INDICE DE BANZHAF-COLEMAN: UN MODELO DE VOTACION

M. Elisa Amo Saus
M. Emilia García Pérez

M. Elisa Amo Saus.
Licenciada en Ciencias Matemáticas.
Profesora ayudante de la Facultad de Económicas y Empresariales.

M. Emilia García Pérez.
Licenciada en Ciencias Matemáticas.
Profesora ayudante de la Facultad de Económicas y Empresariales

PLANTEAMIENTO

Los índices de poder se estudian como una alternativa de solución a un juego cooperativo.

En este trabajo intentaremos dar los resultados más interesantes y métodos de cómputo del índice de Banzhaf-Coleman.

El índice de B-C (1965) está definido para juegos simples y está basado en calcular el número de *pivotaciones*, para cada jugador.

Definición.– $\Gamma = (N,v)$ es un *juego simple*, si la normalización (0,1) de (N,v), denotada por (N,v^*) satisface:

a) $v^*(k) = 1$ ó $v^*(k) = 0 \quad \forall \; k \subset N$.

b) Si $v^*(k) = 1$ entonces k se llama coalición ganadora y si $v^*(k) = 0$ k se llama coalición perdedora.

c) (N,v) es super-aditivo.

d) $v^*(N) = 1$

Definición. Llamamos *pivotación para el jugador i* a cada coalición $k \subset N$ con $i \in k$ tal que k gana y $k - \{i\}$ pierde.

Es decir la participación del jugador i en la coalición k es decisiva para convertirla en ganadora.

Definición. Sea (N,v) un juego simple normalizado (0,1); sea ϑ_i el número de pivotaciones para el jugador i en juego v, definimos el *índice normalizado de Banzhaf-Coleman* como:

$$\beta_i(v) = \frac{\vartheta_i}{\sum_{i=1}^{n} \vartheta_j}$$

Para obtener una teoría coherente de este índice pondremos:

$$\vartheta_i(v)=\sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\in S}}[v(S)-v(S-\{i\})]$$

la cual coincide con la definición anterior de ϑ_i.

Si v es un juego simple notaremos que v(S) − v(s − {i}) será nulo excepto cuando S es una pivotación para el jugador i. La ventaja de esta nueva expresión de ϑ_i (v) es que es válida para juegos en general, incluso cuando no son simples.

En un juego n-personal, el índice de B-C viene dado por:

$$\psi(v)=2^{1-n}\,\vartheta(v) \qquad \text{ó} \qquad \psi(v)=\sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\in S}}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)[v(S)-v(S-\{i\})]$$

donde 2^{n-1} es el número de posibles coaliciones en las que el jugador i puede estar presente.

Una nueva forma de expresar el valor de B-C sería con las *extensiones multilineales* (E.M.L.)

Una extensión multilineal para un juego v es:

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{S\subset N}\left\{\prod_{i\in S}x_i\prod_{i\notin S}(1-x_i)\right\}v(S)$$

derivando respecto de x_i

$$f_i(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\in S}}\prod_{\substack{i\in S\\ i\neq j}}x_j\prod_{\substack{i\notin S\\ i\neq j}}(1-x_j)v(S)-\sum_{\substack{T\subseteq N\\ i\notin T}}\prod_{\substack{j\in N\\ i\neq j}}x_j\prod_{\substack{j\notin N\\ i\neq j}}(1-x_i)v(T)$$

siendo T = S − {i}

$$f_i(\bar{x})=\sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\in S}}\prod_{j\in S}x_j\prod_{\substack{j\notin S\\ i\neq j}}(1-x_j)[v(S)-v(S-\{i\})]$$

es un campo escalar definido sobre el cubo $[0,1]^N$ de dimensión n.

Si calculamos $f_i(1/2,\dots,1/2)$ obtendremos el índice de B−C.

$$f_i\left(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}\right)=\sum_{S\subset N}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}[v(S)-v(S-\{i\})]$$

Basándonos en las propiedades de las E.M.L. expondremos algunos teoremas referentes al índice de *Banzah-Coleman.*

Teorema 1.– Sean v y w juegos con N como conjunto de jugadores y sean α y β escalares, entonces:

$$\psi(\alpha v+\beta w)=\alpha\psi(v)+\beta\psi(w)$$

Teorema 2.– Sean v y w juegos con conjuntos de jugadores disjuntos M y N respectivamente y $v \oplus w$ es la composición de Von-Newman-Morgenstern, entonces para cada $i \in M$ o $j \in N$

$$\psi_i(v \oplus w) = \psi_i(v)$$

$$\psi_j(v \oplus w) = \psi_j(w')$$

Teorema 3.– Si el jugador i es inútil para el juego v, entonces

$$\psi_i(v) = 0.$$

APLICACION PARADIGMATICA 1: PARLAMENTO ANDALUZ

Describiremos a grandes rasgos la composición, organización y funcionamiento del Parlamento Andaluz.

El Estatuto de Andalucía, siguiendo el modelo constitucional, establece exactamente la composición del Parlamento, 109 diputados.

El Derecho parlamentario, reconoce una serie de órganos internos de las Cámaras que suelen agruparse en dos tipos: los órganos de gobierno y los de trabajo. Prácticamente todos han sido recogidos por el Estatuto Andaluz; el Presidente, la Mesa y la Junta de Portavoces entre los primeros; el Pleno y las Comisiones entre los segundos. También se ha creado la Diputación Permanente.

Procedimiento de elaboración y aprobación de las leyes:

1.– La iniciativa privada.
2.– Presentación de enmiendas.
3.– Informe de la ponencia y dictamen de la Comisión.
4.– Deliberación en el Pleno y aprobación definitiva de la ley.
5.– Retirada de los proyectos y proposiciones de ley.
6.– Fase conclusiva: promulgación y publicación de las leyes de la Comunidad Autónoma.

Nota.– Los puntos 5 y 6 no son necesarios para el trabajo puesto que no aportan nada al modelo de votación, se han expuesto a título ilustrativo para terminar de describir el proceso.

El modelo que estudiamos es un juego simple y formado por cuatro jugadores: PSOE, PP, IU y PA, donde el PSOE es un dictador. La influencia de cada partido en el Parlamento Andaluz viene reflejada en la siguiente tabla:

PARTIDOS	DIPUTADOS	%
PSOE	61	55.96
PP	27	24.77
IU	11	10.09
PA	10	9.17
	109	100

PSOE - Partido Socialista Obrero Español.
PP - Partido Popular.
IU - Izquierda Unida.
PA - Partido Andalucista.

Suponemos que los miembros de un partido votan lo mismo.

Calculamos ahora el índice de B-C normalizado para cada jugador.

$$\beta_i (v) = \frac{\vartheta_i}{\sum_{j=1} \vartheta_j}$$

donde ϑ_i es el número de pivotaciones para el jugador i.
i,j = PSOE, PP, IU, PA.

En el juego v una coalición S es ganadora si PSOE $\in$ S.

Por tanto las coaliciones que son pivotaciones del PSOE son: [PSOE], [PSOE, PP], [PSOE, IU], [PSOE, PA], [PSOE, PP, IU], [PSOE, PP, PA], [PSOE, IU, PA], [PSOE, PP, IU, PA] y así tendremos:

$$\vartheta_{PSOE} = 8 \quad \vartheta_{PP} = 0 \quad \vartheta_{IU} = 0 \quad \vartheta_{PA} = 0$$

$$\sum \vartheta_j = 8$$

Como ya tenemos las pivotaciones pasamos a calcular el índice:

$$\beta_{PSOE} = 1 \qquad \beta_{PP} = \beta_{IU} = \beta_{PA} = 0$$

APLICACION PARADIGMATICA 2: PARLAMENTO VASCO

Ahora presentaremos otro nuevo juego simple representando el Parlamento Vasco. Básicamente éste se rige por el mismo reglamento que el Andaluz. Para la aprobación de una ley es necesaria la mayoría absoluta.

La diferencia más relevante de este Parlamento con el anterior es que aquí no hay ningún partido con mayoría absoluta, por tanto en nuestro juego no tendremos ningún jugador que sea un dictador. Tendremos siete jugadores, en la siguiente tabla viene presentada la distribución por partidos.

PARTIDOS	DIPUTADOS	%
PSE-PSOE	18	24
PNV	17	22.66
HB	13	17.33
EA	14	18.66
EE	9	12
CP	2	2.66
CDS	2	2.66
	75	100

PSOE - Partido Socialista Obrero Español.
PNV - Partido Nacionalista Vasco.
HB - Herri Batasuna.
EA - Eusko Alkartasuna.
EE - Euskadiko Esquerra.
CP - Coalición Popular. (Actualmente Partido Popular)
CDS - Centro Democrático y Social.

Para la aprobación de una ley se necesitan 38 votos, es decir, al menos en cada coalición tiene que estar uno de los siguientes partidos: PSOE, PNV, HB, EA, suponiendo que todos los miembros de un mismo partido votan lo mismo.

Veamos el número de pivotaciones:

$$\vartheta_{PSOE} = 26 \quad \vartheta_{PNV} = 26 \quad \vartheta_{HB} = 22 \quad \vartheta_{EA} = 22$$
$$\vartheta_{EE} = 22 \quad \vartheta_{CP} = 2 \quad \vartheta_{CDS} = 2$$

Calculamos el índice de B–C para cada jugador de este juego u, utilizamos la misma fórmula que en el ejemplo anterior:

$$\sum \vartheta_j = 122 \qquad \text{j = PSOE, PNV, HB, EA, EE, CP, CDS.}$$

$$\beta_{PSOE} = \beta_{PNV} = \frac{26}{122} = 0.2131147$$

$$\beta_{HB} = \beta_{EA} = \beta_{EE} = \frac{22}{122} = 0.1803278$$

$$\beta_{CP} = \beta_{CDS} = \frac{2}{122} = 0.0163934$$

COMENTARIOS SOBRE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

En el juego v visto en la primera aplicación observamos que, tenemos un jugador que es un "dictador" y los tres restantes son jugadores "inútiles", es decir, no tienen capacidad de hacer ganar a una coalición. Por tanto según observamos en el gráfico del final el índice de B–C para el jugador dictador vale uno y cero para el resto. Con esto, concluimos que en un juego de votación donde haya un partido con mayoría absoluta, el índice de B–C me reafirma el poder absoluto que tiene ese partido.

En el juego u de la segunda aplicación, no hay ningún jugador con poder de veto como ocurría en el caso anterior, ni tampoco hay jugadores inútiles. Así al calcular este índice nos proporciona más información que en el juego v. Observamos en el gráfico del final que dos partidos, teniendo distinto número de diputados, tienen el mismo poder a la hora de tomar una decisión. Este es el caso del PSOE y PNV. Igual ocurre para los partidos HB, EA y EE, notando que aquí la diferencia de número de diputados es mayor.

(Ver gráficos en la página siguiente)

BIBLIOGRAFIA

G. OWEN. "Game Theory". Academics Press. 1982.

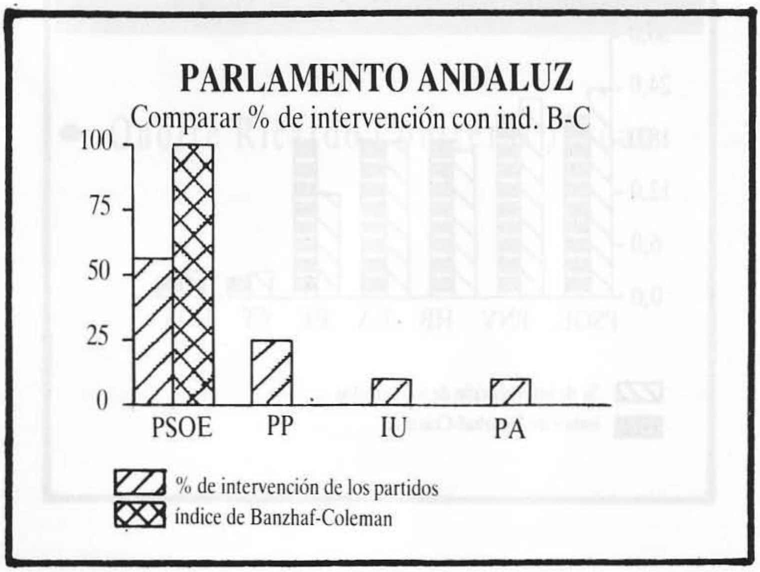
J.W. FRIEDMAN. "Game Theory with aplications to Economics". Oxford University Press. 1986.

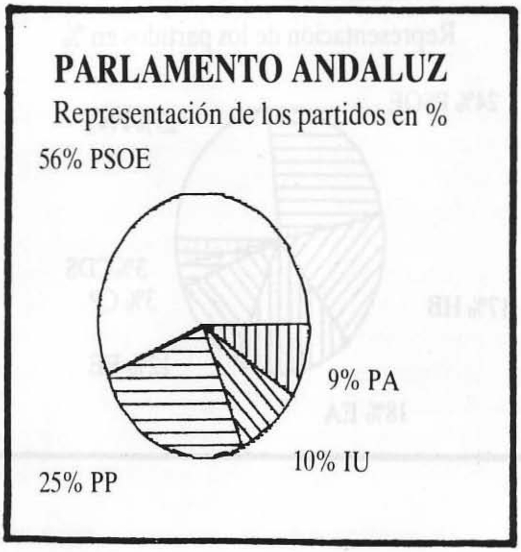
A. RUIZ, G. RUIZ-RICO, M. BONACHELA. "El Estatuto de Andalucía II. Parlamento". Ed.: ARIEL 1990.

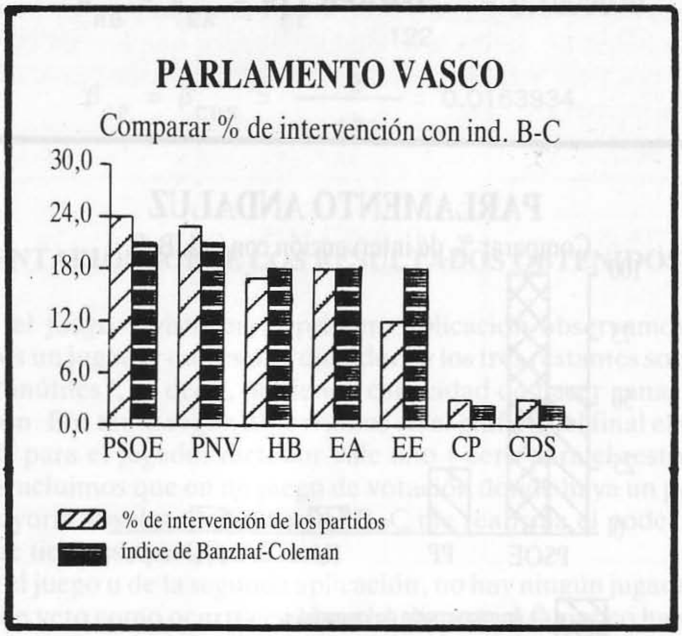
"Legislación de las autonomías". Ed.: TECNOS.

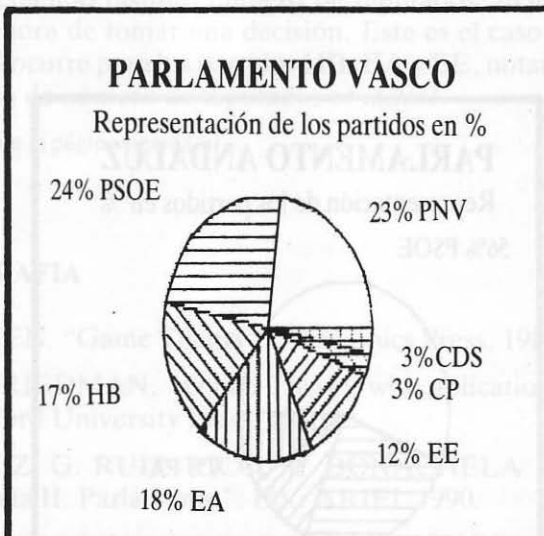
Periódico "El País" días: 26-VI-1990, 1-XII-1986.

GRAFICOS


PARLAMENTO ANDALUZ
Comparar % de intervención con ind. B-C
100
75
50
25
0
PSOE
PP
IU
PA
% de intervención de los partidos
índice de Banzhaf-Coleman


PARLAMENTO ANDALUZ
Representación de los partidos en %
56% PSOE
9% PA
10% IU
25% PP


PARLAMENTO VASCO
Comparar % de intervención con ind. B-C
30,0
24,0
18,0
12,0
6,0
0,0
PSOE
PNV
HB
EA
EE
CP
CDS
% de intervención de los partidos
índice de Banzhaf-Coleman


PARLAMENTO VASCO
Representación de los partidos en %
24% PSOE
23% PNV
3% CDS
3% CP
17% HB
12% EE
18% EA