

LA MORFOLOGÍA MATEMÁTICA EN EL TRATAMIENTO DIGITAL DE IMÁGENES

Teresa Olivares Montes
Pedro Ángel Cuenca Castillo

*Teresa Olivares Montes y Pedro Ángel Cuenca Castillo
están en el Departamento de Informática de la Escuela Uni-
versitaria Politécnica de Albacete. Universidad de Castilla-
La Mancha.*

RESUMEN

El análisis de imágenes está basado en conceptos matemáticos que permiten describir cuantitativamente imágenes de distintos orígenes. La *Morfología Matemática* es una herramienta para extraer componentes de una imagen útiles en la representación y descripción de regiones importantes (bordes, esqueletos, ...). El lenguaje de la Morfología Matemática es el de la Teoría de conjuntos. Los conjuntos representarán la forma de los objetos en una imagen. La forma de proceder será transformar la imagen en otra, mediante transformaciones *en todo o nada*, para destacar algún rasgo de la imagen primitiva que resultará sencillo de medir.

Se pretende en este trabajo hacer una aproximación a esta metodología de Tratamiento de Imágenes, exponiendo sus fundamentos y operaciones básicas tanto en binario como en niveles de gris, presentando algunos algoritmos morfológicos básicos y algunas aplicaciones actuales de medicina como de otros temas en investigación.

1. INTRODUCCIÓN

LOS métodos y técnicas empleados en el análisis de imágenes dependen de la naturaleza de las imágenes a analizar y, a grandes rasgos, se dividen en dos grandes dominios. El *Reconocimiento de formas*, que tiene por objetivo la identificación de formas comparando tipos de imágenes; y el *Análisis de imágenes*, que permite describir imágenes cuantitativamente y resolver características de los objetos o materiales estudiados.

La Morfología está relacionada con varios métodos actuales de análisis de imágenes. Podemos hacer una distinción entre cuatro grupos de análisis, distribuidos en cuatro ideas básicas.

TABLA 1.
Las 4 mejores aproximaciones en Análisis de Imágenes.

APROXIMACIONES EN ANÁLISIS DE IMÁGENES	
LINEAL	MEDIDAS
Procesamiento de la señal, Convolución, Análisis de Fourier, Tomografía.	Estereología, Análisis multivariante, Taxonomía, ...
MORFOLÓGICO	SINTÁCTICO
Filtrado morfológico, dilatación, Apertura, Esqueletos, ...	Extracción de primitivas, Gramáticas de contorno, Bases de conocimiento, ...

Las primeras etapas de una operación de procesamiento de imágenes tienden a ser lineales, después se sigue con procesamiento morfológico, y finalmente con cálculos estadísticos o procedimientos de reconocimiento sintáctico. Aunque estos métodos difieren bastante uno de otro, hay un enlace profundo entre ellos. Todos devuelven explícitamente una clasificación de objetos que están más o menos ocultos.

Las imágenes que se pueden tratar, aunque vienen de disciplinas muy diferentes, presentan bastantes analogías, como podemos ver en la siguiente figura (Fig. 1). Esto justifica la aparición de numerosos analizadores de imágenes. Dicha aparición ha sido también facilitada por el reciente desarrollo de la microelectrónica y la Informática.

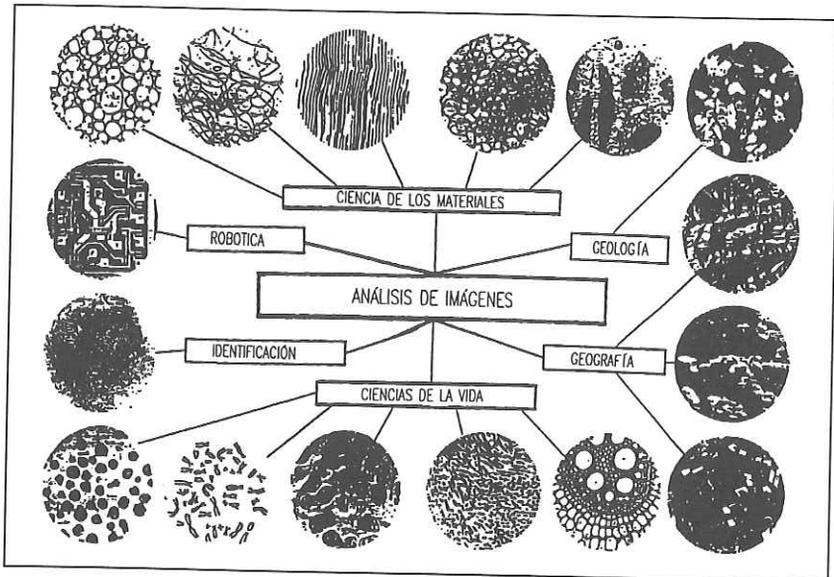


FIGURA 1.
Distintas imágenes.

2. MORFOLOGÍA MATEMÁTICA

2.1. Introducción

La palabra *morfología* denota una rama de la Biología que se ocupa de la forma y estructura de animales y plantas. Usamos aquí la misma palabra para denotar una herramienta que extrae las componentes de la imagen que se utilizan para la representación y descripción de regiones. El lenguaje utilizado es el de la Teoría de conjuntos, donde los conjuntos representan la forma de los objetos en una imagen. En imágenes binarias, los conjuntos son miembros del espacio de enteros \mathbb{Z}^2 , donde cada elemento de un conjunto es una tupla cuyas coordenadas son las coordenadas (x, y) de un píxel en una imagen. Por tanto, una imagen binaria podríamos representarla en el plano por dos conjuntos, X , la imagen, y X^c , su complementario (Fig. 2)

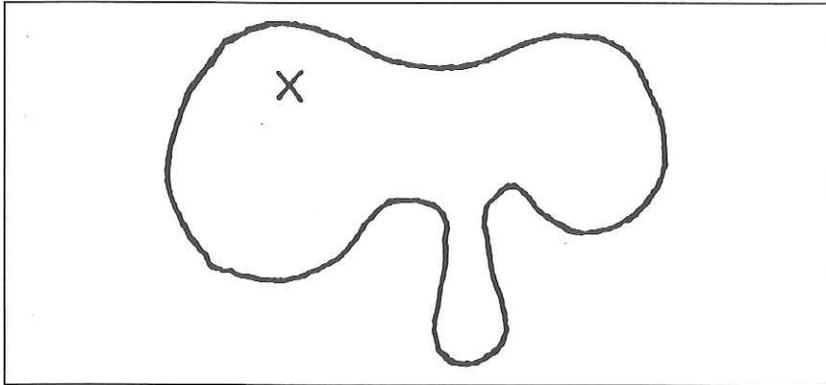


FIGURA 2.
Una imagen binaria como conjunto en el plano.

Una imagen digital con niveles de gris puede representarse como un conjunto cuyas componentes están en \mathbb{Z}^3 . En este caso, dos componentes de cada elemento del conjunto se refiere a las coordenadas de un píxel, y la tercera corresponde a su valor discreto de intensidad. Los conjuntos de espacios mayores pueden contener otros atributos de la imagen.

El objetivo final del estudio de una imagen es, casi siempre, extraer algunas características numéricas. Una manera de alcanzarlo podría ser la de obtener una descripción exhaustiva de la imagen a partir de tantas características numéricas como sean posibles, pero tal cantidad de información sería imposible de procesar, bien por el enorme volumen de datos o bien porque no se pueda distinguir entre la información relevante y la redundante. Así, la *Morfología Matemática*, implica otra

forma de proceder, permitiendo la transformación de una imagen en otra más apropiada, mediante las transformaciones *en todo o nada*, para resaltar algún rasgo de la imagen primitiva que resultará ahora sencilla de medir.

Una transformación morfológica, T , dará lugar a un nuevo conjunto, $T(X)$, alterando para ello la forma del original. Dichas transformaciones deberán cumplir algunas condiciones básicas como *invarianza por traslación, compatibilidad con cambios de escala, conocimiento local uniforme y continuidad monótona*.

2.2. Operaciones básicas

Se utilizan operaciones de conjuntos para transformar la imagen. Estas operaciones pueden clasificarse en dos categorías: Transformaciones conjuntistas clásicas y transformaciones en todo o nada utilizando un elemento estructurante.

Operaciones con conjuntos

Suponiendo A y B dos conjuntos de \mathbb{Z}^2 , las más habituales son: Traslación de A por un elemento $x = (x_1, x_2)$, Reflexión de A , Complementario de A , Unión de A y B , Intersección de A y B , y Diferencia de A y B .

Transformaciones en todo o nada

Se elige un elemento B , de geometría conocida, llamado *elemento estructurante*. Este elemento se desplaza de modo que su origen pasa por todas las posiciones del espacio de la imagen X . Para cada posición, se plantea una cuestión relativa a la unión, la intersección o la inclusión de B en X . La respuesta será positiva o negativa (de ahí el nombre de «todo o nada»). El conjunto de puntos correspondientes a las respuestas positivas forman un nuevo conjunto que constituye lo que se llama *imagen transformada*. El elemento estructurante tiene un papel relevante en la transformación, como se puede ver en los siguientes ejemplos:

1. (Fig. 3). Resultado de someter al conjunto X a una transformación en todo o nada tomando como elemento estructurante $B = C(0, 1)$, un círculo de radio 1 centrado en el origen. La pregunta que se hace en cada desplazamiento es si la intersección de B y el complementario de X es igual a cero.

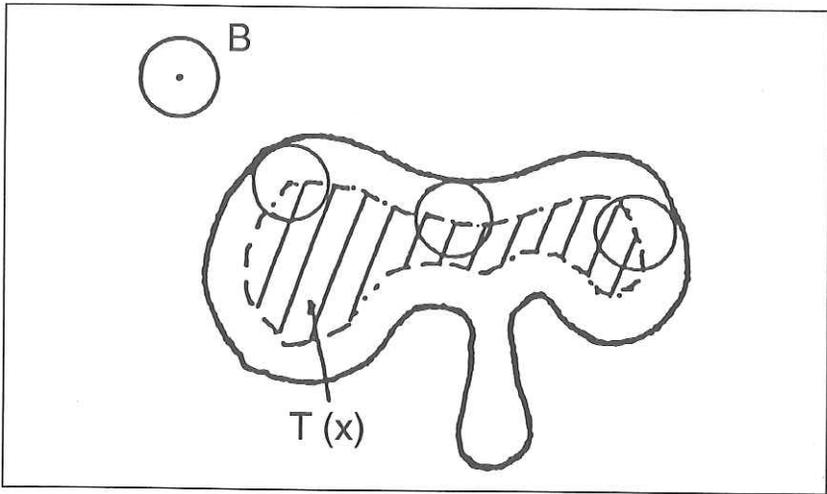


FIGURA 3.
Transformación mediante un círculo.

2. (Fig. 4). El mismo conjunto X ha sido transformado tomando ahora como elemento estructurante un segmento de longitud unidad con el origen en su extremo izquierdo.

La definición de $T(X)$ en ambos casos se debe al efecto de los diferentes elementos estructurantes, que destacarán características morfológicas de nuestra imagen que no conseguirán otros.

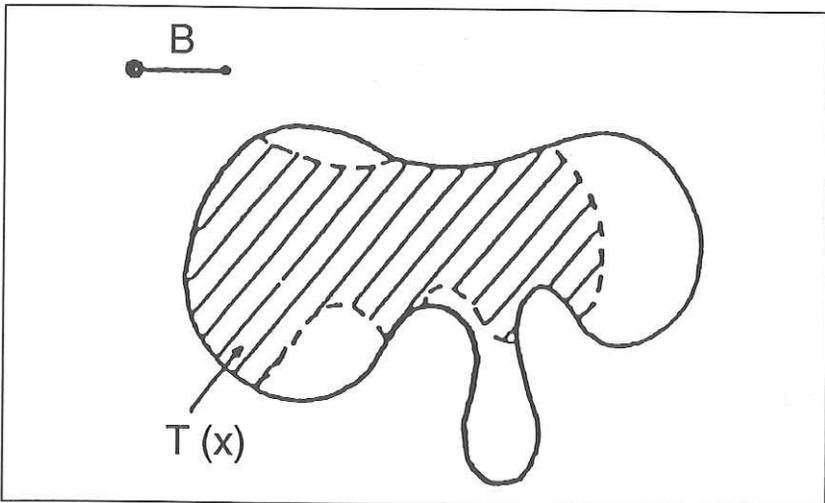


FIGURA 4.
Transformación mediante un segmento.

2.3. Erosión y dilatación

Hay dos transformaciones en todo o nada *básicas*, *erosión* y *dilatación*, que a pesar de su sencillez, tienen gran importancia porque su combinación da lugar a otras transformaciones, como son la apertura y el cierre.

Se define la **erosión** de X mediante un elemento estructurante B , $E^B(X)$, como el conjunto de puntos x tales que, el conjunto que resulta de desplazar B por dichos puntos, está contenido en X . Los dos ejemplos anteriores son dos casos de erosión, en el primero hemos erosionado el conjunto X mediante un círculo unidad, y en segundo se utiliza la erosión mediante un segmento unidad.

Se define la **dilatación** de un conjunto X , $D^B(X)$, como el conjunto de los x tales que al desplazar el elemento B por dichos puntos, B toca a X . En la siguiente figura vemos un ejemplo de dilatación mediante un círculo.

Dilatar X es equivalente a erosionar X^c . Esta igualdad pone de manifiesto la dualidad existente entre ambas operaciones.

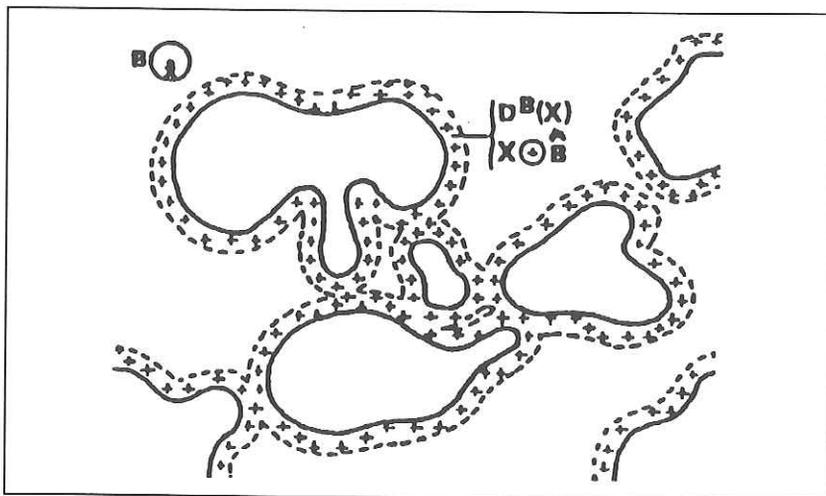


FIGURA 5.
Dilatación mediante un círculo.

2.4. Apertura y cierre

Se define la **Apertura** de X , $O^B(X)$, mediante el elemento estructurante B como la dilatación del erosionado, es decir, el conjunto que resulta de realizar una erosión de X y b , y una dilatación del resultado con el elemento estructurante B . Esta transformación tiene un efecto

suavizante sobre la forma inicial de X , cortando las prolongaciones estrechas y suprimiendo las partes pequeñas aisladas. Todo ello al precio de perder detalles que poseía el conjunto original. Un ejemplo lo tenemos en la siguiente figura.

Se define el Cierre o Clausura de X , $F^B(x)$, como el dilatado del

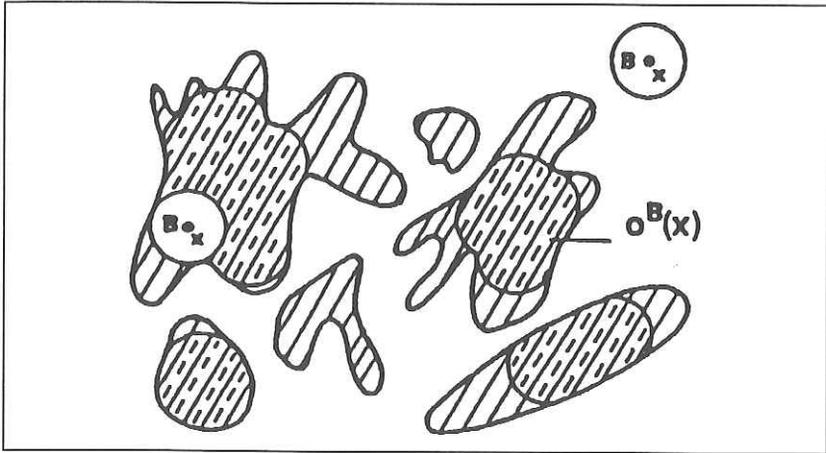


FIGURA 6.
Apertura mediante un círculo.

erosionado. En la siguiente figura tenemos un ejemplo del cierre de un conjunto mediante un círculo, y observamos que, al igual que ocurría con la apertura, el conjunto resultante es menos rico en detalles que el original. El cierre ha eliminado las pequeñas separaciones entre partículas, uniéndolas, y ha recubierto los agujeros y los pequeñas huecos.

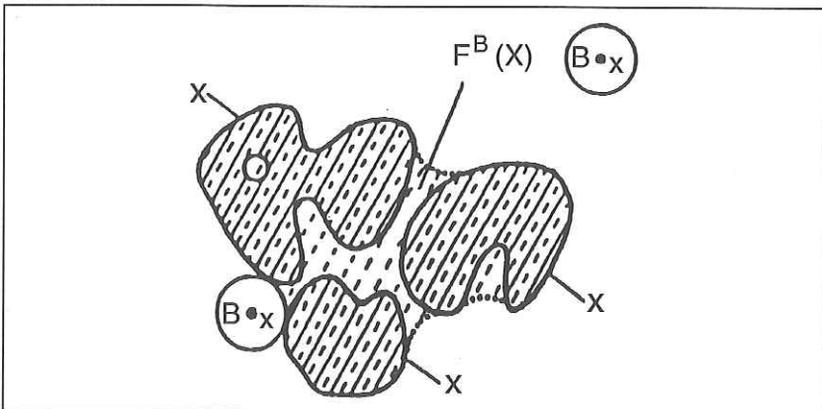


FIGURA 7.
Cierre mediante un círculo.

Se pone de manifiesto la dualidad existente entre estas dos operaciones, heredada lógicamente de su definición en términos de erosión y dilatación.

3. ALGORITMOS MORFOLÓGICOS BÁSICOS

Cuando se trabaja con imágenes binarias, la principal aplicación será extraer componentes de la imagen que se puedan utilizar para representar y describir figuras. Veamos algunos de los algoritmos existentes.

1. Extracción de bordes

El borde de un conjunto, $b(X)$, se consigue erosionando primero X con un elemento estructurante B , y realizando después la diferencia entre X y esa erosión.

$$b(X) = X - (E^B(X))$$

2. Relleno de agujeros

Este algoritmo se basa en dilataciones, complementación e intersecciones de conjuntos. Partiendo de un conjunto X , se empieza por un punto P de la frontera del mismo, con el objetivo de rellenar toda la región con 1's, y todos los puntos que no sean frontera con 0's. Se asigna a P el valor de 1 para empezar, y el siguiente procedimiento rellena la región con 1's:

$$X_k = \text{Intersección}(D^B(X_{k-1}), A^c); \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

Donde $X_0 = P$, y B es el elemento estructurante.

El algoritmo termina en la etapa k , si $X_k = X_{k-1}$. La intersección de cada etapa con A^c limita el resultado a la región de interés. El conjunto que resulte de la unión de X_k y A será el conjunto relleno y su frontera.

3. Esqueletos

Hablamos del esqueleto de un objeto como aquella parte interna, centrada, que proporciona y conserva la forma del objeto. Sea X un conjunto, y $F(X)$ su frontera. Un punto s de X pertenece al esqueleto de X , denotado por $S(X)$, si la distancia Euclídea de s a $F(X)$ se alcanza en por lo menos dos puntos distintos de $F(X)$.

El esqueleto de un conjunto (una región) X puede ser expresado en términos de erosiones y aperturas. Si $S(X)$ denota el esqueleto de X , entonces:

$$S(X) = \text{Unión} S_k(X) \quad k = 0 \dots K$$

$$\text{con } S_k(X) = \text{Unión} \{ (E^{kB}(X)) - [O^B(E^{kB}(X))] \} \quad k = 0 \dots K$$

Donde B es el elemento estructurante, $E^{kB}(X)$ indica k erosiones sucesivas de X , y K es la última etapa antes de que X sea el conjunto vacío.

Las fórmulas anteriores establecen que $S(X)$, el esqueleto de X , puede obtenerse como la unión de los esqueletos de los subconjuntos $S_k(X)$.

4. GRANULOMETRÍA

La *Granulometría* es una herramienta morfológica para la descripción de imágenes. Se encarga de determinar la distribución de partículas en una imagen. La siguiente figura (Fig. 8), muestra una imagen que consiste en objetos luminosos de tres tamaños diferentes. Los objetos no sólo están solapados sino que están muy desordenados, lo que dificulta detectar partículas individuales.

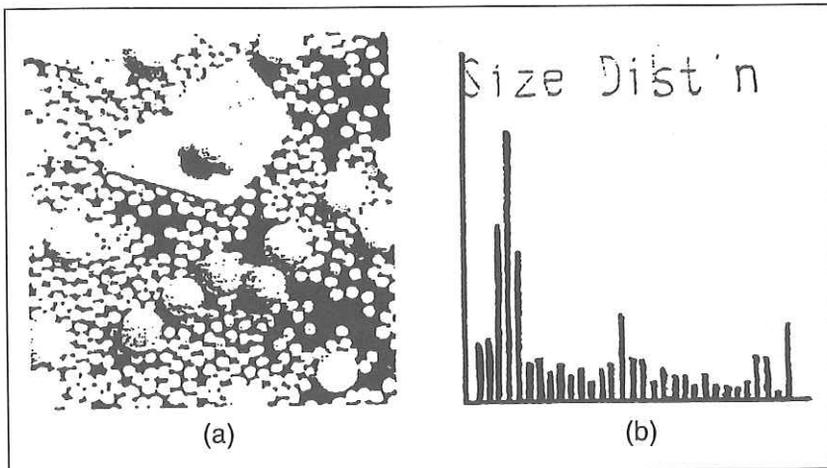


FIGURA 8.
(a) Imagen original. (b) Distribución del tamaño.

Como las imágenes son brillantes con respecto al fondo, puede usarse la siguiente aproximación morfológica para determinar el tamaño de la distribución: realizar sobre la imagen original operaciones de *apertura* con elementos estructurantes de tamaño creciente. La diferencia entre la imagen original y su apertura se calcula después de cada pasada con un elemento estructurado diferente. Al final del proceso esas diferencias son normalizadas y se construye el histograma de la distribución del tamaño de las partículas. Esta aproximación se basa en

la idea de que las operaciones de apertura de un tamaño particular tienen un mayor efecto en regiones de la imagen de entrada que contienen partículas de tamaño similar. Así, una medida del número relativo de cada partícula se obtiene calculando la diferencia entre las imágenes de entrada y salida. El histograma indica la presencia de tres tamaños de partículas dominantes en la imagen de entrada. Este tipo de procesamiento se utiliza para describir regiones con un carácter de partículas semejantes predominante.

5. MORFOLOGÍA DE NIVELES DE GRIS

Los datos disponibles en los sistemas de visión automatizada son una o varias imágenes obtenidas utilizando uno o más sensores. La salida de los sensores es una colección finita de medidas que, con unas pocas excepciones, podemos considerar que son unos valores asociados a un retículo de puntos en una imagen plana bidimensional, que son los píxeles. Estas medidas son normalmente valores enteros que podemos considerar cuantizaciones de una señal continua. Esto es lo que se conoce como digitalización de una escena. De la escena real a la imagen digitalizada vamos a tener dos fuentes de error procedentes en primer lugar del muestreo discreto y, en segundo lugar, de la cuantización que realizamos. Además de estos errores intrínsecos, aparecerán otros, debidos por ejemplo, a los propios medios de adquisición de imágenes.

Denotaremos por $f(x)$, la intensidad observada en el píxel x . Normalmente $0 \leq f(x) \leq 255$. Nuestra información es pues una función de un retículo de puntos a valores enteros no negativos y recibe el nombre de *imagen a niveles de gris*.

A partir de esta imagen nos podemos plantear tareas muy diversas: reducir errores, segmentar la imagen, ... El procesamiento de la imagen será un conjunto de transformaciones que nos llevarán de una imagen a otra, con objeto de resolver problemas como los planteados. Dichas transformaciones pueden clasificarse en:

- *Anamorfosis*: transformación lineal, exponencial, logarítmica, cuadrática, Gaussiana, del coseno, umbralización, ...
- *Transformaciones funcionales que no son punto a punto*: Ecuilización, ...
- *Transformaciones morfológicas*: son las extensiones de la dilatación, erosión, apertura y clausura a niveles de gris. Se usará la morfología de niveles de gris para extraer componentes de la imagen útiles en la representación y descripción de figuras. En particular, algoritmos para *extracción de bordes*, vía una opera-

ción de gradiente, algoritmos de *suavizado* y *realce* utilizados en etapas de pre o post procesamiento.

6. APLICACIONES BASADAS EN MORFOLOGÍA MATEMÁTICA

Veamos una breve descripción de algunas de las aplicaciones de la Morfología Matemática actualmente en distintos campos.

6.1. Estudio granulométrico y estructural del núcleo celular basado en transformaciones de Morfología Matemática

El trabajo consiste en el desarrollo de una metodología de estudio de la estructura granulométrica, de la distribución y rugosidad de la cromatina nuclear por medio de transformaciones de Morfología Matemática. Para ello se ha seguido el siguiente procedimiento:

1. Captura y umbralización de las imágenes.
2. Extracción de la cromatina nuclear usando transformaciones morfológicas.
3. Cálculo del esqueleto del espacio intergranular.
4. Análisis estadístico multivariante con los siguientes parámetros: área granulométrica, distribución de la cromatina en el espacio nuclear, y rugosidad de los grumos cromatínicos.

Para comprobar la validez del método se seleccionan 50 muestras de celularidad linfoide, mamaria y cervico-vaginal. Se utilizan técnicas de análisis de imágenes y transformaciones morfomatemáticas (Software utilizado: VISILOG)

Los **resultados** obtenidos han sido los siguientes:

1. Análisis factorial: se obtienen dos factores principales, de carácter morfológico y dimensional, respectivamente.
2. Análisis discriminante: de cada uno de los grupos de tumores estudiado se ha obtenido una ecuación discriminante con un alto valor clasificatorio en los tres tipos de tumores.
3. Análisis de clusters: agrupación coherente de los tres tipos de células benignas.

Como conclusión se puede decir, que la estrategia usada para la cuantificación de estructuras nucleares dadas con un vector de variables con un alto valor discriminante, el cual nos da una clasificación

objetiva de la maldad de los tumores, puede ayudarnos en una clasificación histogenética de las neoplasias.

6.2. Tailleur: el problema del sastre

El objetivo de este trabajo es dar una solución completa al problema de colocar piezas en un área, conocido como el problema del sastre. La solución que se plantea no es por aproximación computacional geométrica clásica, sino por morfología matemática. Los resultados dados son, en primer lugar, para tres piezas, después se generalizará para n piezas.

La descripción del problema es la siguiente: dada una zona X y unas figuras A_1, \dots, A_n , deseamos saber si existe una forma de colocar las figuras en el interior de X sin que las A_i se solapen entre ellas, cuando los desplazamientos permitidos son sólo traslaciones.

Utilizando las técnicas de geometría computacional se consiguen colocar un máximo de dos piezas mediante algunas restricciones. Hace unos pocos años se encontró una solución formal y general basada en Morfología Matemática. El caso es sencillo hasta dos piezas. La complejidad del algoritmo para tres piezas nos lleva a buscar aproximaciones cuya implementación sea más rápida.

La **solución** es la siguiente:

Sea X la zona de implantación (el material del sastre) y A, B, C las figuras a implantar (las piezas del vestido). A', B' y C' serán los recíprocos o transpuestos de A, B y C respectivamente.

Sea A_a el conjunto A trasladado según un vector a . Entonces, la *erosión* de X por A' , $E^{A'}(X)$, da exactamente la solución al problema para una pieza. Cuando hay dos piezas, A y B , las implantaciones posibles vienen dadas por el siguiente conjunto:

$$R_2(A, B) = \text{Intersección } (E^{A'}(X), (D^{E^{B'}(X)}(D^{A'}(B)^c)))$$

Si $R_2 = 0$, no existe ninguna solución al problema. En caso contrario, para cada elemento del conjunto R_2 , el conjunto de posibles implantaciones b de B viene dado por:

$$\frac{E^{B'}(X)}{(D^{B'}(A))_a}$$

De forma similar se desarrolla para tres piezas y se generaliza para n . Existe un algoritmo acelerador para el caso de tres piezas. Al pasar a implementar las expresiones dadas, para trabajar con las operaciones morfológicas, se han creado áreas y piezas sobre imágenes binarias.

6.3. Evaluación por granulometría en niveles de gris del daño crónico del intersticio renal

En las enfermedades renales crónicas existe un incremento de la superficie intersticial y de la atrofia tubular. La superficie intersticial se correlaciona con la función renal. A mayor superficie del intersticio, mayor gravedad de la enfermedad.

La finalidad de este estudio consiste en la utilización de la Morfología Matemática en la cuantificación del daño intersticial crónico, ya que el intersticio renal puede asimilarse a una textura susceptible de ser analizada mediante granulometría en niveles de gris.

El material utilizado consistió en 14 biopsias con distintos grados de afectación renal crónica. De cada biopsia se grabaron entre 3 y 9 campos de 2200x. Las imágenes se digitalizaron en cuadros de 256×256 píxeles en una retícula hexagonal. El procesamiento de la imagen se realizó con el programa VISILOG 3. En la siguiente figura podemos ver el esquema de una biopsia renal.

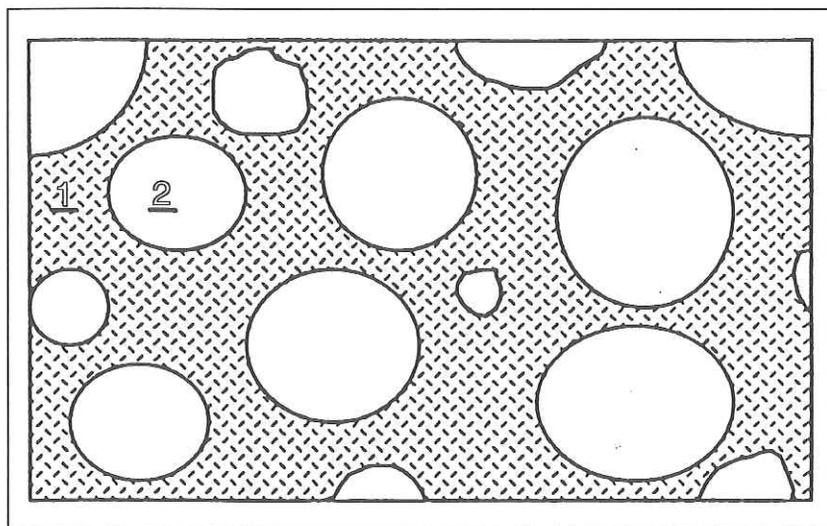


FIGURA 9.

Esquema de una biopsia renal. 1 El intersticio, 2 Los túbulos.

Se estudiaron tres biopsias que correspondían a un riñón de un paciente afectado de glomerulopatía por lesiones mínimas (3 campos), un riñón con daño intersticial moderado (5 campos) y un riñón con daño intersticial severo (4 campos). En cada uno de estos 12 campos se realizó *apertura y cierre* según un elemento estructurado hexagonal nH , de tamaño $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 24$ y se calculó el volumen de cada imagen obtenida.

El concepto de granulometría en niveles de gris consiste en una familia de aperturas dependientes de un parámetro positivo, en este caso, del tamaño n del hexágono nH . También se puede calcular la granulometría mediante la operación de clausura, según la familia de los hexágonos nH . El histograma correspondiente también se obtiene determinando las diferencias de los cierres consecutivos.

Como **resultado** se obtienen los histogramas correspondientes a los tres casos en estudio, apreciándose importantes diferencias entre ellos que ayudan a cuantificar el grado del daño intersticial crónico. Este método es más rápido que las técnicas de morfometría clásica, no dependen de la habilidad del observador y evita la umbralización de la imagen.

6.4. Proyecciones de R^n en tratamiento de imágenes. Filtrado de imágenes: morfológico y basado en redes neuronales

En este trabajo se propone un enfoque unificado de las operaciones más características que se utilizan en el tratamiento de imágenes, de tal forma que se obtienen las siguientes ventajas:

- Vehículo de expresividad formal del uso de máscaras de convolución y de la naturaleza de las mismas en función de la operación a instrumentar en cada caso.
- Interpretación sistemática y compacta de las operaciones (máscaras de convolución, operaciones globales, Morfología matemática, ...)
- Posibilidad de definir nuevas operaciones que hasta ahora eran de difícil justificación o no era sencillo vislumbrarlas a partir de los planteamientos usados.
- Propuesta de métodos alternativos más eficientes a los ya propuestos.
- Justificación de la convergencia entre los métodos propios del tratamiento de imágenes y las técnicas conexionistas, lo que establece las pautas para la instrumentación de los primeros mediante redes neuronales artificiales.

Con respecto a las operaciones de *Morfología Matemática*, se estudia la aplicación de las proyecciones a operaciones morfológicas, en dos enfoques:

- *La erosión mediante proyecciones sobre B'* . Como ya sabemos, la erosión de un conjunto X por un elemento estructurado B , es el lugar geométrico de las posiciones del centro de B cuando B está incluido en X . El problema que se plantea es conseguir un

vector de proyección B' , de forma que el resultado de erosionar o dilatar sea precisamente la proyección de la imagen original sobre el vector construido

- *Filtrado morfológico mediante proyecciones sobre B'* . Las operaciones más interesantes desde la perspectiva de la Morfología Matemática son los denominados *filtros morfológicos* generados a partir de la combinación de la erosión y la dilatación. El orden de aplicación de cada una de estas dos operaciones simples da lugar a dos de las herramientas más potentes como base de aplicación a problemas concretos (Apertura y Cierre). De hecho, la utilización adecuada de estos filtrados genera operaciones más complejas tales como compresión de imágenes, cálculo de esqueletos, etc.

En este punto se tiene una metodología que desde un planteamiento inicial totalmente distinto es capaz de inferir el resultado deseado mediante operaciones globales simples, teniendo su origen en proyecciones de vectores o en operaciones lógicas de una imagen con su desplazamiento en alguna dirección requerida.

6.5. Segmentación y filtrado morfológico basado en gráficos

Este trabajo trata las técnicas de filtrado y segmentación en el análisis de imágenes. El punto clave es que se trabaja solamente con gráficos en el filtrado y en las etapas de segmentación. Para la etapa de filtrado se utilizan filtros conectados. Este tipo de operadores preserva la forma de las figuras observadas en la imagen original porque fuerza una relación de inclusión entre las llamadas «zonas muertas o planas», regiones constantes por trozos, de las imágenes de entrada y salida. Se presentan algunos resultados teóricos, viendo la introducción de un filtro conectado multi-escala. Después de la etapa de filtrado, el método de segmentación, propone simplificar la imagen, realizando operaciones de mezcla en el grafo de la zona plana. Este hecho asegura que se preservan las formas en las etapas de segmentación. El método usa un algoritmo de espera en cola jerárquico y es computacionalmente muy eficiente. Se dan también resultados para el caso de imágenes en color.

BIBLIOGRAFÍA

- AYALA, G.; FERNÁNDEZ, J.; LÓPEZ, A. y MONTES, F.: «Aplicaciones de la Morfología Matemática al análisis de Imágenes».
- COSTER, M. y CHEMANT, J. L.: *Précis d'analyse d'images*.
- CRESPO, J.; SERRA, J. y SCHAFER, R.: «Graph-based Morphological Filtering and Segmentation».

- GIMÉNEZ MANS, J. A.; SANZ MONCASI, M. P. y GALLEGO CALVO, M. P.: «Estudio granulométrico y estructural del núcleo celular basado en transformaciones de Morfología Matemática».
- GONZÁLEZ, RAFAEL C. y WOODS, RICHARD E.: *Digital Image Processing*.
- LEDESMA-LATORRE B.; GARCÍA-CHAMIZO J. M. y RIZO ALDEGUER R.: «Proyecciones de R^n en tratamiento de imagen. Filtrado de imagen: morfológico y basado en redes neuronales».
- SERÓN, D.; COLOMÉ-SERRA, M. F.; MORESO, F.; GRIÑÓ, J. M.; ALSINA, J. y SERRA, J.: «Evaluación por granulometría en niveles de gris del daño crónico del intersticio renal».
- SERRA, J. y PARES, N.: «Tailleur: el problema del sastre».