Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794-9165
Volumen 1, número 1, páginas 21-27, marzo de 2005

Ubicación óptima de reserva en un sistema serie con respecto al orden de tasa de fallo[1]

Henry Laniado[2] y Gustavo Mejía[3]

Recepción: 27 de abril de 2004 — Aceptación: 07 de septiembre de 2004
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo

Resumen

En este trabajo se estudia el problema de ubicar K reservas activas, cuyos tiempos de vida son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas a las componentes de un sistema serie; con el objetivo de optimizar la función de tasa de fallo del sistema. A diferencia del trabajo de Singh y Singh, esta presentación obtiene los mismos resultados a partir de técnicas más elementales.

Palabras claves: Confiabilidad, órdenes estocásticos, redundancia activa.

Abstract
In this paper, we consider the problem of alocating K active reserves, whose lifetimes are independent identically distributed random variables, equal to the system series components; with the purpose of optimizing system failure rate function. As opposed to the work by Sing and Singh, our discussion yields the same results using more elementary methods.

Key words: Reliability, stochastic orders, redundancy allocations.

1 Introducción

En trabajos recientes en probabilidad aplicada los órdenes estocásticos han adquirido gran importancia, pues permiten comparar sistemas y determinar las estructuras y configuraciones óptimas desde el punto de vista de estos órdenes. En [2], [3] y [5] se examina

1 Trabajo realizado con el apoyo del **Centro de Investigación y Docencia** de la Universidad EAFIT.
2 Magister en Matemáticas Aplicadas, hlaniado@agustinianos.udea.edu.co, profesor de la facultad de ciencias Económicas, Universidad de Antioquia
3 Doctor en Ciencias Matemáticas, gmejia@eafit.edu.co, profesor del Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT.

de manera amplia los órdenes estocásticos y sus aplicaciones a otras ciencias como la estadística, la biología y la economía.

Una reserva pasiva es aquella que permanece en espera hasta que se requiera su operación para sustituir algún componente o sistema que haya fallado. Una reserva activa (o paralelo) es la que opera conjuntamente con un componente o sistema. El estudio de sistemas con reservas activas conlleva a la consideración del máximo de variables aleatorias.

Recordemos alguna terminología y notación que se utilizará en el desarrollo de este trabajo.

Sea X una variable aleatoria no negativa. $F(x)$, $f(x)$, $\overline{F}(x)$ denotarán respectivamente, la función de distribución, la función de densidad y la función de supervivencia de la variable aleatoria X, $r(x) = \dfrac{f(x)}{\overline{F}(x)}$ es la tasa de fallo.

Sean X y Y dos variables aleatorias. Se dice que X es mayor que Y según el *orden estocástico usual*, lo cual se denota $X \geq_{st} Y$, si

$$P(X > t) \geq P(Y > t), \quad -\infty < t < \infty . \tag{1}$$

Por otra parte, si $r_1(t)$ y $r_2(t)$ son las tasas de fallo correspondientes a las variables aleatorias X y Y, entonces X es mayor que Y según el *orden de la tasa de fallo*, lo cual se denota $X \geq_{fr} Y$, si

$$r_1(t) \leq r_2(t), \quad t \geq 0 . \tag{2}$$

Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un vector m-dimensional de componentes no negativas. La expresión $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq, \ldots, \geq x_{[m]}$ denota las componentes de x en orden decreciente. El vector x es mayorizado por el vector $y = (y_1, \ldots, y_m)$ y lo denotamos por $x \prec y$ si

$$\sum_{i=1}^{j} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{j} y_{[i]} \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, m-1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{m} y_{[i]} . \tag{3}$$

Sea ϕ una función de valor real definida sobre $[0, \infty)^m$. La función ϕ se llama Schur convexa si $\phi(x) \leq \phi(y)$ siempre que $x \prec y$. La función ϕ se llama Schur cóncava si $-\phi$ es Schur convexa.

2 Ubicación óptima de reservas en un sistema serie

En [4] se considera un sistema serie que consiste de m componentes independientes e igualmente distribuidas, con distribución $F(x)$ y además supone que hay K componentes de reserva cuyo tiempo de vida distribuye igual que las componentes del sistema.

Sea $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ un vector donde k_i es el número de reservas conectadas en paralelo con la i-ésima componente del sistema tal que $\sum_{i=1}^{m} k_i = K$. Sea $T_s(\mathbf{k})$ el tiempo de vida del sistema resultante, luego la función de confiabilidad del sistema es entonces:

$$\overline{F}_{T_s(\mathbf{k})}(t) = P[T_s(\mathbf{k}) \geq t] = \prod_{i=1}^{m}[1 - F^{k_i+1}(t)]\,.$$

Proposición 2.1. *Para todo $t \geq 0$, $\overline{F}_{T_s(\boldsymbol{k})}(t)$ es una función Schur cóncava de $\boldsymbol{k}$.*

Demostración. Sea $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$, tal que $\mathbf{k} \prec \mathbf{w}$. Como

$$\prod_{i=1}^{m}[1 - F^{k_i+1}(t)] = \prod_{i=1}^{m}[1 - F^{k_{[i]}+1}(t)] \;\; y \;\; \prod_{i=1}^{m}[1 - F^{w_i+1}(t)] = \prod_{i=1}^{m}[1 - F^{w_{[i]}+1}(t)]\,,$$

entonces debemos ver que

$$\prod_{i=1}^{m}[1 - F^{k_{[i]}+1}(t)] \geq \prod_{i=1}^{m}[1 - F^{w_{[i]}+1}(t)]\,.$$

Razonando por inducción. Si $m = 1$ entonces $k_{[1]} = w_{[1]}$, luego

$$[1 - F^{k_{[1]}+1}(t)] = [1 - F^{w_{[1]}+1}(t)].$$

Supongamos que la desigualdad es válida para $m = n$

$$\prod_{i=1}^{n}[1 - F^{k_{[i]}+1}(t)] \geq \prod_{i=1}^{n}[1 - F^{w_{[i]}+1}(t)]\,.$$

Probemos que se verifica para $m = n + 1$. Si $m = n + 1$, entonces $w_{[n+1]} \leq k_{[n+1]}$, luego

$$[1 - F^{w_{[n+1]}+1}(t)] \leq [1 - F^{k_{[n+1]}+1}(t)]\,,$$

por tanto, de la hipótesis inductiva se tiene

$$\prod_{i=1}^{n}[1 - F^{w_{[i]}+1}(t)][1 - F^{w_{[n+1]}+1}(t)] \leq \prod_{i=1}^{n}[1 - F^{k_{[i]}+1}(t)][1 - F^{k_{[n+1]}+1}(t)]$$

de donde

$$\prod_{i=1}^{n+1}[1 - F^{w_{[i]}+1}(t)] \leq \prod_{i=1}^{n+1}[1 - F^{k_{[i]}+1}(t)]\,.$$

Luego la desigualdad es válida para $m = n + 1$. En consecuencia, $\overline{F}_{T_s(\mathbf{k})}(t) \geq \overline{F}_{T_s(\mathbf{w})}(t)$ y esto garantiza que $\overline{F}_{T_s(\mathbf{k})}(t)$ es una función Schur cóncava de $\mathbf{k}$. $\square$

Nota: Hay que tener en cuenta que el orden $\prec$ de mayorización entre vectores no es un orden total, puesto que si $\mathbf{k} = (50, 25, 25)$ y $\mathbf{w} = (40, 40, 20)$ entonces no se cumple que $\mathbf{k} \prec \mathbf{w}$ ni tampoco que $\mathbf{w} \prec \mathbf{k}$.

El siguiente lema nos muestra que si $\mathbf{k}_0 = (k, k, \ldots, k)$ es un vector m dimensional de componentes iguales y no negativas tal que $m\,k = K$ y $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ un vector de componentes no negativas tal que $\sum_{i=1}^{m} k_i = K$ entonces $\mathbf{k}_0 \prec \mathbf{k}$.

Lema 2.1. *Sea* $\boldsymbol{k}_0 = (k, k, \ldots, k)$ *un vector* m *dimensional de componentes iguales y no negativas y* $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$, *un vector de componentes no negativas tal que* $\sum_{i=1}^{m} k_i = mk$ *entonces* $\boldsymbol{k}_0 \prec \boldsymbol{k}$ *para todo* $\boldsymbol{k}$.

Demostración. Sea $K = mk = \sum_{i=1}^{m} k_{[i]}$ y $j < m$, ya que $k_{[1]} \geq k_{[2]}, ..., \geq k_{[m]}$ entonces

$$mk_{[1]} \geq jk_{[1]} + k_{[j+1]} + k_{[j+2]} + \cdots + k_{[m]}$$

$$mk_{[2]} \geq jk_{[2]} + k_{[j+1]} + k_{[j+2]} + \cdots + k_{[m]}$$

$$\vdots$$

$$mk_{[j]} \geq jk_{[j]} + k_{[j+1]} + k_{[j+2]} + \cdots + k_{[m]} \,.$$

Luego

$$\begin{aligned} m\sum_{i=1}^{j} k_{[i]} &\geq j\left[\sum_{i=1}^{j} k_{[i]} + k_{[j+1]} + k_{[j+2]} + \cdots + k_{[m]}\right] \\ &\geq j\sum_{i=1}^{m} k_{[i]} \end{aligned}$$

por tanto $\sum_{i=1}^{j} k_{[i]} \geq \frac{jK}{m} = jk$, luego $\sum_{i=1}^{j} k_{[i]} \geq \sum_{i=1}^{j} k$ de donde $\mathbf{k}_0 \prec \mathbf{k}$. □

De la proposición (2.1) tenemos que la función de confiabilidad del sistema en cuestión es Shur cóncava y por el lema (2.1) claramente se verifica que

$$\overline{F}_{T_s(\mathbf{k}_0)}(t) \geq \overline{F}_{T_s(\mathbf{k})}(t) \,,$$

para todo $t \geq 0$. Luego la ubicación en forma uniforme de las reservas optimiza estocásticamente el tiempo de vida del sistema.

En [4] se obtiene un resultado importante y es que la función tasa de fallo es mínima cuando la ubicación de reservas se distribuye lo más uniformemente posible. Se prueba que la función tasa de fallo es Shur convexa de $\mathbf{k}$ y como $\mathbf{k}_0 \prec \mathbf{k}$ entonces la conclusión es inmediata.

A continuación se obtendrá en forma directa un resultado similar al examinado en [4], sin recurrir a la propiedad de que la tasa de fallo es Shur Convexa.

Supongamos que el tiempo de vida de las componentes de un sistema son variables aleatorias absolutamente continuas. Entonces como

$$\overline{F}_{T_s(\mathbf{k})}(t) = \prod_{i=1}^{m}[1 - F^{k_i+1}(t)]$$

es fácil verificar que la tasa de fallo del tiempo de vida $T_s(\mathbf{k})$ del sistema está dada por

$$r_{T_s(\mathbf{k})}(t) = f(t)\sum_{i=1}^{m}\frac{(k_i+1)F^{k_i}(t)}{1-F^{k_1+1}(t)}\,,$$

para todo $t \geq 0$ para el cual $F(t) < 1$.

Lema 2.2. *Sea* $0 \leq p < 1$ *y sea*

$$g(x) = \frac{(x+1)p^x}{1-p^{x+1}}, \quad x \geq 0\,.$$

Entonces g(x) es una función no creciente en x

Demostración. Si $p = 0$ la prueba del lema es inmediata. Supongamos que $0 < p < 1$ entonces,

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{p^x(1-p^{x+1}) + (x+1)p^x \ln p}{(1-p^{x+1})^2}\,,$$

para verificar el lema basta con demostrar que

$$(1-p^{x+1}) + (x+1)\ln p < 0\,.$$

Para ello definamos $A(x,y) = (1-y^{x+1}) + (x+1)\ln y \qquad 0 < y \leq 1$

$$\frac{dA}{dy} = -(x+1)y^x + \frac{(x+1)}{y} > 0,$$

luego $A(x,y)$ es una función creciente en y. Por tanto $A(x,y) < A(x,1) = 0$ en efecto, $A(x,y) < 0$ en particular $A(x,p) < 0$. Luego $g(x)$ es una función no creciente. □

Lema 2.3. *Si* $0 \leq p < 1$ *y sea* $\boldsymbol{k}_0 = (k,k,\ldots,k)$ *un vector* m *dimensional de componentes iguales y no negativas y* $\boldsymbol{k} = (k_1,k_2,\ldots,k_m)$ *un vector de componentes no negativas tal que* $\sum_{i=1}^{m} k_i = mk$ *entonces*

$$\frac{m(k+1)p^k}{1-p^{k+1}} \leq \sum_{i=1}^{m}\frac{(k_{[i]}+1)p^{k_{[i]}}}{1-p^{k_{[i]}+1}}\,,$$

donde $k_{[1]} \geq k_{[2]}, ..., \geq k_{[m]}$.

Demostración. Razonemos por inducción matemática. Claramente la desigualdad es válida para $m = 1$. Supongamos ahora que se tiene para $m = n$, es decir,

$$\frac{n(k+1)p^k}{1-p^{k+1}} \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{(k_{[i]}+1)p^{k_{[i]}}}{1-p^{k_{[i]}+1}}$$

y probemos que es válida para $m = n + 1$. Claramente se verifica que si $m = n + 1$ entonces $k \geq k_{[n+1]}$ luego por el Lema 2.2 se verifica que,

$$\frac{(k+1)p^k}{1-p^{k+1}} \leq \frac{(k_{[n+1]}+1)p^{k_{[n+1]}}}{1-p^{k_{[n+1]}+1}}$$

y por hipótesis inductiva se tiene,

$$\frac{n(k+1)p^k}{1-p^{k+1}} + \frac{(k+1)p^k}{1-p^{k+1}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{(k_{[i]}+1)p^{k_{[i]}}}{1-p^{k_{[i]}+1}} + \frac{(k_{[n+1]}+1)p^{k_{[n+1]}}}{1-p^{k_{[n+1]}+1}},$$

de donde

$$\frac{(n+1)(k+1)p^k}{1-p^{k+1}} \leq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(k_{[i]}+1)p^{k_{[i]}}}{1-p^{k_{[i]}+1}},$$

luego

$$\frac{m(k+1)p^k}{1-p^{k+1}} \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{(k_{[i]}+1)p^{k_{[i]}}}{1-p^{k_{[i]}+1}}$$

es válida para todo m. □

Teorema 2.1.

$$r_{T_s(\boldsymbol{k}_0)}(t) \leq r_{T_s(\boldsymbol{k})}(t)\,.$$

Demostración. Como

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{(k_{[i]}+1)p^{k_{[i]}}}{1-p^{k_{[i]}+1}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(k_i+1)p^{k_i}}{1-p^{k_i+1}}$$

entonces por el Lema 2.1, para $p = F(t)$ se verifica

$$\frac{m(k+1)p^k}{1-p^{k+1}} \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{(k_i+1)p^{k_i}}{1-p^{k_i+1}}\,.$$

Si $f(t)$ es la función de densidad de probabilidad de las componentes y de las reservas entonces

$$\frac{m(k+1)p^k}{1-p^{k+1}} f(t) \leq f(t) \sum_{i=1}^{m} \frac{(k_i+1)p^{k_i}}{1-p^{k_i+1}},$$

luego, $r_{T_s(\mathbf{k}_0)}(t) \leq r_{T_s(\mathbf{k})}(t)$. □

Se concluye entonces que la distribución uniforme de las reservas minimiza la tasa de fallo del tiempo de vida del sistema.

Referencias

[1] P. J. Boland, E. El-Neweihi y F. Proschan, *Stochastic Order for Redundancy Allocations in Series and Parallel Systems*, Adv. Appl. Prob. 24, 161–171 (1992).

[2] M. Shaked y J. Shanthikumar, *Stochastic Orders and Their Applications*, Academic Press, Inc., 1994.

[3] S.M. Ross, *Stochastic processes*, second edition, John Willy & Sons, Inc., 1996.

[4] H. Singh y R.S. Singh, Note: Optimal Allocation of Resources to Nodes of Series Systems with Respect to Failure Rate Ordering, *Naval Research Logistics*, 44, 147–152 (1997).

[5] A. Müller y D. Stoyan, *Comparison methods for stochastic models and risks*, John Wiley & Sons, New York, 2002.