjunto de tales aplicaciones por C_B^A y al cardinal de tal conjunto, $(C_B^A)^{\oplus}$, por C_b^a

Propiedades:

Siendo A,B conjuntos finitos no vacíos bien ordenados, $a=A^{\oplus}$ y $b=B^{\oplus}$

7.1.- Siendo $a\leq b$

$C_B^A \subset CR_B^A$

En efecto:

Por definición de C_B^A, CR_B^A y por existir aplicaciones de A en B homomorfas respecto a los órdenes normales y no serlo respecto a los órdenes estrictos

7.2.- Siendo $a\leq b$

$C_B^A \subset V_B^A$

En efecto:

Por definición de C_B^A, V_B^A, por I-2.2 y por existir aplicaciones de A en B inyectivas y no homomorfas respecto a los órdenes estrictos

7.3.- Siendo $a<b$

$$C_b^a + C_b^{a+1} = C_{b+1}^{a+1}$$

En efecto:

$$C_b^a + C_b^{a+1} = (C_{b^<}^{a^<})^{\ominus} + (C_{b^<}^{(a+1)^<})^{\ominus} \overset{1}{=} (C_{b^<}^{a^<} \cup C_{b^<}^{(a+1)^<})^{\ominus} \overset{2}{=} (\{\alpha|\ \alpha\in C_{(b+1)^<}^{(a+1)^<} \wedge \alpha(a)= b\} \cup \{\alpha|\ \alpha\in C_{(b+1)^<}^{(a+1)^<} \wedge \alpha(a)\neq b\})^{\ominus} = (C_{(b+1)^<}^{(a+1)^<})^{\ominus} = C_{b+1}^{a+1}$$

1.- Por IV-2..1.14

2.- Porque $\{\alpha|\ \alpha\in C_{(b+1)^<}^{(a+1)^<} \wedge \alpha(a)=b\} \cong C_{b^<}^{a^<}$, ya que a cada α del primer conjunto asociamos una y solamente una β del segundo tal que --- $\forall_{x<a}(\alpha(x)=\beta\ (x))$ e inversamente, y además $\{\alpha|\ \alpha\in C_{(b+1)^<}^{(a+1)^<} \wedge \alpha(a)\neq b\}$ $= C_{b^<}^{(a+1)^<}$

7.4.- Siendo $a\leqslant b$

$$C_b^a = \binom{b}{a}$$

En efecto:

Demostrémoslo por inducción particular sobre b en el conjunto N-{0} que tiene a 1 como mínimo

1ª.- Si $b=1$, entonces $a=1$ y

$$C_b^a = C_1^1 \overset{1}{=} 1 = \binom{1}{1} = \binom{b}{a}$$

1.- La única aplicación de $C_{1^<}^{1^<}$ es la que asigna al elemento 0 el -- elemento 0

2ª.- Si se cumple la propiedad para $b=c$, entonces se cumple para $b=c^+$

Demostración:

Supuesto $b=c^+$

a) Si $a=1$

$C_b^a = C_b^1 \overset{1}{=} b = \binom{b}{1} = \binom{b}{a}$

1.- Cada aplicación de $C_{b^<}^{1^<}$ asigna al elemento 0 cada uno de los ele menetos de $b^<$ e inversamente

b) Si a=b

$C_b^a \overset{1}{=} 1 = \binom{b}{a}$

1.- La única aplicación de $C_{b^<}^{a^<}$ es la identidad

c) Si 1<a y a< b

$C_b^a \overset{1}{=} C_{b-1}^{a-1} + C_{b-1}^{a} \overset{2}{=} \binom{b-1}{a-1} + \binom{b-1}{a} \overset{3}{=} \binom{b}{a}$

1.- Por 7.3, ya que a-1< b-1

2.- Por lo supuesto, ya que b-1=c puesto que $b=c^+$, y además a-1<b-1, a< b-1

3.- Por 2.5

7.5.- Siendo a< b

$\alpha \in V_B^A \Leftrightarrow \exists_{\beta \in C_B^A} \exists_{\gamma \in P_{\beta(A)}} (\alpha = \beta . \gamma)$

En efecto:

Supuestos A y B bien ordenados respectivamente por los órdenes < y <'

a) $\alpha \in V_B^A \Rightarrow \exists_{\beta \in C_B^A} \exists_{\gamma \in P_{\beta(A)}} (\alpha = \beta . \gamma)$

Demostración:

$\alpha \in V_B^A \Rightarrow \alpha \in V_{\alpha(A)}^A \overset{1}{\Rightarrow} \alpha \in C_{\alpha(A)}^A \wedge \exists_{\gamma' \in P_{\alpha(A)}} (\gamma' \in C_{\alpha(A)}^{\alpha(A)}) \overset{2}{\Rightarrow} \exists_{\beta \in C_B^A} \exists_{\gamma' \in P_{\beta(A)}} (\alpha . \gamma' = \beta) \overset{3}{\Rightarrow}$

$\exists_{\beta \in C_B^A} \exists_{\gamma \in P_{\beta(A)}} (\alpha = \beta . \gamma)$

1.- Siendo α(A) bien ordenado por el orden <, inducción por isomor--

fía del orden $<$ en A, y γ' el isomorfismo de $\alpha(A),<$ en $\alpha(A),<'$

2.- El producto de los dos homomorfismos α de $A,<$ en $\alpha(A),<$ y γ' de $\alpha(A),<$ en $\alpha(A)$, $<'$ nos da un homomorfismo β de A, $<$ en $\alpha(A)$, - $<'$y por lo tanto de A, $<$ en B, $<'(\alpha(A)\subseteq B)$, y ademas $\beta(A)=$ --- $(\alpha.\gamma')(A)=\gamma'(\alpha(A))=\alpha(A)$

3.- Siendo $\gamma=\gamma'^{-1}$

b) $\exists_{\beta\in C_B^A}\ \exists_{\gamma\in P_{\beta(A)}}\ (\alpha=\beta.\gamma)\Rightarrow\ \alpha\in V_B^A$

Demostración:

Supuesto cierto el antecedente, entonces lo es el consecuente por -- A.I-VI-7.12, ya que β es inyectiva (I-2.2) y γ es inyectiva por ser γ -- una biyección

8.- <u>Permutaciones con repetición</u>

Dados dos conjuntos finitos no vacíos A y B de cardinales a y b en - que $a\geq b$, una familia $(\beta_x)_{x\lhd b}$ en que $\beta\in(N-\{0\})^N$ y $\sum_{x\lhd b}\beta_x=a$; llamamos permutaciones con repetición de A en B con la repetición $(\beta_x)_{x\lhd b}$, despues - de identificar A con $a^<(A\cong a^<)$ y B con $b^<$ $(B\cong b^<)$, a cada una de las aplicaciones $\alpha\in VR_B^A$ tales que $\forall_{x\lhd b}\ (\alpha^{-1}(\{x\}))^{\oplus}=\beta_x)$

Convenimos en representar al conjunto de tales aplicaciones por --- $P_{B,(\beta_x)_{x\lhd b}}^A$ y al cardinal de tal conjunto, $(P_{B,(\beta_x)_{x<b}}^A)^{\oplus}$, por $P_{b,(\beta_x)_{x<b}}^a$

Propiedades:

Siendo A y B conjuntos finitos no vacíos, $a=A^{\oplus}$, $b=B^{\oplus}$ y β una aplicación de N en N-{0}

8.1.- Siendo $\sum_{x\lhd b}\beta_x=a$

$P_{B,(\beta_x)_{x\lhd b}}^A\subset V\ R_B^A$

En efecto:

Por definición de $P^{A}_{B,\ (\beta_x)_{x<b}}$, VR^{A}_{B} y por existir aplicaciones de A - en B distintas de las permutaciones con repetición de A en B con la re-- petición $(\beta_x)_{x<b}$

8.2.- Siendo $\sum\limits_{x<b} \beta_x = a$

$$P^{a}_{b,(\beta_x)_{x<b}} = \frac{a!}{\prod\limits_{x<b} (\beta_x !)}$$

En efecto:

Demostrémoslo por inducción particular sobre b en el conjunto N-{0} que tiene a 1 como mínimo

1º.- Si b=1, entonces $a=\beta_0$ y

$$P^{a}_{b,(\beta_x)_{x<b}} \overset{1}{=} 1 = \frac{\beta_0 !}{\beta_0 !} = \frac{a!}{\prod\limits_{x<b} (\beta_x !)}$$

1.- La única aplicación de $P^{\beta_0^<}_{1^<,(\beta_x)_{x<1}}$ es la que asigna 0 a cada elemento de $\beta_0^<$

2º.- Si se cumple la propiedad para b=c, entonces se cumple para $b=c^+$

Demostración:

$$P^{a}_{c^+,(\beta_x)_{x<c^+}} \overset{1}{=} P^{a-\beta_c}_{c,(\beta_x)_{x<c}} \cdot C^{\beta_c}_{a} \overset{2}{=} \frac{(a-\beta_c)!}{\prod\limits_{x<c} (\beta_x !)} \cdot \frac{a!}{\beta_c ! \cdot (a-\beta_c)!} = \frac{a!}{\prod\limits_{x<c} (\beta_x !) \cdot \beta_c !}$$

$$= \frac{a!}{\prod\limits_{x<c^+} (\beta_x !)}$$

1.- Porque $\alpha \in P^{a^<}_{c^{+<},(\beta_x)_{x<c^+}} \Rightarrow \forall_{\gamma \in C^{\beta_c^<}_{a^<}} \exists_{\alpha',\alpha''} (\alpha = \alpha' \cup \alpha'' \wedge \alpha' \in P^{a^< - \gamma(\beta_c^<)}_{c^<,(\beta_x)_{x<c}}$ $\wedge\ \alpha'' \in VR^{\gamma(\beta_c^<)}_{\{c\}})$, siendo α' y α'' las restricciones respectivas de α a los conjuntos $a^< - \gamma(\beta_c^<)$ y $\gamma(\beta_c^<)$ y ser además $\sum\limits_{x<c} \beta_x = a - \beta_c$ $((a^< - \gamma(\beta_c^<))^{\ominus} = a - \beta_c)$; por lo tanto, para cada $\gamma \in C^{\beta_c^<}_{a^<}$, existen $P^{a-\beta_c}_{c,(\beta_x)_{x<c}}$ aplicaciones α distintas ($P^{a-\beta_c}_{c,(\beta_x)_{x<c}}$ aplicaciones α' y una aplicación α'')

2.- Por lo supuesto y por 6.4