*Boletín de Matemáticas*
Nueva Serie, Volumen XIII No. 1 (2006), pp. 57–65

# CARACTERIZACIÓN DE MATRICES NORMALES USANDO VALORES PROPIOS

HUMBERTO SARRIA ZAPATA (∗)
MARÍA ASTRID CUIDA GÓMEZ (∗∗)
YOLIMA ÁLVAREZ POLO (∗ ∗ ∗)

Resumen. Una matriz $A$, se denomina *normal* si $AA^* = A^*A$, donde $A^*$ se obtiene trasponiendo y conjugando $A$. En este trabajo presentamos nuevas pruebas para algunas caracterizaciones de las matrices normales, en términos de sus valores propios.

Palabras claves. Matrices normales, Teorema Espectral, Teorema de Schur, Valores propios.

Abstract. A matrix $A$, is called *normal* if $AA^* = A^*A$, where $A^*$ is the conjugate transpose of $A$. In this article we present new proofs for some characterizations of the normal matrices, in terms of their eigenvalues.

Key words and phrases. Normal matrices, Spectral Theorem, Schur's Theorem, Eigenvalues.

AMS classification:15A18, 15A57, 15A99.

(∗) Humberto Sarria Zapata. Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá. E-mail:hsarriaz@unal.edu.co

(∗∗) María Astrid Cuida Gómez. Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá. E-mail: cuidita@yahoo.com

(∗ ∗ ∗) Yolima Álvarez Polo. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. E-mail: yalvarezp@udistrital.edu.co.

## 1. Introducción

Desde que la definición formal de matriz normal fue dada por O. Toeplitz en [1], se han descubierto cerca de noventa caracterizaciones de este tipo de matrices (ver [3] y [4]). Entre las caracterizaciones más interesantes, están aquellas que hacen referencia a los valores propios. Por ejemplo, el llamado **Teorema Espectral**, afirma que una matriz $A$ es normal, si y sólo si,

$$\|A\|_F = \left[\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right]^{1/2},$$

donde $\|A\|_F$ denota la norma euclidiana o de Fröbenius de $A$ y $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ es el conjunto de sus valores propios. Existen otras caracterizaciones interesantes que permiten relacionar los valores propios de la matriz, con los valores propios de sus partes hermitiana y antihermitiana, o con los valores propios de su descomposición polar. Éstas y algunas otras caracterizaciones más, serán planteadas posteriormente en este artículo.

A continuación se presenta la notación que se usará a través de este trabajo. Se denota mediante $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, el conjunto de las matrices cuadradas de tamaño $n$ con entradas en el campo de los complejos $\mathbb{C}$. Sea $A = [a_{ij}]$, se define la **conjugada** de $A$ como la matriz $\overline{A} := [\overline{a_{ij}}]$ y la **traspuesta** como la matriz $A^t := [a_{ji}]$. La **adjunta hermitiana** de $A$ es la matriz $A^* := \overline{A}^t$.
Se dice que $A$ es **hermitiana** si $A^* = A$ y **antihermitiana** si $A^* = -A$. Una matriz hermitiana es **semidefinida positiva**, si todos sus valores propios son no negativos. Además, se dice que una matriz $U$ es **unitaria** si $UU^* = U^*U = I$, siendo $I$ la matriz idéntica. Una matriz unitaria $Q$ con entradas reales se denomina **ortogonal**. De las anteriores definiciones se puede observar que las matrices hermitianas, antihermitianas y unitarias son tipos especiales de matrices normales.

$A$ es **unitariamente diagonalizable**, si existe una matriz unitaria $U$ y una matriz diagonal $D$ en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tales que $D = UAU^*$. Una colección no vacía $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una **familia conmutante** de matrices, si para todo par de matrices $A, B \in \mathcal{F}$, $AB = BA$. La **traza** de una matriz $A = [a_{ij}]$ es el valor

$$Tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Para cualquier par de matrices $A, B$, el **producto interior de Fröbenius**, está definido por la igualdad

$$\langle A, B\rangle_F = Tr(B^*A).$$

La **norma de Fröbenius** o **norma euclidiana** de una matriz $A$, está dada por

$$\|A\|_F := \langle A, A\rangle_F^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

El conjunto de los valores propios de una matriz $A$, se denota mediante $\delta(A)$ y se denomina el **espectro de A**. Si $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\mathcal{T})$, $\mathrm{Im}(\mathcal{T})$ y $|T|$, denotan los conjuntos conformados por las partes real, imaginaria, y los módulos de los elementos de $\mathcal{T}$, respectivamente. $S_n$ denota el conjunto de las permutaciones sobre $\{1, 2, \ldots, n\}$.

El lector deberá tener en la cuenta, que en adelante todas las matrices referenciadas son tomadas del conjunto $M_n(\mathbb{C})$.

## 2. Resultados previos

Para mayor comodidad, se enunciarán algunos de los resultados de la Teoría de Matrices que se usarán como referencia en las pruebas que se presentarán posteriormente. El lector interesado en información más amplia puede consultar [5], [6] y [7].

**Teorema 1** (Teorema de Schur)**.** *Para toda matriz $A$ con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, existe una matriz unitaria $U$ y una matriz triangular superior $T_A$, tales que*

$$U^*AU = T_A = [t_{ij}],$$

*donde $t_{ii} = \lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$.*

**Teorema 2** (Teorema de triangularización unitaria)**.** *Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una familia conmutante, existe una matriz unitaria $U$ tal que $U^*AU$ es triangular superior para toda $A \in \mathcal{F}$.*

**Teorema 3** (Teorema de la descomposición polar)**.** *Para toda matriz $A$, existe una matriz semidefinida positiva $P$ y una matriz unitaria $V$, tales que $A = PV$.*

Toda matriz $A$ puede descomponerse de manera única, como la suma de una matriz hermitiana $H$ y una antihermitiana $K$, en donde

$$H = \frac{1}{2}(A + A^*) \text{ y } \quad K = \frac{1}{2}(A - A^*).$$

En el siguiente teorema se enuncian algunas caracterizaciones, que muestran la relación existente entre $A, H, K, P$ y $V$ cuando $A$ es normal.

**Teorema 4.** *Sea $A$ una matriz, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(a)* *$A$ es normal.*
*(b)* *$A$ es unitariamente diagonalizable.*
*(c)* $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$, *donde* $\delta(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.
*(d)* $AV = VA$.
*(e)* $AP = PA$.
*(f)* $VP = PV$.
*(g)* $AH = HA$.
*(h)* $AK = KA$.
*(i)* $HK = KH$.

Existe una relación "pitagórica" entre una matriz y sus partes hermitiana y antihermitiana que se presenta a continuación.

**Proposición 1.** *Para toda matriz $A$,*

$$\| A \|_F^2 = \| H \|_F^2 + \| K \|_F^2 .$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
\|A\|_F^2 &= \langle H+K, H+K \rangle_F \\
&= \langle H, H \rangle_F + \langle H, K \rangle_F + \langle K, H \rangle_F + \langle K, K \rangle_F \\
&= \langle H, H \rangle_F + Tr(K^*H) + Tr(H^*K) + \langle K, K \rangle_F \\
&= \langle H, H \rangle_F - Tr(KH) + Tr(HK) + \langle K, K \rangle_F \\
&= \langle H, H \rangle_F + \langle K, K \rangle_F . \\
&= \| H \|_F^2 + \| K \|_F^2 .
\end{aligned}$$

□

Como una consecuencia directa del *Teorema Espectral* y la proposición 1, se tiene la siguiente afirmación:

**Corolario 1.**

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 + \sum_{i=1}^n |\beta_i|^2 ,$$

*donde* $\delta(H) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ *y* $\delta(K) = \{\hat{\imath}\beta_i, \dots, \hat{\imath}\beta_n\}$ *con* $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ *e* $\hat{\imath}^2 = -1$, *para cada* $i = 1, \dots, n$.

## 3. Resultados principales

**Teorema 5.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(a)* *$A$ es normal.*
*(b)* $\mathrm{Re}(\delta(A)) = \delta(H)$.
*(c)* $\mathrm{Im}(\delta(A)) = \delta(K)$.
*(d)* $\delta(A) = \{\alpha_i + \hat{\imath}\beta_{\sigma(i)} \quad | \quad i = 1, \ldots, n\}$*, para alguna permutación* $\sigma$ *de* $S_n$.

*Demostración.* Se probará inicialmente (a) $\iff$ (b). Las equivalencias restantes resultan de ésta.
$(a) \Rightarrow (b)$. Como $A$ es normal, por el teorema 4, $\{A, H, K\}$ es una familia conmutante y del teorema 2, $A, H$ y $K$ son simultáneamente triangularizables, esto es, existe $U$ unitaria tal que

$$A = U^* T_A U, \quad H = U^* T_H U, \quad K = U^* T_K U.$$

Así, $T_A = T_H + T_K$, con lo cual, $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_{\sigma(j)}$ para alguna permutación $\sigma$ en $S_n$.
$(b) \Rightarrow (a)$. Por el *Teorema de Schur*, existe una matriz unitaria $U$ tal que $T_A = U^* A U = [t_{ij}]$ es una matriz triangular superior. Entonces,

$$\begin{aligned} T_A &= U^* H U + U^* K U \\ &= \hat{H} + \hat{K}, \end{aligned}$$

en donde, $\hat{H} = U^* H U =: [\hat{h}_{ij}]$ y $\hat{K} = U^* K U =: [\hat{k}_{ij}]$.
Dado que

$$\|T_A\|_F^2 = \|\hat{H}\|_F^2 + \|\hat{K}\|_F^2, \tag{1}$$

por el *Teorema Espectral*

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} |t_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 + \|\hat{K}\|_F^2.$$

Esta igualdad junto con la hipótesis conducen a

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathrm{Re}(\lambda_i)]^2 + \sum_{i=1}^{n} [\mathrm{Im}(\lambda_i)]^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} |t_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} [\mathrm{Re}(\lambda_i)]^2 + \|\hat{K}\|_F^2,$$

así

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}[\mathrm{Im}(\lambda_i)]^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n}|t_{ij}|^2 &= \|\hat{K}\|_F^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}|\hat{k}_{ii}|^2 + \sum_{i\neq j}|\hat{k}_{ij}|^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Por otro lado, $\hat{h}_{ii}$ es real y $\hat{k}_{ii}$ es imaginario puro, entonces $|t_{ii}|^2 = |\hat{h}_{ii}|^2 + |\hat{k}_{ii}|^2$. De lo anterior se obtiene

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}|t_{ij}|^2 = \sum_{i\neq j}|\hat{h}_{ij}|^2 + \sum_{i\neq j}|\hat{k}_{ij}|^2.$$

De aquí y (2)

$$\sum_{i=1}^{n}[\mathrm{Im}(\lambda_i)]^2 + \sum_{i\neq j}|\hat{h}_{ij}|^2 + \sum_{i\neq j}|\hat{k}_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\hat{k}_{ii}|^2 + \sum_{i\neq j}|\hat{k}_{ij}|^2.$$

Con lo cual,

$$\sum_{i=1}^{n}[\mathrm{Im}(\lambda_i)]^2 + \sum_{i\neq j}|\hat{h}_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\hat{k}_{ii}|^2. \tag{3}$$

Como

$$\hat{\imath}\,\mathrm{Im}(\lambda_i) = \hat{k}_{ii},$$

de (3) se sigue que

$$\sum_{i\neq j}|\hat{h}_{ij}|^2 = 0,$$

luego necesariamente $\hat{h}_{ij} = 0$ para cada $i \neq j$. Por otro lado, $T_A$ es triangular superior, en consecuencia $\hat{h}_{ij} = -\hat{k}_{ij}$ para todo $i > j$ y de aquí $\hat{k}_{ij} = 0$ para cada $i \neq j$. Se concluye que $T_A$ es una matriz diagonal y por el teorema 4 parte (b), $A$ es normal. □

La equivalencia (a) $\Longleftrightarrow$ (c), resulta de observar que $A$ es normal, si y sólo si, $\bar{A}$ es normal, para luego aplicar la equivalencia (a) $\Longleftrightarrow$ (b). La equivalencia (a) $\Longleftrightarrow$ (d), es inmediata de cualquiera de las equivalencias anteriormente probadas.

En lo que sigue, $\delta(P) = \{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$ y $\delta(V) = \{u_1, \ldots, u_n\}$.

**Teorema 6.** *Si $A$ es una matriz, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(a) $\delta(A) = \{u_j\rho_{\sigma(j)} | j = 1, \ldots, n\}$, para alguna permutación $\sigma$ de $S_n$.*

*(b) $|\delta(A)| = \{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$.*

*(c) $A$ es normal.*

*Demostración.* Dado que los valores propios de una matriz unitaria tienen módulo 1 y $P$ es semidefinida positiva, se sigue que $(a) \Rightarrow (b)$.
Para probar $(b) \Rightarrow (c)$, inicialmente obsérvese que

$$\begin{aligned}\|A\|_F^2 &= \|VP\|_F^2\\ &= \|P\|_F^2\\ &= \sum_{i=1}^{n} \rho_i^2.\end{aligned}$$

Por la hipótesis, $\rho_i^2 = |\lambda_{\sigma(i)}|^2$ para alguna permutación $\sigma$, entonces

$$\|A\|_F = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$$

y por el *Teorema Espectral*, $A$ es normal.
$(c) \Rightarrow (a)$. Si $A$ es normal, por el teorema 4, $\{A, V, P\}$ es una familia conmutante, y como, $A, V$ y $P$ son matrices normales, entonces $\{A, V, P\}$ es una familia simultáneamente diagonalizable vía una matriz unitaria $U$, así

$$U^*AU = U^*VUU^*PU$$

con $U^*AU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $U^*VU = \text{diag}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y
$U^*PU = \text{diag}(\rho_{\sigma(1)}, \rho_{\sigma(2)}, \ldots, \rho_{\sigma(n)})$ para alguna permutación $\sigma$, por tanto

$$\lambda_i = u_i \rho_{\sigma(i)}, \; i = 1, \ldots, n$$

$\square$

**Teorema 7.** *Una matriz $A$ es normal, si y sólo si, existe una permutación $\sigma$ de $S_n$ tal que*

$$\delta(A^*A) = \{\lambda_j \overline{\lambda_{\sigma(j)}} \mid j = 1, \ldots, n\}$$

*Demostración.*
$\Rightarrow$ Si $A$ es normal, entonces existe una matriz unitaria $U$ tal que $A = U^*DU$ donde $D = \text{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, luego $A^*A = U^*D^*DU$.
Ahora, $D^*D = \text{diag}\{\lambda_1\overline{\lambda}_1, \ldots, \lambda_n\overline{\lambda}_n\}$, se sigue que

$$\delta(A^*A) = \{\lambda_i\overline{\lambda}_i \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

$\Leftarrow$ Por el **Teorema de Schur**, para alguna matriz unitaria $U$, $A = U^*TU$ con $T$ triangular superior, así $A^*A = U^*T^*TU$. Haciendo $\hat{T} = T^*T =: [\hat{t}_{ji}]$, se

tiene que $\hat{t}_{ji} = \hat{t}_{ij},\ i < j$ y $\hat{t}_{ii} = \overline{\lambda_i}\lambda_i + \alpha_i$ donde $\alpha_i = \sum_{k=1}^{i-1} \bar{t}_{ki} t_{ki}$.
Nótese que $\alpha_i, \hat{t}_{ii} \geq 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Ahora bien,

$$\|\hat{T}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} |\overline{\lambda_i}\lambda_i + \alpha_i|^2 + \sum_{i<j} 2|\hat{t}_{ij}|^2.$$

Por otra parte, como $\hat{T}$ es normal y $\delta(A^*A) = \delta(\hat{T})$, entonces

$$\|\hat{T}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i \overline{\lambda_{\sigma(i)}}|^2.$$

Además,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_{\sigma(i)}} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \overline{\lambda_i} + \alpha_i), \tag{4}$$

en consecuencia

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_{\sigma(i)}} \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_i}. \tag{5}$$

Haciendo $\lambda_i = a_i + \hat{\imath} b_i$, con $a_i$ y $b_i$ reales, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} [(a_i - a_{\sigma(i)})^2 + (b_i - b_{\sigma(i)})^2] \geq 0,$$

reescribiendo

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + a_{\sigma(i)}^2 + b_i^2 + b_{\sigma(i)}^2) \geq \sum_{i=1}^{n} 2(a_i a_{\sigma(i)} + b_i b_{\sigma(i)}). \tag{6}$$

Como $A^*A$ es hermitiana, $\lambda_i \overline{\lambda_{\sigma(i)}}$ es un número real, entonces

$$\lambda_i \overline{\lambda_{\sigma(i)}} = a_i a_{\sigma(i)} + b_i b_{\sigma(i)}.$$

Sustituyendo en (6)

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + a_{\sigma(i)}^2 + b_i^2 + b_{\sigma(i)}^2) \geq \sum_{i=1}^{n} 2\lambda_i \overline{\lambda_{\sigma(i)}},$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \overline{\lambda_i} + \lambda_{\sigma(i)} \overline{\lambda_{\sigma(i)}}) \geq \sum_{i=1}^{n} 2\lambda_i \overline{\lambda_{\sigma(i)}}.$$

Así,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_{\sigma(i)}}, \tag{7}$$

De (4), (5) y (7) tenemos que $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Se concluye que $t_{ki} = 0$, para todo $i$ y todo $k = 1, \cdots, i-1$. Por lo tanto, $T$ es una matriz diagonal y así $A$ es necesariamente normal. $\square$

## Referencias


[1] O. Toeplitz, *Der Algebraische Analogon zu einen Satze von Fejer*, Math. Z. 2, 187-197(1918).

[2] Y. Álvarez, *Operadores lineales que preservan simetría y antisimetría.* Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia (2005)

[3] R. Grone, R. Johnson, E. M de Sa, H. Wolkovicz, **Normal matrices,** Linear Algebra Appl. **87** (1987) 213-225.

[4] L. Elsner, K.H. Ikramov, *Normal Matrices: An update,* Linear Algebra Appl. 285, 291-303 (1998).

[5] R. Horn, C. Johnson, *Matrix Analysis,* Cambridge U.P., 1985.

[6] P. Lancaster, *The Theory of Matrices*, Academic Press, 1985.

[7] A. Cuida, *Caracterizaciones de Matrices Normales*, Manuscrito no publicado, 2006.


Recibido: Febrero de 2006. Aceptado para publicación: Mayo de 2006