EL CURRÍCULUM Y LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

Pilar Turégano Moratalla

Los enfoques actuales de la enseñanza universitaria tienden a dar a los estudiantes el **producto** *del pensamiento matemático en vez del* **proceso** *del pensamiento matemático.*

Skemp

Pilar Turégano Moratalla es Doctora en Ciencias Matemáticas, Profesora Titular de la Universidad de Castilla-La Mancha

1. INTRODUCCIÓN

DESDE el inicio de mi carrera docente, por los años 70, yo creía que la mejor manera de ayudar a mis alumnos en las clases de cálculo infinitesimal era presentarles los conceptos de una forma lógica y coherente. Y hasta tenía cierto éxito.

Cuando a finales de los 80 comienzo mi formación como investigadora en Educación Matemática, me doy cuenta de que los estudiantes con los que ya había trabajado aprendían para responder a preguntas estándar de una forma previsible, pero que si se examinaba su comprensión de una forma inusual, surgían dificultades. Y es que **una presentación lógica puede no ser adecuada para el desarrollo cognitivo del aprendizaje**.

Comienza, entonces, a preocuparme el hecho de los estudiantes sean capaces de realizar límites, derivadas e integrales correctamente y, sin embargo, consigan poca comprensión real de los procesos. Esto me hace pensar que, hasta que los estudiantes no tienen 16 años aproximadamente, no oyen ni siquiera hablar del infinito, de la idea de límite, etc.

La enseñanza del cálculo no pasa por una fase previa de carácter experimental. El resultado es que, a partir de ese momento, los estudiantes deben asimilar al mismo tiempo los fenómenos asociados a las apariciones del infinito y de los límites y los conceptos y teorías formales que los expresan y desarrollan matemáticamente. Interviene ahí una teoría que no tiene como función ordenar un conjunto rico en experiencias previas, simplemente porque tal conjunto no existe. Freudenthal (1973) ha puesto en evidencia las dificultades que resultan de este estado de cosas.

Tras un análisis exhaustivo de la bibliografía sobre las investigaciones en ese campo, he constatado que los estudiantes no tienen un rendimiento aceptable en los cursos de cálculo, ni siquiera en la universidad. Las causas que explican esta realidad las encontramos en el terreno epistemológico (Sierpinska, 1985a y b, 1987a y b, 1989), en el terreno didáctico (Orton, 1979, 1983a y b) y en el terreno psicológico (Tall y Vinner, 1981; Tall, 1990; Vinner, 1991).

En este artículo se realiza una síntesis de los documentos oficiales e informes de los profesionales en los que se habla de la importancia que siempre se le ha dado a la enseñanza del cálculo infinitesimal y de que existen dificultades de aprendizaje en los estudiantes con esta parte de la matemática, dificultades que han sido constatadas por las recientes investigaciones y que han conducido a proponer nuevos enfoques en el aprendizaje del cálculo y a justificar la necesidad de secuenciar el currículum atendiendo a la génesis histórica de los conceptos y haciendo uso de las nuevas tecnologías, que van a permitir a los estudiantes centrarse en los conceptos y procesos más que en el desarrollo de habilidades algorítmicas.

2. ACERCA DE LA NECESIDAD DE ENSEÑAR CÁLCULO

Aunque hay un amplio acuerdo sobre la importancia del cálculo como parte de las matemáticas, no ha existido a lo largo de la historia un acuerdo general acerca del mejor momento para presentarlo a los estudiantes ni sobre lo que debería abarcar.

El eminente educador matemático Nunn hizo el siguiente comentario sobre el cálculo:

> Cuando consideramos el lugar que ocupa el cálculo diferencial e integral, tenemos que protestar contra una tradición que prohibe a todos los alumnos, a excepción de los excepcionales, que tomen conciencia del más poderoso y atractivo de los métodos matemáticos. (Nunn, 1927)

El Informe *Spens* (véase *Board of Education*, 1938) incluía una clara recomendación sobre la enseñanza del cálculo en las escuelas:

> Mantenemos que las ideas del cálculo, tanto diferencial como integral, deberían alcanzarse por medio del gráfico y a través del cálculo en métodos algebraicos antes de que la mayoría de los estudiantes dejen la escuela.

También el Informe *Jeffery* (véase Incorporated Association of Assistant Masters, 1957) hace frente al tema del cálculo:

> Las ideas subyacentes a la diferenciación y a la integración no son difíciles de entender si se presentan en circunstancias sencillas y adecuadas. Surgen de forma natural y fácil de la consideración de los gráficos, que, con razón, ocupan ahora un lugar tan importante en la enseñanza elemental del tema.

Sin embargo, el School of Mathematics Project (1963) aplaza el estudio de la diferenciación y de la integración hasta el 6º curso. Posteriormente, otros profesores de matemáticas han hablado en favor de algo de cálculo para todos los estudiantes más capacitados.

> Existen personas que piensan que las ideas básicas son tan difíciles que el cálculo debería posponerse tanto como sea posible. Esta es una política equivocada. Se niega al estudiante (y a sus profesores de ciencias) una herramienta valiosa que es esencial para el trabajo de ciencias de 6º curso. Aunque ideas tales como «infinito» y «que tiende a un límite» son difíciles y requieren tiempo y paciencia, se pueden empezar con gran cantidad de trabajo preparatorio antes de 6º curso. (Marjoram, 1974)

Shuard y Neill (1977) manifiestan que las matemáticas son un recurso nacional y que deberían desarrollarse el máximo posible:

> ... el gobierno, la industria y los negocios comunican a menudo ideas cuantificables por gráficos, y por el hecho de que los conocimientos de cálculo ayudan a leer y entender esos gráficos por lo que el cálculo asume ese lugar importante. No nos podemos permitir el lujo, como nación, de no desarrollar esta habilidad matemática en nuestros estudiantes.

De que existen estudiantes capaces de hacer enormes progresos en el cálculo antes de los 16 años da cuenta el *Mathematics Primary Schools Council* (1966), que recoge trabajos exploratorios e investigaciones llevadas a cabo por estudiantes de 10 años que condujeron a pendientes y áreas bajo curvas. Se prescindió de la enseñanza formal. Se prescindió de la notación ininteligible. Sin embargo, las ideas esenciales, los aspectos realmente importantes, surgieron de forma natural en algunos estudiantes. Hay muchos otros estudiantes para los que las ideas subyacentes al cálculo serán inalcanzables antes de los 16 años.

Orton (1985), que ya había llevado a cabo estudios acerca de las dificultades sobre la comprensión del cálculo (Orton, 1979, 1983a, 1983b), recomienda que la enseñanza del cálculo comience permitiendo a los estudiantes «dibujar gráficos de funciones y hallar razones de cambio y áreas bajo gráficos por medio del dibujo». Los conceptos se deben introducir intuitivamente desde el primer momento. Recomienda el uso de la calculadora para introducir la integración por medio de suma de áreas rectangulares, obteniendo sucesiones de sumas que aproximan un límite. De esta forma, se da al estudiante la oportunidad real de investigar áreas bajo curvas a través de la simple aritmética solamente. Para Orton, el asunto crucial no es **cuándo** deberíamos enseñar cálculo, sino **cómo** deberíamos fomentar la comprensión del cálculo y del precálculo, según el nivel de logro del estudiante.

En nuestro país, de la necesidad de impartir cálculo en el Bachillerato también habla el Documento Curricular Base presentado por el MEC en el año 1989, en que se aprecia una notable diferencia con respecto al Diseño Curricular de años anteriores. En él se recomienda reemplazar las introducciones tradicionales al cálculo por una de carácter intuitivo, haciendo particular referencia a las aplicaciones. Hace, asimismo, alusión a la aparición y al uso generalizado en la sociedad actual de las nuevas tecnologías y de cómo su utilización en la enseñanza no debe repercutir solamente en la manera de enseñar, sino también en la propia selección de los contenidos.

3. NECESIDAD DE UN CAMBIO CURRICULAR EN EL CÁLCULO

El proponer un cambio curricular no es algo nuevo. Klein (1927) ya abogaba por un enfoque diferente en la enseñanza del cálculo, distinguiendo los siguientes criterios como necesarios a tener en cuenta en su aprendizaje:

- exposición intuitiva de consideraciones abstractas por medio de representaciones gráficas;
- dar importancia a la evolución histórica de los conocimientos científicos;
- presentación de algunos ejemplos de libros populares para caracterizar la diferencia entre los conceptos del gran público influidos por tales obras y los de los matemáticos profesionales;
- hacer resaltar el enlace entre teorías próximas y también con las investigaciones de los filósofos.

Considera, además, de extraordinaria importancia que todo ello sea conocido de los aspirantes al magisterio secundario,

> ... pues, al llegar a la práctica de la enseñanza, tropezarán con que los conceptos de los estudiantes son aquéllos vulgares, y si no conocen bien los Elementos intuitivos de la Matemática así como las relaciones entre las distintas ramas de ésta y entre ella y las demás ciencias, y, sobre todo, si no conocen el desarrollo histórico, les fallará siempre el terreno en que pisen, y una de dos: volverán su atención al campo de la Matemática pura más moderna y no serán entendidos por sus alumnos, o sucumbirán en la lucha, olvidando cuanto aprendieron en los cursos superiores y cayendo en la rutina de siempre. (Klein, 1927)

A partir de los estudios de Tall (1985) y Orton (1985) se comienza a defender con más ahínco un enfoque cognitivo del cálculo. Tall (1987) analiza los factores de este cambio paradigmático. Para él, los factores que provocan los cambios son recientes. Cita la llegada de los gráficos de alta resolución y afirma que los manipuladores simbólicos pueden acabar con todas las manipulaciones rutinarias del cálculo, en las que confían muchos estudiantes para obtener la mayor parte de las notas en los exámenes de cálculo. Defiende el uso del ordenador si se hace de un modo adecuado, y **justifica la necesidad de un currículum que haga comprender al estudiante los procesos que está utilizando.**

Heid (1988) lleva a cabo una investigación en la que, durante las doce primeras semanas de un curso de cálculo aplicado, dos clases de estudiantes de universidad (n = 39) estudiaron conceptos de cálculo utilizando programas de ordenador de gráficos y de manipulación de símbolos para llevar a cabo manipulaciones rutinarias. Sólo las tres últimas semanas se dedicaron al desarrollo de habilidades. Se analizaron apuntes de clase, entrevistas con los alumnos, notas de campo y resultados de tests para ver las pautas de la comprensión. Los estudiantes mostraron un mejor entendimiento de los conceptos del curso y tuvieron un rendimiento tan alto en un examen final de habilidades rutinarias como una clase de 100 estudiantes que habían practicado las habilidades durante quince semanas enteras.

El estudio abordaba dos cuestiones:

- ¿Pueden aprenderse los conceptos de cálculo sin el dominio previo o simultáneo de las usuales habilidades algorítmicas para calcular derivadas o integrales, o trazar curvas?
- ¿Cómo difiere la comprensión que tiene el estudiante de los conceptos y habilidades obtenidos en un curso centrado en los conceptos de la comprensión obtenida en un curso tradicional?

Las conclusiones hablan de que:

- Los estudiantes de las clases experimentales trataban los conceptos del cálculo con más detalle, con más claridad y con más flexibilidad que los estudiantes del grupo comparativo; aplicaron los conceptos del cálculo más adecuada y libremente.
- Como grupo, los estudiantes de la clase experimental eran más capaces que los de la clase comparativa de contestar a preguntas relacionadas con conceptos, lo que es una indicación de una capacidad más refinada para trasladar un concepto matemático de una representación a otra. Tuvieron, por otra parte, un rendimiento tan bueno en el examen final como el de la clase comparativa. Su rendimiento dio claramente a entender que una mínima y reducida atención al desarrollo de habilidades no era necesariamente perjudicial, ni siquiera en un test de habilidades. Este currículum centrado en los conceptos desafió la creencia popularmente mantenida de que los estudiantes no podían entender adecuadamente los conceptos sin dominio anterior, o al menos simultáneo, de la habilidades básicas. (Heid, 1988)

Para Heid, la instrucción matemática se debería concentrar en el significado y en los conceptos, en primer lugar; ese aprendizaje inicial se procesaría en profundidad y sería bien recordado. Se formaría una estructura cognitiva estable sobre la que se podría construir un desarrollo posterior de las habilidades.

Esta afirmación de Heid tiene bases sólidas, ya que se ha abogado largamente por la importancia de la comprensión conceptual (Begle, 1977), y la investigación es bastante constante en su conclusión de que el aprendizaje significativo tiene un impacto importante en la memoria (Brandsford, 1979; Krutetskii, 1976; Schmeck, 1981) así como en la transferencia (Mayer, Stiehl y Greeno, 1975). Por otra parte, no hay suficiente apoyo empírico que justifique la creencia de que el dominio debe o debería preceder a la comprensión de los conceptos afines (Fey, 1981; Kolata, 1981). La comunidad educativa matemática también ha sido cauta sobre cualquier sugerencia acerca de la separación del aprendizaje de las habilidades y de los conceptos (Gibb, 1977; Suydam y Dessart, 1980).

No hay duda de que existe un creciente cuerpo de investigación que aboga por el uso del ordenador en las clases de cálculo, invitando a un cambio curricular centrado en los conceptos (además de los ya citados, véase Palmiter, 1991; Shumway, 1990; Decker, 1989; Capuzzo y otros, 1988; Seidman y Rice, 1986; Mascarello y Winkelmann, 1986; Lane, Ollongren y Stoutemyer, 1986; Turégano, 1994).

Dreyfus (1990) argumenta que se pueden diseñar currícula para fomentar la formación de imágenes de concepto adecuadas en precálculo y cálculo. Los currícula hacen hincapié en los procesos y aspectos de los objetos de las nociones matemáticas a través de su carácter operativo. Utilizan modos visuales y analíticos de acción, y abordan, especialmente, las relaciones entre los diferentes modos. Parece ser que estos currícula logran realzar la formación de conceptos sin descuidar el desarrollo de las habilidades. Para lograr estos objetivos, se utiliza la técnica del ordenador debido:

- al modo natural de llevar a cabo el carácter operativo del currículum y a la facilidad con que se pueden abordar varios modos paralelamente, y
- a la clara ventaja del ordenador para presentar los modelos visuales.

En el documento del NCTM *Curriculum Standards para los 90*, y en los niveles 9-12, el estándar 13 se refiere a los fundamentos conceptuales del análisis, recomendando una exposición informal de los conceptos desde una perspectiva tanto gráfica como numérica, para que los futuros universitarios sean capaces de **... entender las bases conceptuales de límite, área bajo una curva...**

Este estándar no propone el estudio formal del análisis en la Escuela Secundaria para todos los estudiantes, ni siquiera para los futuros universitarios. Por el contrario, pide que los estudiantes tengan la oportunidad de investigar, de manera sistemática, aunque informal, las ideas centrales del análisis límite, área bajo una curva, derivada y pendiente de una recta tangente, que contribuyan a la profundización de sus estructuras conceptuales sobre funciones y las utilicen para representar y responder a preguntas acerca de fenómenos del mundo real.

Determinan que la docencia debe ser sumamente exploratoria y estar basada en experiencias numéricas y geométricas que aprovechen la tecnología de la calculadora y el ordenador. Las actividades lectivas deben tener como objetivo el que los estudiantes asimilen los puntales conceptuales básicos del análisis, y no la adquisición de técnicas procesuales.

4. INCONSISTENCIAS EN EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO

Es sabido que los estudiantes traen al aula experiencias prematemáticas que afectan a su comprensión de las matemáticas. Tall (1990) señala que las inconsistencias pueden darse en 3 áreas: la mente de los estudiantes, la propia matemática y el mensaje que se les transmite.

1. Las mentes de los estudiantes, profesores y matemáticos tienen experiencias y estructuras de creencia que no siempre son consecuentes, y pueden unir ideas matemáticas de forma idiosincrásica.
2. Las matemáticas contienen conceptos como los de «límite» e «infinito» que tienen significados complejos que pueden interpretarse de forma inconsecuente.
3. El mensaje puede estar formulado en un lenguaje que evoque ideas inadecuadas, y puede estar presentado en una secuencia que sea inadecuada para el desarrollo cognitivo.

Estos diferentes hilos se tejen en una compleja telaraña.

Un creciente cuerpo de investigación ha relacionado la mente con las matemáticas a través de lo que Tall y Vinner (1981) acuñaron con el término *concept-image*, e investigaciones más recientes se han concentrado en problemas de lenguaje y secuencialización del currículum (Tall, 1986; Turégano, 1994).

La secuencialización de los temas en el currículum de matemáticas se construye bajo la suposición implícita de que las ideas sencillas deben presentarse antes que las complicadas. Después de todo, este principio parece obvio y evidente. Pero, ¿lo es en realidad? Las implicaciones en la enseñanza del cálculo podrían consistir en que, en primer lugar, se estudiarían las sucesiones, el concepto de límite y el número real, para pasar a funciones sencillas, y, después, al estudio de la diferenciación y la integración. Pero, ¿es esto, de verdad, lo más adecuado? Tall afirma que prestamos un mal servicio a los estudiantes organizando el currículum de tal manera que las ideas sencillas se presenten en primer lugar y que se trabaje en un entorno que contiene regularidades que, en general, no se cumplen. Esto es plantar la semilla para conflictos cognitivos futuros. Lo que en principio puede parecer un fundamento adecuado para un desarrollo matemático lógico puede no ser un adecuado punto de partida para un desarrollo cognitivo. Es preciso llevar a cabo una secuencialización distinta del curriculum que permita una mejor comprensión de los conceptos.

En Turégano (1994) puede verse el ejemplo de cómo una iniciación al cálculo con el concepto de integral definida conduce a una mejor comprensión por parte del estudiante de ese concepto y del de límite. Debemos intentar proporcionar a los estudiantes experiencias de aprendizaje que les ayuden a construir sus propias imágenes de concepto de una manera lo suficientemente rica como para producir mejores intuiciones sobre las verdades probables en matemáticas. Para esto contamos con un nuevo recurso que nos permite otras formas de comunicación a través de visualizaciones: el ordenador. El ordenador no puede hacer que los conceptos complicados sean sencillos, pero puede proporcionar experiencias mucho más ricas que permitan verlos dentro de un concepto más amplio y más potente.

Hay dos maneras posibles de abordar el conflicto (que no son excluyentes mutuamente): una es investigar el conflicto cognitivo con vistas a estar preparados para enfrentarnos a él cuando éste ocurra; una segunda es dar una conceptualización más rica desde el principio con el fin de reducir el futuro conflicto, o, al menos, proporcionar la experiencia para situarlo en un determinado contexto. Comparto la idea de Tall en cuanto a diseñar nuestros propios programas de ordenador con la finalidad de proporcionar un contexto rico en el que se pueda explorar el proceso de construcción del concepto y discutir el propio concepto, un entorno que posibilite al usuario explorar tanto los ejemplos como los contraejemplos de un concepto matemático que le permita abstraer las propiedades generales que se hallan dentro de los ejemplos y que se contrastan con los contraejemplos. A un entorno diseñado de esta manera Tall lo llama «organizadores genéricos». Estos organizadores permiten investigar casos específicos con funciones que son mucho más complicadas que meros polinomios o combinaciones de funciones estándar, dando de esta forma una experiencia mucho más rica de por qué las cosas pueden «ir mal», así como de casos sorprendentes en los que «van bien».

Las pruebas a partir de una serie de estudios realizados hasta ahora (Blackett, 1987; Tall, 1986; Thomas, 1988, Turégano, 1994) muestran que el uso de organizadores genéricos en un contexto en que los conceptos son presentados por el profesor, discutidos con los alumnos y luego explorados por los alumnos solos supone grandes ventajas sobre los enfoques tradicionales.

5. EL MÉTODO GENÉTICO

En las décadas pasadas, se apoderó de las matemáticas una irrefrenable tendencia lógico-deductiva. Bourbaki se convirtió en una biblia para los matemáticos.

> La exclusiva interpretación deductiva tiene negativas consecuencias sobre los estudiantes, que se sienten engañados al hacerles creer que las matemáticas han sido creadas por grandes genios, que comenzaban con los axiomas y, por vía exclusivamente lógica, obtenían los teoremas y su demostración impecable. El estudiante que no puede funcionar de esta manera se llega a sentir humillado, acomplejado y desconcertado. (González, 1991)

Contra los peligros de este excesivo carácter lógico-deductivo en la matemática se alzaron algunas voces prestigiosas preocupadas por desentrañar la esencia de esta ciencia y ocupadas en mejorar la calidad de la transmisión de su conocimiento. Todos ellos hacen alusión al método genético, extraído de la Biología, y que intenta reconstruir el clima psicológico que envuelve cada momento creador que haya supuesto un salto cualitativo en la Historia de las Matemáticas. La aplicación de este método en la enseñanza ha sido reivindicada por grandes matemáticos y profesores de matemáticas. Pretende demostrar que, para la perfecta comprensión de un concepto determinado, el estudiante ha de repetir, a grandes rasgos, el proceso histórico que se ha desarrollado hasta la formulación actual del concepto.

Para Kline, la lógica siempre viene muy por detrás de la invención, y suele ser más difícil de alcanzar. Así, pues, la Historia de la Matemática sugiere, aunque no lo demuestre, que es más difícil el planteamiento lógico que el intuitivo.

> No se puede dudar de que las dificultades que los grandes matemáticos encontraron son también los obstáculos en los que tropiezan los estudiantes, y no puede tener éxito ningún intento de acabar con estas dificultades a base de palabrería lógica. (Kline, 1978)

En su argumentación contra la interpretación deductiva se apoya en la evidencia histórica, y se adhiere incondicionalmente al método genético.

> Cada persona debe pasar aproximadamente por las mismas experiencias por las que pasaron sus antepasados si quiere alcanzar el nivel de pensamiento que muchas generaciones han alcanzado. (Kline, 1978)

Naturalmente, esta repetición del proceso histórico no debe entenderse al pie de la letra.

Courant, en el prólogo de la obra de Boyer (1949), aboga por la necesidad de una búsqueda en las raíces históricas de la Matemática:

> Los maestros, estudiantes y los amantes del estudio en general que quieran comprender realmente las fuerzas y las formas de la Ciencia, han de tener alguna comprensión del estado presente del conocimiento como un resultado de la evolución histórica. De hecho, la reacción contra el dogmatismo en la enseñanza científica ha despertado un interés creciente hacia la Historia de la Ciencia. Durante las décadas recientes se han hecho grandes progresos en la investigación de las raíces históricas de la Ciencia en general y de la Matemática en particular.

Se puede considerar a Toeplitz (1963) como otro de los creadores del método genético. En el prefacio de su obra, su discípulo Köthe escribió, refiriéndose a la enseñanza del cálculo:

> El método genético es la guía más segura para este ascenso suave, que, de otra manera, no es fácil de encontrar. Seguid el curso genético, que es el camino que ha seguido el hombre en su comprensión de las Matemáticas, y veréis que la humanidad ha ido ascendiendo gradualmente desde lo más simple a lo más complejo. Importantes desarrollos ocasionales pueden ser tomados generalmente como indicadores de progresos metódicos precedentes. Los métodos didácticos pueden beneficiarse enormemente del estudio de la historia.

En la obra maestra de Lakatos (1976) podemos ver como éste se vale de la historia como contexto en el que basar su sermón:

> ... que las matemáticas, lo mismo que las ciencias naturales son falibles y no indubitables; que también crecen gracias a la crítica y a la corrección de las teorías, que nunca están enteramente libres de ambigüedades, y en las que siempre cabe la posibilidad de error o de omisión.

Lakatos aplica su análisis epistemológico, no a las matemáticas formalizadas, sino a las matemáticas informales: las matemáticas en proceso de crecimiento y descubrimiento, que es, obviamente, lo que matemáticos y estudiantes de matemáticas conocen como matemáticas. Argumenta que las filosofías dogmáticas de las matemáticas son inaceptables, y sostiene que las matemáticas informales son una ciencia en el sentido de Popper, que se desarrolla a través de un proceso de crítica y sucesivo refinamiento de las teorías nuevas que compiten entre sí.

Sin lugar a dudas, el impacto de su obra estriba en que presenta una imagen filosófica de las matemáticas que se encuentra manifiestamente en discordancia con el retrato que nos es presentado por la lógica y la metamatemática. El propósito de su obra fue el demostrar lo inadecuado del formalismo, presentando una imagen distinta: el retrato de una matemática viva y en crecimiento y no formalizada en axiomas formales. Rechaza el enfoque formalista o deductivista de las matemáticas, a las que identifica con su abstracción axiomática formal, y a las que niega carácter histórico, concibiéndolas como «un conjunto siempre creciente de verdades eternas e inmutables en el que no pueden entrar los contraejemplos, las refutaciones o la crítica». En oposición a esta concepción deductivista, que «esconde la lucha y oculta la aventura», Lakatos propone un nuevo y original enfoque heurístico.

Freudenthal (1983) también ha utilizado el análisis epistemológico de los conceptos matemáticos para establecer secuencias didácticas que contribuyen a la adquisición de los conceptos.

En Filloy (1981) se apunta hacia el papel que debiera jugar el análisis epistemológico e histórico en la práctica de la investigación en matemática educativa, para que, efectivamente, estemos aportando resultados en esta área. La historia, dice Filloy, ha recuperado, una vez más, su dimensión propia, tras haber sido relegada a su papel de puro pasatiempo para los matemáticos, y eso a pesar de que notables obras vieron la luz (Van der Waerden, 1954) y de que panoramas generales se vieron con buenos ojos (Boyer, 1968), alcanzando, incluso, a los libros de texto (Edwards, 1979).

De este reencuentro entre la Historia y la Epistemología, a través de la historia de las ideas, también la Didáctica de la Matemática ha empezado a sacar provecho. El nuevo acercamiento consiste en realizar análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con el método histórico-crítico, poner, después, a prueba los hallazgos teóricos en los sistemas educativos actuales, para, de esta experimentación y a base de resultados empíricos, volver a tener una nueva visión de la problemática de la historia de las ideas que corresponda a los resultados didácticos.

Mi preocupación por entender más profundamente las raíces de los conceptos fundamentales de la matemática, en concreto el concepto de área y su relación con la integral, es lo que me ha llevado a analizar la historia de la noción de área (Turégano, 1993) con la finalidad de ser utilizada para proponer nuevos acercamientos didácticos sobre la enseñanza del cálculo, y así poder realizar investigaciones sobre los obstáculos didácticos que se presentan al aprender esta materia.

6. SECUENCIALIZACIÓN DEL CURRÍCULUM DEL CÁLCULO

Cuando se nos plantea determinar cuál debe ser el currículum del Cálculo Infinitesimal, nos vienen a la memoria las palabras del matemático inglés Greenhill, quien en 1982 dijo que, al contemplar un bosque, uno no observa primero el crecimiento, sino lo que ha crecido. Esta cita creo que relaciona muy bien la idea fundamental del Cálculo Diferencial con la del Cálculo Integral, ya que el primero estudia el proceso de crecer y el segundo qué y cuánto creció.

Atendiendo a los libros de texto y al currículum de matemáticas de los cursos de Secundaria, que es donde se introducen por primera vez los conceptos del cálculo, hemos podido observar que existen dos corrientes distintas:

- aquéllos que definen la derivada y la integral como una aplicación del concepto de límite previamente estudiado (por ejemplo, Francia y España);
- aquéllos que plantean los conceptos de derivación e integración como primera introducción al concepto de límite (por ejemplo, algunos libros de texto de Gran Bretaña).

Desde un punto de vista estructural, el primer enfoque es el más lógico, ya que respeta las secuencias del desarrollo deductivo del cálculo infinitesimal. Sin embargo, hemos observado que el desarrollo deductivo no se corresponde con la génesis histórica del concepto de integración, que no sólo no ha seguido ese modelo lineal, sino que ha precedido con mucho al concepto riguroso de límite de una función.

Propongo una secuencialización del currículum del cálculo muy distinta a la que figura en los textos y currículum de nuestro país, pero que está más acorde con la génesis histórica: comenzar con la integral definida, independientemente de la diferenciación y motivada por el cálculo de áreas bajo curvas. Los argumentos que esgrimo para ello son los siguientes:

- Como principio general, es probable que, cuando una cosa se descubre antes que otra, la primera es más sencilla que la segunda. Más de mil años antes de que nadie conociera los métodos de la diferenciación, Arquímedes, ya estaba haciendo integrales definidas.
- La integral es una continuación de la idea de área, que los estudiantes conocen desde los primeros días de la escuela.
- El estudiante llega a convencerse realmente de que hay un número que mide el área, hecho que en mi propuesta es intuitivamente obvio para los estudiantes. La idea de límite necesaria para hallar la pendiente de una tangente a partir de la pendiente de una cuerda, es conceptualmente más difícil.
- El argumento matemático más importante para hacerlo así es que se impide a los estudiantes el considerar la integración principalmente como lo inverso de la diferenciación. Los estudiantes pueden ver entonces el teorema fundamental del cálculo que une la integración con la diferenciación como lo que realmente es: un robusto puente que une estas dos estructuras matemáticas aparentemente independientes.

La inmensa mayoría de los estudiantes no logra dar significado a ese proceso «inverso». Solamente una construcción de conceptos que se apoya en la intuición y visualización hace que esos sean accesibles para los estudiantes y les permite tener las ideas claras con respecto a la diferenciación como método para evaluar pendientes y la integración como un método para evaluar áreas.

Parece que este es el momento adecuado para abordar esta nueva secuencialización de los conceptos de cálculo, ya que la propuesta curricular de la LOGSE del año 1990 es clara con respecto al enfoque que se ha de dar al estudio del área y de la integral, en el sentido de que se explícita que se ha de construir la magnitud antes de definir la aplicación «medida», que permite asignarle un número. Por lo que se refiere al cálculo infinitesimal, recomienda empezar con un tratamiento intuitivo, a la vez que gráfico y analítico, de las funciones, e introducir el concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas bajo una curva.

Existen, por otra parte, estudios cuyas conclusiones hablan de la necesidad de un cambio de enfoque en el concepto de integral.

El punto de vista que, a menudo, es «impuesto» al estudiante de instituto y de universidad es el de la integral de Riemann, en la que el área ya no es definida como un objeto geométrico, sino como el resultado de un cálculo según un procedimiento dado. ¿Por qué no pensamos en la dificultad que puede suponer para el estudiante el relacionar el área con el proceso de sumación que permite sumar infinitas cantidades «infinitamente pequeñas»? Y, aunque sea una forma de razonar muy sugestiva y útil, frecuentemente, desde el punto de vista lógico, adolece del defecto de no poder atribuir un significado exacto al concepto de «cantidad infinitamente pequeña» (Schneider-Gilot, 1988).

Por otra parte, «parece que referirse a la integral como límite de una suma no responde a la lógica de los infinitésimos» (Cordero, (1987).

Orton (1983a), en su estudio sobre la comprensión que el estudiante tiene de la integración, concluye que los 4 ítems que trataban sobre la comprensión de la integración como límite de una suma constituyen el obstáculo principal.

¿Por qué no pensamos también en la dificultad de las tres magnitudes que hay presentes cuando definimos la integral de Riemann: los rectángulos, los segmentos a los que se reducen y el área curvilínea a determinar?

Se sabe, después de los estudios experimentales llevados a cabo por los psicólogos de la forma, que la percepción de un objeto no es reductible a la imagen que de éste se forma en la retina. La imagen es unívoca, pero la percepción puede desdoblarse. La percepción de un objeto no es la yuxtaposición pura y simple de las percepciones de sus partes; es una construcción mental compleja de la que pueden estudiarse ciertos determinantes. Cuando decimos a los estudiantes, por ejemplo, que los rectángulos se reducen a segmentos, estamos hablando de una manera sugerente de cómo se pintan las imágenes mentales de los estudiantes, no lo que se imprime realmente en sus retinas.

Teniendo en cuenta la propuesta de la LOGSE, las dificultades en la comprensión de los conceptos de cálculo en general y de la integral de Riemann en particular y la génesis histórica del concepto de integral (Turégano, 1993), que nos dice que es posible reconstruir el estudio de la integración tomando como punto de partida el cálculo de áreas planas, propongo un modelo teórico (Turégano 1991, 1992, 1994) basado en los estudios de Lebesgue (1928, 1931) acerca de magnitudes e integral, que utilizaré después en la elaboración de una propuesta didáctica para introducir el concepto de integral definida vía su definición geométrica a estudiantes de 1° de BUP.

Tanto la propuesta y su justificación matemática como la fase experimental y los datos obtenidos en dicha fase se encuentran recogidos en Turégano (1994).

REFERENCIAS

BEGLE, E. G. (1977): Basic skills in mathematics. *The NIE Conference on Basic Mathematical Skills and Learning*: vol 1. Contributed position papers, 13-18. Washington, DC: Esty (Ed), National Institute of Education.

BLACKETT, N. (1987): *Computer graphics and children's understanding of linear and locally linear graphs.* Unpublished master of science thesis. University of Warwick, England.

Board of Education (1938): *Report of the Consultative Committee on Secondary Education HMSO.*

BOYER, C. (1949): The History of the Calculus and its Conceptual Development. New York: Dover Publications.

— (1968): A History of Mathematics. New York: John Wiley.

BRANDSFORD, J. D. (1979): *Human cognition: Learning, understanding and remembering.* Belmont, CA: Wadsworth.

CAPUZZO, L. et al. (1988): The impact of new technologies on teaching calculus: a report of an experiment. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* **19**, 5, 637-657.

CORDERO, F. (1987): *El cálculo diferencial e integral como un solo concepto: la derivada.* Xalapa (Veracruz. México): Memorias del IX Congreso Nacional de la Asociación de Profesores de Matemáticas, 232-239.

DECKER, R. (1989): Discovering Calculus. *Mathematics Teacher*, **82**, 7, 558-563.

DREYFUS, T. (1990): Advanced Mathematical Thinking. In *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 113-134. Cambridge University Press.

EDWARDS, C. (1979): *The Historical Development of the Calculus.* New York: Springer-Verlag.

FEY, J. T. (1981): *Mathematics teaching today: Perspectives from three national surveys.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

FILLOY, E. (1981): Investigación en matemática educativa en México. Un reporte. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **2**, 233-256.

FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: Reidel.

— (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel.

GIBB, E. G. (1977): Response to question for discussion attheConference on Basic Mathematical Skills and Learning. *The NIE Conference on Basic Mathematical Skills and Learning: vol 1. Contributed position papers*, 57-61. Esty (Ed). Washington, DC: National Institute of Education.

GONZÁLEZ, P. M. (1991): Historia de la Matemática: integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, **9,** 3, 281-289.

HEID, M. K. (1988): Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, **19,** 1, 3-25.

«Incorporated Association of Assistant Masters» 1957, *The teaching of mathematics.* Cambridge University Press.

KLEIN, F. (1927): *Matemática Elemental vista desde un punto de vista superior*, vol. 1. Madrid: Biblioteca Matemática.

KLINE, M. (1978): *El fracaso de la matemática moderna.* Madrid: Siglo XXI.

KOLATA, G. B. (1981): A profile of Ronald L.Graham. *Two-Year College Mathematics Journal*, 12, 290-301.

KRUTETSKII, V. A. (1976): *The psycology of mathematical abilities in school children.* Chicago: University of Chicago Press.

LAKATOS, I. (1976): *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge: Cambridge University Press.

LANE, K., OLLONGREN, A. & STOUTEMYER, D. (1986): Computer-based Symbolic Mathematics for Discovery. In *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*, 133-146. Howson & Kahane (Eds). Cambridge: Cambridge University Press.

LEBESGUE, H. (1928): *Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives.* París: Éditions Jacques Gabay. (Reimpresión Gauthier-Villars et C^ie^ Éditeurs, 1989)

— (1931): *Measure and the integral.* Berkeley, (California): Holden-Day. (Reimpresión 1966)

MARJORAM, D. T. E. (1974): *Teaching Mathematics.* Heinemann.

MASCARELLO, M. & WINKELMANN, B. (1986): Calculus and the Computer. The Interplay of Discrete Numerical Methods and Calculus in the Education of Users of Mathematics: Considerations and experiences. In *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*, 120-132. Howson & Kahane (Eds). Cambridge: Cambridge University Press.

MAYER, R. E. et al. (1975): Acquisition of understanding and skill in relation to subjects' preparation and meaningfulness of instruction. *Journal of Educational Psychology*, 67, 331-350.

NCTM (1991): *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* S.A.E.M. Thales. Sevilla.

NUNN, T. P. L. (1927): *The Teaching of Algebra.* Longmans, Green & Co.

ORTON, A. (1979): An investigation into the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults. *Cognitive Development Research in Science and Mathematics*, 201-215.

— (1983a): Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.

— (1983b): «Students' understanding of differentiation». *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.

— (1985): When should we teach calculus? *Mathematics in Schools*, 14, 2, 11-15.

PALMITER, J. R. (1991): Effects of computer algebra systems on concept and skill acquisition in calculus. *Journal for Reasearch in Mathematics Education*, 22, 2, 151-156.

SCHMECK, R. R. (1881): Improving learning by improving thinking. *Educational leadership*, 38, 384-385.

SCHNEIDER-GILOT, M. (1988): *Des objets mentaux «aire et volume» au calcul des primitives*. (Tesis doctoral). Université Catholique de Louvain. Faculté des Sciences. Louvain La Neuve.

Schools Council (1966): *Mathematics in primary schools HMSO.*

School of Mathematics Project (1963): *Director's report, 1962-63, SMP.*

SEIDMAN, S. B. & RICE, M. D. (1986): A Fundamental Course in Higher Mathematics Incorporating Discrete and Continuous Themes. In *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*, 95-106. Howson & Kahane (Eds). Cambridge: Cambridge University Press.

SHUARD, H. & NEILL, H. (1977): *The Mathematics curriculum: from graphs to calculus*. Schools Council, University of Nottingham, Project 1973-77. London: Blackie.

SHUMWAY, R. (1990): Supercalculators and the Curriculum. *For the Learning of Mathematics*, **10**, 2, 2-9.

SIERPINSKA, A. (1985a): La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des Mathématiques. *Proceedings of the 37th CIEAEM's Meeting*, 73-93. Leiden.

— (1985b): Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactiques de Mathématics*, 6, 1, 5-67.

— (1987a): Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies on Mathematics*, 18, 4, 371-397.

— (1987b): Trying to overcome epistemological obstacles relative to limits in 17 years old humanities students. *Proceedings of the 38th CIEAEM's Meeting*, 183-193. Southampton.

— (1989): How & when attitudes towards mathematics & infinity become constituted into obstacles in students? *Proceedings of the 13th International Conference PME*, 166-173.

SUYDAM, M. & DESSART, D. J. (1980): Skill Learning. In *Research in Mathematics Education*, 207-243. R. Shumaway (Ed). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

TALL, D. (1985): Understanding the calculus. *Mathematics Teaching*, 110, 49-53.

— (1986): A graphical approach to integration. *Mathematics Teaching*, 114, 48-51.

— (1987): Whither Calculus? *Mathematics Teaching*, 118, 50-54.

— (1990): Inconsistencies in the learning of calculus and analysis. In *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 3 & 4, 49-63.

TALL, D. & VINNER, S. (1981): Concept image and concept de finition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

THOMAS, M. O. J. (1988): *A conceptual approach to the early learning of algebra using a computer.* Unpublished doctoral thesis, University of Warwick, England.

TOEPLITZ, O. (1963): *The calculus. A genetic approach.* Chicago: The University of Chicago Press.

TURÉGANO, P. (1991): *Propuesta didáctica para la integral definida.* IV J.A.E.M. Castellón, 20-23/3/1991.

— (1992): Una alternativa a la integral de Riemann, *Ensayos*, 6, 227-233.

— (1993): *De la noción de área a su definición.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

— (1994): *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal.* Thesis microfilm Universitat de València.

VAN DER WAERDEN, (1954): *Science awakening.* Groningen (Holland): P. Noordhoff.

VINNER, S. (1991): The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In *Advanced Mathematical Thinking*, 65-81. David Tall (Ed). London: Kluwer Academic Publishers.