MATEMATICAS
Y
CIENCIAS

CONJUNTO N DE NUMEROS NATURALES

Autor: ANTONIO GONZALEZ CARLOMAN

1.– Conjunto natural

Llamamos conjunto natural E al definido recursivamente de la siguiente manera:

1.º– $\emptyset \in E$

2.º– $x \in E \Rightarrow \{x\} \in E$

$(E = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots)$

Propiedades:

1.1. Es un orden estricto en la E la relación $<$ definida por:

$x < y$ si y sólo si x está generado antes que y

En efecto:

a) *Irreflexividad:*

$\forall_x (x \nless x)$ (E es el universo del discurso)

Ya que:

Un elemento no está generado antes que sí mismo.

b) *Transitividad:*

$x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$

Ya que:

Si x está generado antes que y e y lo está antes que z, entonces x está generado antes que z

1.2. El orden $<$ en E es una buena ordenación.

En efecto:

Dado un subconjunto A no vacío de E, siempre habrá en A un elemento generado antes que los demás, es decir, mínimo en A

1.3. El orden $<$ en E es totalmente ordenado:

$\forall_{x,y}\ (x = y \ \ \vee x < y \vee y < x)$

En efecto:

La buena ordenación implica el orden total, puesto que si dos elementos cualesquiera a, $b \in E$ son distintos ($a \neq b$), entonces el conjunto no vacío $\{a, b\}$ admite un mínimo que puede ser a, en cuyo caso $a < b$, o b, en cuyo caso $b < a$.

2.– Elementos notables en E

a) *Elemento cero*

Es el mínimo de E y lo representamos en adelante por 0 ($0 = \emptyset$)

b) *Elemento siguiente de otro*

Siendo a un elemento cualquiera de E, llamamos siguiente de él, y lo representamos por a^+, al elemento generado por a ($a^+ = \{a\}$)

c) *Elemento precedente de otro*

Siendo a cualquier elemento de E distinto de cero ($a \neq 0$), llamamos precedente de él, y lo representamos por a^-, al elemento que genera al a ($\{a^-\} = a$)

Propiedades:

2.1. El elemento a^+ es el mínimo de $a^> = \{x| \ x > a\}$

Por definición, $a^+ > a$ y además

$x > a \Rightarrow x \geqslant a^+$

Ya que, supuesto $x > a$ (x generado después de a), entonces x coincidirá con $\{a\}$ o estará generado después de él.

2.2. Siendo $a \neq 0$, a^- es el máximo de $a^< = \{x| \ x < a \}$

En efecto:

Por definición, $a^- < a$ y además

$x < a \Rightarrow x \leqslant a^-$

Ya que, supuesto $x < a$ (x generado antes que a), entonces x coincidirá con a^- o estará generado antes que él.

2.3. Siendo $a \neq 0$

$a^{-+} = a$

En efecto:

$a^{-+} = \{a^-\} = a$

2.4. $a^{+-} = a$

En efecto:

$\{a^{+-}\} = \{a\}$

Ya que:

$\{a^{+-}\} = a^+ = \{a\}$

2.5. $a < b \Longleftrightarrow a^{+} \leqslant b$

En efecto:

a) $a < b \Longrightarrow a^{+} \leqslant b$ (2.1.)

b) $a^{+} \leqslant b \Longrightarrow a < b$

Demostración:

$a^{+} \leqslant b \Longrightarrow a < a^{+} \wedge a^{+} \leqslant b \Longrightarrow a < b$

2.6. $a < b \Longleftrightarrow a \leqslant b^{-}$

a) $a < b \Longrightarrow a \leqslant b^{-}$ (2.2.)

b) $a \leqslant b^{-} \Longrightarrow a < b$

Demostración:

$a \leqslant b^{-} \Longrightarrow a \leqslant b^{-} < b \Longrightarrow a < b$

2.7. $a < b \Longleftrightarrow a^{+} < b^{+}$

En efecto:

$a < b \Longleftrightarrow a^{+} \leqslant b \Longleftrightarrow a^{+} \leqslant b^{+-} \Longleftrightarrow a^{+} < b^{+}$

2.8. Siendo $a \neq 0$

$a < b \Longleftrightarrow a^{-} < b^{-}$

En efecto:

$a < b \Longleftrightarrow a^{-+} < b^{-+} \Longleftrightarrow a^{-} < b^{-}$

2.9. Siendo A cualquier subconjunto no vacío de E; si A está mayorado, entonces tiene un máximo

En efecto:

Al no ser vacío el conjunto de mayorantes de A, entonces éstos tienen un mínimo, a, que será el máximo de A

Ya que:

a) $\forall_{x \in A} \ (x \leqslant a)$

Por ser a mayorante de A

b) $a \in A$

Porque si $a \notin A$, entonces:

$a \notin A \Longrightarrow \forall_{x \in A} \ (x < a) \Longrightarrow \forall_{x \in A} \ (x \leqslant a^{-})$

Y se cumpliría $\forall_{x \in A} \ (x \leqslant a^{-})$, siendo, en este caso, a^{-} perteneciente al conjunto de los mayorantes de A de los cuales a es mínimo y a la vez $a^{-} < a$, lo cual es imposible.

2.10. Inducción particular.

Siendo A un conjùnto en E ($A \subseteq E$), si se cumplen:

1.º– $0 \in A$

2.º– $x \in A \Longrightarrow x^{+} \in A$

entonces $A = E$

En efecto:

$E \subseteq A$, ya que

$x \in E \Rightarrow x \in A$

Demostración:

$x \in E \Rightarrow x \in A \vee x \notin A \overset{1}{\Rightarrow} x \in A \vee (m \notin A \wedge m^{-} \in A) \overset{2}{\Rightarrow} x \in A \vee (m \notin A \wedge m \in A) \Rightarrow x \in A$

1.– Supuesto $x \notin A$, sería no vacío el conjunto de los elementos no pertenecientes al conjunto A y llamamos m a su mínimo ($m \notin A$), que será distinto de cero, ya que $0 \in A$

2.– Por 2.º, $m^{-} \in A \Rightarrow m^{-+} = m \in A$

2.11. Inducción general.

Siendo A un conjunto en E, si se cumple:

$\forall_x (x < y \Rightarrow x \in A) \Rightarrow y \in A$

entonces $A = E$

(si perteneciendo al conjunto A todos los elementos menores que y, resulta que también pertenece al conjunto A; entonces $A = E$)

En efecto:

$E \in A$, ya que

$x \in E \Rightarrow x \in A$

Demostración:

$x \in E \Rightarrow x \in A \vee x \notin A \overset{1}{\Rightarrow} x \in A \vee [m \notin A \wedge \forall_x (x < m \Rightarrow x \in A)]$

$\overset{2}{\Rightarrow} x \in A \vee (m \notin A \wedge m \in A) \Rightarrow x \in A$

1.– Llamamos m al mínimo de los elementos no pertenecientes al conjunto A

2.– Por lo supuesto, $\forall_x (x < m \Rightarrow x \in A) \Rightarrow m \in A$

En la práctica, la demostración de $\forall_x (x < y \Rightarrow x \in A) \Rightarrow y \in A$ se hace en dos etapas

1.º– Suponiendo que $y = 0$

En cuyo caso basta con demostrar que $0 \in A$, ya que la expresión $\forall_x (x < 0 \Rightarrow x \in A)$ se cumple para cualquier conjunto A

2.º– Suponiendo que $y \neq 0$

3.– Conjunto N de números naturales

Siendo $N = \{0, 0^{+}, 0^{++}, \ldots\}$ el conjunto de los signos que representan (mencionan) a cada uno de los elementos del conjunto natural E (no confundamos el signo que usamos con lo que menciona), es evidente que este conjunto N de signos es biyectivo con el conjunto natural E, y si inducimos el orden del conjunto E al conjunto N (definición por isomorfía), tendrá el orden $<$ en N las mismas propiedades que en E. A este conjunto N lo llamamos conjunto de los números naturales.

Si un conjunto A fuese biyectivo con N, diríamos que A es enumerable o representable por N y se identificaría con él.

4.– Conjunto finito e infinito

Un conjunto A es finito si es vacío o si existe $a \in N$, de modo que A sea biyectivo con $a^<$. En este caso diríamos que A es enumerable o representable por $a^<$ y se identificaría con él. Cada biyección de A con $a^<$ induciría en A un orden distinto (distinta manera de contar A)

Un conjunto es infinito si no es finito.

5.– Cardinales finitos

Dado el conjunto F(E) de subconjuntos finitos de un conjunto infinito E, definimos en F(E) una relación que representaremos por $\cong$, de la siguiente manera:

Siendo A, $B \in F(E)$, $A \cong B$ si y sólo si existe una biyección f: $A \Rightarrow B$

Esta relación es de equivalencia, ya que siendo A, B, $C \in F(E)$, se cumplen las siguientes propiedades:

1.º– Reflexividad

$A \cong A$

En efecto:

La aplicación identidad I_A: $A \Rightarrow A$ es una biyección.

2.º– Simetría

$A \cong B \Rightarrow B \cong A$

En efecto:

Si f: $A \Rightarrow B$ es una biyección, también lo es f^{-1}: $B \Rightarrow A$

3.º– Transitividad

$A \cong B \wedge B \cong C \Rightarrow A \cong C$

En efecto:

Si f: $A \Rightarrow B$ y g: $B \Rightarrow C$ son biyecciones, también lo es f . g: $A \Rightarrow C$

Convenimos en presentar la clase de equivalencia definida por el conjunto Á por A^θ, a la que llamamos cardinal del conjunto A, al conjunto cociente o conjunto de los cardinales finitos mediante $F_C(E)$

Propiedades:

5.1. Es biyectiva la aplicación $\alpha : F_C(E) \Rightarrow N$ tal que

$X^\theta \in F_C(E) \Rightarrow \alpha\ (X^\theta) = x$

en que $X \cong x^<$

En efecto:

1.º– Es suprayectiva

$x \in N \Rightarrow \exists_{X^\theta}\ [\alpha\ (X^\theta) = x]$

Demostración:

$x \in N \overset{1}{\Longrightarrow} \exists_{X \in F(E)} (X \cong x^{<}) \Longrightarrow \exists_{X^{\theta}} [\alpha (X^{\theta}) = x]$

1.– Demostremos este paso por inducción particular sobre x

1.º– Se cumple el paso para $x = 0$

Ya que $\emptyset \cong 0^{<}$

2.º– Si se cumple el paso para $x = a$, entonces se cumple para $x = a^{+}$

Demostración:

Supuesto existente un conjunto $A \in F(E)$ tal que $A \cong a^{<}$, entonces siendo B cualquier elemento del conjunto E-A, se cumpliría $A \cup \{b\} \cong a^{+<}$

2.º– Es inyectiva

$\alpha (X^{\theta}) = \alpha (Y^{\theta}) \Longrightarrow X^{\theta} = Y^{\theta}$

Demostración:

$\alpha (X^{\theta}) = \alpha (Y^{\theta}) \overset{1}{\Longrightarrow} X \cong x^{<} \wedge Y \cong y^{<} \wedge x = y \Longrightarrow X \cong Y \Longrightarrow X^{\theta} = Y^{\theta}$

1.– Siendo $\alpha (X^{\theta}) = x$, $\alpha (Y^{\theta}) = y$

Esta biyección nos permite representar a los cardinales finitos mediante los números naturales y aplicarles su orden y sus operaciones. En resumen, identificar los cardinales finitos con los naturales.