UN METODO PARA HALLAR LA PROYECCION ORTOGONAL DE UN VECTOR SOBRE UN SUBESPACIO DE R^m DOTADO DE UN PRODUCTO ESCALAR

Eduardo Jiménez Moreno

Eduardo Jiménez Moreno es profesor titular de universidad y doctor ingeniero industrial.

El problema que aquí se considera puede introducirse con el siguiente caso particular:

Considérese el sistema

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \qquad (1)$$

de m ecuaciones lineales con n incógnitas, en el que éstas corresponden a los valores desconocidos que toman en un determinado momento unas variables de un sistema físico (intensidad de una corriente eléctrica, desplazamiento de un cuerpo, etc.), mientras que los términos independientes b_i proceden de las lecturas de unos aparatos de medida (voltímetros, amperímetros, dinamómetros, etc.). Se supone que los coeficientes a_{ij} son constantes, es decir, que no varían los parámetros del sistema físico (resistencias, coeficientes elásticos de los muelles, etc.)

Con notación matricial más cómoda se puede representar el sitema (1) por

$$A.x = b \qquad (1')$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

son matrices respectivamente de $R^{(m,n)}$, $R^{(n,1)}$ y $R^{(m,1)}$.

Puede ocurrir que el sistema de ecuaciones considerado sea teóricamente compatible pero con los términos independientes obtenidos empíricamente sea incompatible. En este caso es razonable pensar que existe un error en las lecturas realizadas en los medidores y que los términos independientes han de ser distintos a los b_i obtenidos experimentalmente, aunque estén próximos a ellos. En esta situación hay que buscar unos $b_1', \ldots, b_m'$ (o un vector b') que hagan compatible el sistema (1) separándose lo menos posible de los $b_1, \ldots, b_m$. Esta última intención conviene precisarla más. Normalmente se intenta hacer mínima la suma de los cuadrados de los errores $(b_1-b_1')^2 + (b_2-b_2')^2 + \ldots + (b_m - b_m')^2$, o a veces la suma ponderada de los cuadrados de los errores $p_1.(b_1-b_1')^2 + p_2.(b_2-b_2')^2 + \ldots + p_m.(b_m-b_m')^2$ donde los p_i son todos números reales mayores de cero. En cualquiera de estos dos casos, hacer mínima la expresión indicada es equivalente a hacer mínima su raíz cuadrada, es decir, las expresiones anteriores se hacen mínimas cuando y sólo cuando se hacen mínimas $\sqrt{(b_1-b_1')^2+\ldots+(b_m-b_m')^2}$ en el primer caso o $\sqrt{p_1(b_1-b_1')^2+\ldots+p_m(b_m-b_m')^2}$ en el segundo.

Si en R^m se considera el producto escalar usual definido por

$$(x|y) = x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_my_m$$

así como su norma asociada

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}$$

entonces la expresión $\sqrt{(b_1-b_1')^2+\ldots+(b_m-b_m')^2}$ es igual a $\|b-b'\|_2$, es decir, la distancia euclídea entre b y b'.

Del mismo modo, si en R^m se consideran el producto escalar definido por

$$(x|y)' = p_1x_1y_1+p_2x_2y_2+\ldots+p_mx_my_m$$

y su norma asociada

$$\|x\|' = \sqrt{(x|x)'} = \sqrt{p_1x_1^2+p_2x_2^2+\ldots+p_mx_m^2}$$

entonces la expresión $\sqrt{p_1(b_1-b_1')^2+\ldots+p_m(b_m-b_m')^2}$ es igual a $\|b-b'\|'$ que es la distancia entre b y b' derivada de la norma $\|.\|'$.

Por tanto, estos dos casos particulares citados se pueden incluir en el problema general que consiste en encontrar un $b' \in R^m$ (identificando R^m con $R^{(m,1)}$) que cumpla las dos condiciones siguientes:

a) El sistema $A.x = b'$ es compatible.

b) Para todo $c \in R^m$ tal que $A.x = c$ es compatible se cumple $\|b-b'\| \leq \|b-c\|$, siendo $\|.\|$ una norma asociada a un producto escalar en R^m.

La elección de una norma u otra, o del producto escalar, suele depender de consideraciones físicas y de la precisión y fiabilidad de cada uno de los medidores.

Es claro que el conjunto formado por los $c \in R^m$ para los que $A.x = c$ es compatible es un subespacio vectorial (Im(A) o Sp(A)) generado por $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (columnas de A) ya que

$$A.x = c \Longleftrightarrow x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_nA_n = c$$

(Esto significa que $A.x = c$ es compatible si y sólo si c es combinación lineal de las columnas de A. Esto último equivale a que el subespacio generado por las columnas de A, $L[A_1,\ldots,A_n] = Im(A)$, y el subespacio $L[A_1,\ldots,A_n,c]$ generado por $A_1,\ldots,A_n,c$ son iguales. Y esto a su vez es cierto si y sólo si los dos tienen la misma dimensión (ya que uno está contenido en el otro). Como el rango de A, rg(A), es igual a la dimensión de $L[A_1,\ldots,A_n]$ y el rango de la matriz ampliada (A/c) lo es a la dimensión de $L[A_1,\ldots,A_n,c]$, este sencillo razonamiento demuestra que

$$A.x = c \text{ es compatible} \Longleftrightarrow rg(A) = rg(A/c)$$

que es el enunciado del conocido teorema de Rouché-Fröbenius).

Además para cualquier producto escalar que se considere, el teorema de la proyección ortogonal asegura que dados un vector $b \in R^m$ y un subespacio vectorial Im(A) existe un único elemento b' Im(A), tal que $\forall c \in Im(A)$ se cumple que $\|b-b'\| < \|b-c\|$, y este b' es el único punto de la intersección de Im(A) y $b + (Im(A))^{\perp}$. La norma $\|.\|$ es la asociada al producto escalar considerado. El vector b' se llama proyección ortogonal de b sobre Im(A).

Por consiguiente, las condiciones a) y b) antes mencionadas equivalen a la siguiente:

b' es la proyección ortogonal de b sobre Im(A)

A continuación se describe un método para determinar esta proyección ortogonal b'. Con el fin de facilitar su comprensión se supone en primer lugar que el producto escalar es el usual y posteriormente se considera el caso general de un producto escalar cualquiera. En lo que sigue $r = rg(A)$, y se supone que $0 < r < m$, pues los casos extremos con $r = 0$ ó $r = m$ son triviales ya que

$$r = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow b' = 0$$

$$r = m \Rightarrow Im(A) = R^m \Rightarrow b' = b$$

1. A partir de la matriz A se hacen transformaciones elementa-

les* con sus columnas hasta obtener otra matriz B en la que sus r primeras columnas son linealmente independientes y las n-r restantes,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{T.E.C.}} B = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline C & 0 \end{array}\right]$$

si existen, son nulas. Además la submatriz formada por las r primeras filas y r primeras columnas de B ha de ser la matriz unidad I_r (esto sólo es posible si las primeras r filas de A son linealmente independientes; de lo contrario, para conseguirlo hay que intercambiar las ecuaciones, y por ello las filas de A). La submatriz formada por los elementos de las m-r últimas filas y las r primeras columnas de B la representamos por C, por tanto $C \in R^{(m-r,r)}$.

Es claro, por la forma de obtener la matriz B, que las columnas de la matriz

$$\left[\begin{array}{c} I_r \\ \hline C \end{array}\right]$$

generan el mismo subespacio que las columnas de A, es decir generan el subespacio Im(A).

2. Considérese la matriz

$$D = \left[\begin{array}{c|c} I_r & -{}^tC \\ \hline C & I_{m-r} \end{array}\right] \in R^{(m,m)}$$

donde ${}^tC$ es la traspuesta de C e I_{m-r} es la matriz unidad de orden m-r. La matriz D es invertible ya que:

$$\det(D) = \left|\begin{array}{c|c} I_r & {}^tC \\ \hline C & I_{m-r} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline C & I_{m-r} \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{c|c} I_r & -{}^tC \\ \hline 0 & I_{m-r}+C.{}^tC \end{array}\right| =$$

$$= \det(I_{m-r}+C.{}^tC)$$

Para toda matriz C, $C.{}^tC$ es semidefinida positiva e $I_{m-r}+C.{}^tC$ es definida positiva (los valores propios de $I_{m-r}+C.{}^tC$ resultan al sumar la unidad a los valores propios de $C.{}^tC$, y por tanto son estrictamente positivos).

Por ello $\det(D) = \det(I_{m-r}+C.{}^tC) > 0$. Esto significa que la matriz D es invertible y sus columnas forman una base de R^m.

(*) Las transformaciones elementales son: intercambiar dos columnas, multiplicar una de ellas por un escalar no nulo, o sumar a una otra multiplicada por un escalar.

Además $$ {}^t\left[\frac{I_r}{C}\right] \cdot \left[\frac{-{}^tC}{I_{m-r}}\right] = \left[I_r \mid {}^tC \right] \cdot \left[\frac{-{}^tC}{I_{m-r}}\right] = 0 $$

lo que significa que las columnas de

$$ F = \left[\frac{-{}^tC}{I_{m-r}}\right] $$

son ortogonales con el producto escalar usual a las columnas de

$$ E = \left[\frac{I_r}{C}\right] $$

y puesto que éstas forman una base de Im(A), las columnas de F forman una base de su ortogonal $(\mathrm{Im}(A))^{\perp}$.

3. Considérese ahora el sistema compatible determinado

$$ \left[\begin{array}{c|c} I_r & -{}^tC \\ \hline C & I_{m-r} \end{array}\right] \cdot \left[\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2}\right] = \left[\frac{\bar{b}_1}{\bar{b}_2}\right] \qquad (2) $$

donde

$$ \bar{b}_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{bmatrix} \qquad \bar{b}_2 = \begin{bmatrix} b_{r+1} \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \bar{y}_1 \in R^r \qquad \bar{y}_2 \in R^{m-r} $$

La expresión (2) equivale a la siguiente

$$ \left[\frac{I_r}{C}\right] \cdot \bar{y}_1 + \left[\frac{-{}^tC}{I_{m-r}}\right] \cdot \bar{y}_2 = b \qquad (3) $$

en la que el primer sumando del término de la izquierda pertenece a Im(A) y el segundo sumando a $(\mathrm{Im}(A))^{\perp}$. Esto significa que la proyección ortogonal b' de b sobre Im(A) y la proyección ortogonal b'' de b sobre $(\mathrm{Im}(A))^{\perp}$ son:

$$ b' = \left[\frac{I_r}{C}\right] \cdot \bar{y}_1 \qquad b'' = \left[\frac{-{}^tC}{I_{m-r}}\right] \cdot \bar{y}_2 \qquad (4) $$

donde $\bar{y}_1$ e $\bar{y}_2$ corresponden a la solución del sistema (2).

Por ello, para determinar b' o b'' basta hallar $\bar{y}_1$ o $\bar{y}_2$ respectivamente. Además, al conocer uno de ellos, b' o b'', se obtiene inmediatamente el otro, ya que b'+b'' = b.

4. Para calcular $\bar{y}_1$ o $\bar{y}_2$ se puede proceder del siguiente modo:

Multiplicando por la izquierda los dos miembros de la igualdad

(3) por $[I_r / {}^tC]$ y por $[-C / I_{m-r}]$ se obtienen

$$\begin{aligned} (I_r + {}^tC.C).\bar{y}_1 &= \bar{b}_1 + {}^tC.\bar{b}_2 \\ (I_{m-r} + C.{}^tC).\bar{y}_2 &= \bar{b}_2 - C.\bar{b}_1 \end{aligned} \qquad (5)$$

Las matrices $(I_r + {}^tC.C) \in R^{(r,r)}$ y $(I_{m-r} + C.{}^tC) \in R^{(m-r,m-r)}$ son simétricas definidas positivas, por lo que para determinar b' a través de $\bar{y}_1$ o $\bar{y}_2$ basta resolver un sistema de Cramer con matriz de coeficientes simétrica definida positiva y de orden el mínimo de r y m-r (que siempre es menor o igual que $\frac{m}{2}$). Así por ejemplo, si el número de ecuaciones del sistema inicial (1) es m = 10 y el rango de la matriz A es r = 8, el orden del segundo sistema de (5) es 2. Resolviéndolo se obtiene $\bar{y}_2$, y por (4) se conoce b'', y b' = b-b''.

En resumen, cuando el producto escalar es el usual, un método para obtener la proyección ortogonal b' de un vector b R^m sobre el subespacio Im(A) consiste en:

I) Obtener C, y de paso también r, como se indica en 1.

II) Si $r \leq m-r$, resolver el primer sistema de (5)

$$(I_r + {}^tC.C).\bar{y}_1 = \bar{b}_1 + {}^tC.\bar{b}_2$$

y obtener b' como se indica en (4),

$$b' = \left[\frac{I_r}{C}\right].\bar{y}_1 \,.$$

Si $r > m-r$, resolver el segundo sistema de (5)

$$(I_{m-r} + C.{}^tC).\bar{y}_2 = \bar{b}_2 - C.\bar{b}_1$$

obtener b'' como se indica en (4) :

$$b'' = \left[\frac{-{}^tC}{I_{m-r}}\right].\bar{y}_2$$

y hacer b' = b-b''.

Si se considera el caso general de un producto escalar cualquiera en R^m el contenido del punto 1 anterior sigue siendo válido, pero en el punto 2 la matriz D hay que construirla de otro modo. Si P es la matriz del producto escalar respecto de la base canónica de R^m se puede sustituir la matriz D por la siguiente

$$D' = \left[\frac{I_r}{C} \,\middle|\, P^{-1}.\left[\frac{-{}^tC}{I_{m-r}}\right]\right] = [E \mid P^{-1}.F]$$

donde las matrices E y F son las mismas del punto 2 anterior.

Las columnas de E siguen formando una base de Im(A) y las m-r columnas de P^{-1}.F son linealmente independientes, porque lo son las de F, y además son ortogonales a las de E, ya que ${}^tE.P.(P^{-1}.F) = {}^tE.F = 0$, por lo que pertenecen al subespacio $(Im(A))^{\perp}$ que es de dimensión m-r. Por consiguiente, las columnas de $P^{-1}.F$ forman una base de $(Im(A))^{\perp}$ y las de la matriz D' una base de R^m, lo que significa que D' es invertible.

Si en el punto 3 anterior consideramos un sistema de ecuaciones análogo al (2) pero sustituyendo la matriz D de coeficientes por la D', la expresión (3) quedaría

$$E.\bar{y}_1 + P^{-1}.F.\bar{y}_2 = b \qquad (3')$$

Por ser D' invertible, existen unos únicos $\bar{y}_1$ e $\bar{y}_2$ que cumplen la condición (3'). Como además $E.\bar{y}_1$ pertenece a Im(A) y $P^{-1}.F.\bar{y}_2$ pertenece a $(Im(A))^{\perp}$, resulta que la proyección ortogonal b' de b sobre Im(A) y la b" de b sobre $(Im(A))^{\perp}$ son

$$b' = E.\bar{y}_1 \qquad b'' = P^{-1}.F.\bar{y}_2 \qquad (4')$$

Igual que en el caso anterior, para determinar b' o b" es suficiente hallar respectivamente $\bar{y}_1$ o $\bar{y}_2$, y conocido uno de ellos el otro se obtiene inmediatamente ya que b'+b" = b. Para calcular $\bar{y}_1$ e $\bar{y}_2$ se puede proceder del siguiente modo: multiplicando por la izquierda los dos miembros de (3') por ${}^tE.P$ y por ${}^tF$ se obtienen

$$\begin{aligned} ({}^tE.P.E).\bar{y}_1 &= {}^tE.P.b \\ ({}^tF.P^{-1}.F).\bar{y}_2 &= {}^tF.b = \bar{b}_2 - C.\bar{b}_1 \end{aligned} \qquad (5')$$

Aquí volvemos a tener dos sistemas con matrices de coeficientes simétricas definidas positivas (${}^tE.P.E$ es la matriz de Gram de las columnas de E, que son linealmente independientes, mientras que ${}^tF.P^{-1}.F = ({}^tF.P^{-1}).P.(P^{-1}.F) = {}^t(P^{-1}.F).P.(P^{-1}.F)$ es la matriz de Gram de las columnas de $P^{-1}.F$ que también son linealmente independientes. La última igualdad es cierta porque P es simétrica y por tanto también lo es P^{-1}). Además ${}^tE.P.E. \in R^{(r,r)}$ y ${}^tF.P^{-1}.F \in R^{(m-r,m-r)}$.

Obsérvese que los sistemas indicados en (5) y en (5') coinciden cuando el producto escalar es el usual, ya que en este caso la matriz P es la unidad I.

Resumiendo, el método expuesto para calcular la proyección ortogonal b' de un vector b de R^m sobre el subespacio Im(A), cuando la matriz respecto de la base canónica del producto escalar considerado en R^m es P, consiste en:

I) Obtener C, y al mismo tiempo r, como se indica en el punto 1. Las matrices E y F indicadas en 2 se obtienen inmediatamente a partir de la C.

II) Si r ‹ m-r, resolver el primer sistema de (5')

$$({}^t E.P.E).\bar{y}_1 = {}^t E.P.b$$

y obtener b' a partir de (4') : $b' = E.\bar{y}_1$.

Si r › m-r, resolver el segundo sistema de (5')

$$({}^t F.P^{-1}.F).\bar{y}_2 = \bar{b}_2 - C.\bar{b}_1$$

obtener b'' a partir de (4') : $b'' = P^{-1}.F.\bar{y}_2$

y hacer b' = b-b''.

Nota: Si el problema se plantea para hallar la proyección ortogonal de un vector b sobre un subespacio del que se conoce un sistema generador (no es necesario que sea base), se puede operar del mismo modo construyéndose una matriz A, en la que las colúmnas sean los elementos del sistema generador conocido.

Un paso importante de este método consiste en la obtención de una base de $(\mathrm{Im}(A))^{\perp}$ que está formada por las columnas de la matriz $P^{-1}.F$ (o de F si el producto escalar es el usual).

Ejemplo.

Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

determínese la proyección ortogonal b' de b sobre el subespacio de R^6 generado por las columnas de A, en los dos casos siguientes:

a) con el producto escalar usual,

b) con el producto escalar definido por

$$(x|y) = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+2x_4y_4+2x_5y_5+2x_6y_6$$

Solución:

Haciendo transformaciones elementales con las columnas de A se llega a la matriz

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

luego:

$$r = 4 \quad y \quad m-r = 2$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_2 - C.\bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

En el caso a) : (P=I)

$${}^tF.F = I_2 + C.{}^tC = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.\bar{y}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$b'' = F.\bar{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad b' = b - b'' = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En el caso b) :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$${}^tF.P^{-1}.F = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.\bar{y}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{y}_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$b'' = P^{-1}.F.\bar{y}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad b' = b - b'' = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

NOTACION

R^m.- Espacio vectorial de las m-uplas de números reales.

$R^{(m,n)}$.- Espacio de las matrices de m filas y n columnas con elementos reales. Aquí se identifican R^m y $R^{(m,1)}$.

${}^tA$.- Matriz traspuesta de la A.

$A_1,\ldots,A_n$.- Columnas de la matriz A.

$Im(A) = L[A_1,\ldots,A_n]$ subespacio de R^m generado por las columnas de $A \in R^{(m,n)}$. Se llama Imagen de A, identificando la matriz A con la aplicación lineal de R^n en R^m tal que la imagen de cada $x \in R^n$ es A.x. R^m.

$(Im(A))^{\perp}$.- Subespacio ortogonal de Im(A).

.- Si y sólo si (o equivale a).

$\Rightarrow$.- Implica.

$det(D) = |D|$.- Determinante de la matriz D.

$r = rg(A)$.- Rango de A.

BIBLIOGRAFIA

BELLMAN, R: *Introducción al análisis matricial*. Ed. Reverté.
FADDEEVA, V. N.: *Métodos de cálculo de álgebra lineal*. Ed. Mir.
GANTMACHER, F. R.: *Théorie des matrices*. Ed. Dunod.
RIAZA, R.: *Complementos de matemáticas*. Public. UNED.