Lecturas Matemáticas
Volumen **26** *(2005), páginas 177–182*

Sobre el concepto de mediatriz y sus generalizaciones

Alfonso Ríder Moyano & Rafael María Rubio Ruiz
Universidad de Córdoba, Córdoba, España

Abstract. Mediator and circumcenter of a set of points are defined and some elementary properties studied in affine Euclidean space.

Key words and phrases. $n-$Euclidean affine geometry.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. 51N20.

Resumen. En este trabajo elegimos definiciones de los conceptos geométricos de mediatriz y circuncentro, encuadrándolos en un espacio afín euclídeo arbitrario y estableciendo sus principales propiedades y posibles extensiones.

1. Definición

Sea $\mathcal{E}$ un espacio afín euclídeo de dimensión arbitraria. Sea $r \geq 1$ un número natural y sea

$$\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_r\}$$

un sistema de $r+1$ puntos afínmente independientes. El conjunto

$$\mathcal{M}(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_r) = \{X \in \mathcal{E}/d(X, A_0) = d(X, A_i), \quad \forall i \in [1, r]\},$$

formado por todos los puntos del espacio que equidistan de los dados, recibe el nombre de *mediatriz* del sistema.

Estableceremos que la mediatriz nunca es vacía, destacando un punto (único) de ella que está en el subespacio $\mathcal{A}$ generado por los puntos datos y al que daremos el nombre de *circuncentro* del sistema. En realidad, la mediatriz va a cubrir todo un subespacio afín: el de codimensión r que pase por el circuncentro y sea perpendicular al subespacio sustentado por los puntos.

2. El punto medio de dos puntos dados está en la mediatriz de ambos

Proposición. *Dados dos puntos A, B afínmente independientes (es decir, distintos), su mediatriz contiene cuando menos al punto medio C del segmento $[A, B]$.*

Demostración. Fijado un origen O a efectos de tomar vectores de posición, tenemos que $C = \dfrac{A+B}{2}$, de donde

$$\begin{aligned} d(C, A) = \|A - C\| = \left\| A - \frac{A+B}{2} \right\| = \left\| \frac{A-B}{2} \right\| \\ = \left\| \frac{B-A}{2} \right\| = \left\| B - \frac{A+B}{2} \right\| = \|C - B\| = d(C, B) \ ; \end{aligned}$$

luego, $C \in \mathcal{M}(A, B)$.

3. Mediatriz de un sistema de dos puntos

Proposición. *Dados dos puntos A, B afínmente independientes, su mediatriz coincide con el hiperplano perpendicular a $\langle A, B\rangle$ que pasa por su punto medio C.*

Demostración. Para un punto cualquiera $X \in \mathcal{E}$ se tiene

$$\begin{aligned} d^2(X, A) &= \mathbf{XA} \cdot \mathbf{XA} = (\mathbf{XC} + \mathbf{CA}) \cdot (\mathbf{XC} + \mathbf{CA}) \\ &= \mathbf{XC} \cdot \mathbf{XC} + \mathbf{CA} \cdot \mathbf{CA} + 2\mathbf{XC} \cdot \mathbf{CA} \\ &= \|\mathbf{XC}\|^2 + \|\mathbf{CA}\|^2 + 2\mathbf{XC} \cdot \mathbf{CA}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2(X, B) &= \mathbf{XB} \cdot \mathbf{XB} = (\mathbf{XC} + \mathbf{CB}) \cdot (\mathbf{XC} + \mathbf{CB}) \\ &= \mathbf{XC} \cdot \mathbf{XC} + \mathbf{CB} \cdot \mathbf{CB} + 2\mathbf{XC} \cdot \mathbf{CB} \\ &= \|\mathbf{XC}\|^2 + \|\mathbf{CB}\|^2 + 2\mathbf{XC} \cdot \mathbf{CB}, \end{aligned}$$

de forma que,

$$d^2(X, B) - d^2(X, A) = 2\mathbf{XC} \cdot \mathbf{CB} - 2\mathbf{XC} \cdot \mathbf{CA} = 2\mathbf{XC} \cdot (\mathbf{CB} - \mathbf{CA}) = 2\mathbf{XC} \cdot \mathbf{AB},$$

donde hemos tenido en cuenta que $\| \mathbf{CB} \| = \| \mathbf{CA} \|$, por ser C el punto medio de $[A, B]$. De esta manera,

$$d(X, B) = d(X, A) \Rightarrow \mathbf{XC} \cdot \mathbf{AB} = 0 \ ,$$

siendo esta última igualdad la ecuación del hiperplano perpendicular a la recta $\langle A, B\rangle$ que pasa por su punto medio C.

4. Mediatriz de un sistema finito de puntos

Teorema. *Dado un sistema finito*

$$\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_r\}$$

de $r+1$ puntos afínmente independientes, su mediatriz es no vacía y constituye un subespacio afín de codimensión r.

Demostración. Sabemos que para cada valor $i \in [1, r]$, se tiene

$$d(X, A_i) = d(X, A_0) \Rightarrow \mathbf{XC}_i \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_i = 0,$$

donde C_i es el punto medio de $[A_0, A_i]$. Los puntos de la mediatriz, por tanto, serán las soluciones del siguiente sistema lineal completo de r ecuaciones:

$$\mathbf{XC}_1 \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_1 = \mathbf{XC}_2 \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_2 = \ldots = \mathbf{XC}_r \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_r = 0.$$

Los vectores fila de la matriz de coeficientes son los

$$\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_0\mathbf{A}_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}_0\mathbf{A}_r,$$

que son linealmente independientes. El sistema será, pues, compatible y las soluciones serán un subespacio afín de codimensión r. ☑

5. Existencia del circuncentro

Teorema. *Dado un sistema finito*

$$\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_r\}$$

de $r+1$ puntos afínmente independientes, su mediatriz corta en un solo punto C al subespacio afín $\mathcal{A}$ determinado por ellos.

Demostración. Sea

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_0 + \lambda_1\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_0\mathbf{A}_2 + \ldots + \lambda_r\mathbf{A}_0\mathbf{A}_r,$$

la ecuación paramétrico-vectorial del subespacio $\mathcal{A}$ y sea

$$[\omega_{ij}] = [\mathbf{A}_0\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_j], \text{ donde } i, j \in [1, r],$$

la matriz del producto escalar relativa a la base

$$\{\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1,\, \mathbf{A}_0\mathbf{A}_2,\, \ldots,\, \mathbf{A}_0\mathbf{A}_r\}$$

del subespacio vectorial director. Se tratará de una matriz regular de orden r. El posible corte de $\mathcal{A}$ con la mediatriz, se deducirá de estudiar el sistema que resulte al llevar el valor genérico de sus puntos a todas y cada una de las ecuaciones que determinaban la mediatriz. Para cada una de sus ecuaciones, será

$$\mathbf{XC}_j \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_j = 0 \Rightarrow (\mathbf{C}_j - \mathbf{X}) \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_j = 0 \Rightarrow \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_j = \mathbf{C}_j \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathbf{A}_0 + \lambda_1\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_0\mathbf{A}_2 + \ldots + \lambda_r\mathbf{A}_0\mathbf{A}_r) \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_j = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_j) \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1\omega_{1j} + \lambda_2\omega_{2j} + \ldots + \lambda_r\omega_{rj} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_j) \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_j - \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_j =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{A}_j - \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_j = \frac{1}{2}\mathbf{A}_0\mathbf{A}_j \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_j = \frac{1}{2}\omega_{jj},$$

o sea,

$$\lambda_1\omega_{1j} + \lambda_2\omega_{2j} + \ldots + \lambda_r\omega_{rj} = \frac{1}{2}\omega_{jj}, \text{ para cada } j \in [1, r].$$

Evidentemente, se trata de un sistema de Cramer de orden r, cuya única solución servirá para construir el punto C buscado.

6. Ortogonalidad en el punto de corte

Teorema. *Dado un sistema finito*

$$\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_r\}$$

de $r+1$ puntos afínmente independientes, su mediatriz es perpendicular al subespacio $\mathcal{A}$ en el punto C de corte de ambos.

Demostración. Puesto que el circuncentro C está en cada uno de los hiperplanos

$$\mathbf{XC}_j \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_j = 0, \text{ donde } j \in [1, r],$$

que definían la mediatriz, podemos usarlo para escribir su ecuación. La mediatriz, por tanto, queda definida implícitamente por el nuevo sistema

$$\mathbf{XC} \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_1 = \mathbf{XC} \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_2 = \ldots = \mathbf{XC} \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A}_r = 0,$$

escritura que muestra que la mediatriz es el complemento ortogonal del subespacio $\mathcal{A}$ que pasa por C.

7. Comentarios

Este pequeño trabajo tiene su origen en la determinación de cuál sería la más adecuada entre las definiciones habituales de mediatriz, de un segmento en el plano:

a) La recta perpendicular por su punto medio.

b) El lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos.

Observemos que si el segmento se sitúa en un ambiente tridimensional, dejaría de tener sentido el hablar de perpendicular en el punto medio, así habría que modificarla y hablar del plano perpendicular en dicho punto, cuyos puntos, no obstante, siguen equidistando de los extremos. Por tanto es la segunda definición la que confiere la posibilidad de generalizar con facilidad el concepto. La versión primera se obtiene ahora como un teorema: el enunciado en nuestra sección tercera.

Además, si pensamos en tres puntos no alineados del plano, existe la mediatriz según esta última definición, reduciendose a un solo punto (circuncentro); y si estos puntos los ambientamos en tres dimensiones, además del circuncentro, aparece toda una recta de puntos equidistantes de los tres: la perpendicular al plano que determinan, trazada por su circuncentro.

En cualquier caso, mediatriz y circuncentro son conceptos métricos que hay que ubicar en un espacio afín euclídeo: perpendicularidad y distancias así nos lo indican ...

Y puede hacerse en cualquier espacio, sea de dimensión finita o no. Obsérvese que no hemos hecho mención alguna a este concepto, y, aunque en el punto cuarto hemos llegado a hablar de "vectores fila de la matriz de coeficiente", ésta ha sido una concesión innecesaria. El sistema allí planteado se puede describir en términos de r formas lineales, que serían independientes, lo cual es condición suficiente para asegurar que el subespacio de soluciones es de codimensión finita e igual a r.

En cuanto al desarrollo de estos conceptos, hemos puesto de manifiesto en síntesis y únicamente, la equivalencia de la mediatriz como lugar de puntos equidistantes de los dados con la mediatriz como complemento ortogonal en el punto circuncentro. El estudio se podría prolongar, demostrando, por ejemplo, que el circuncentro lo es de una r-esfera que pasa por los puntos dados (la circunferencia circunscrita a un triángulo del plano o la esfera circunscrita a un tetraedro espacial), o tratando de expresar el circuncentro mediante coordenadas covariantes ligadas al segmento, triángulo, tetraedro, etc., determinado por los puntos datos. Labor que dejamos para el lector interesado.

References

[1] E. ARTIN, *Álgebra geométrica.* Limusa, 1992, México.
[2] L. BLUMENTHAL, *A Modern View of Geometry.* Dover Publication, INC, 1980, New York.
[3] H. COXETER, *Fundamentos de geometría.* Limusa, México.
[4] P. PUIG, *Curso de geometría métrica.* Euler, 1986, Madrid.

(Recibido en febrero de 2005. Aceptado para publicación en octubre de 2005)

ALFONSO RÍDER MOYANO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
CÓRDOBA, ESPAÑA
e-mail: ma1rimoa@uco.es
RAFAEL MARÍA RUBIO RUIZ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
CÓRDOBA, ESPAÑA
e-mail: ma1rimoa@uco.es