

## **SOBRE LAS FORMAS EFECTIVAS DE INCORPORAR EL SOFTWARE CABRI-GEOMETRIE EN LA ENSEÑANZA DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS EN EL BACHILLERATO**

Luis Ángel Bohórquez\*

### **Resumen**

Cómo involucrar el *software* Cabri - Geometrie de manera más efectiva en el aprendizaje de conceptos geométricos es una inquietud que debe estar presente a la hora de diseñar una práctica pedagógica que haga uso efectivo de este programa. En esta revisión presento informes de investigación, experiencias de aula y documentos teóricos que sustentan el diseño de prácticas pedagógicas basadas en el planteamiento de problemas que generen diversas estrategias para resolverlos y la necesidad de acudir al *software* en forma natural. Igualmente sustentan prácticas de discusión en grupo de las diferentes estrategias para resolver un problema como ambientes propicios para el aprendizaje de conceptos matemáticos. Parece ser que muchas de las dificultades que se dan en el aprendizaje de conceptos matemáticos, en particular del concepto de área, pueden superarse si se acude a estas prácticas, consistentes con principios constructivistas.

### **Palabras clave:**

"Cabri-Geometri", matemáticas, geometría, constructivismo, enseñanza.

### **Abstract**

The following literature review attempts to answer the question of how to use the Cabri-Geometrie software effectively for the learning of geometric concepts. It is important to consider this question in order to allow the design of pedagogical practices which effectively support this learning. In the present literature review I summarize research reports, classroom experiences and theoretical documents that support the design of pedagogical practices based on giving the students problems to generate different solving strategies and the use of the program as a natural resource for doing so. This literature also supports collaborative discussion of strategies as an effective environment for the learning of mathematical concepts. It seems that many of the difficulties students have in learning mathematical concepts, particularly in the learning of the concept of area, may be overcome if we use these practices, consistent with constructivist principles.

\* Licenciado en Matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Especialista en Educación Matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Estudiante - Maestría en Educación, Universidad de los Andes.

### **Key words:**

"Cabri-Geometri", mathematics, geometry, constructivism, teaching.

Desde hace mucho tiempo ha sido de gran interés para mí involucrar herramientas computacionales en la enseñanza de las matemáticas. Esta idea tomó mayor fuerza cuando participé en un proyecto que buscaba incorporar nuevas herramientas informáticas en la clase de matemáticas, liderado por del Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Este proyecto me permitió conocer personalmente a los creadores de programas que había estudiado, lo que me llevó a profundizar más en mi conocimiento de Cabri-Geometrie (University Joseph Fourier, 1997), un *software* diseñado con el propósito específico de enseñar matemáticas, y en particular geometría. Cabri-Geometrie es un micromundo para la construcción y manipulación de figuras geométricas. Con él es posible construir puntos, segmentos, rectas, circunferencias y casi la totalidad de las figuras de la geometría plana que se presentan en la enseñanza secundaria. El programa hace posible manipular y transformar estas figuras, así como visualizar conjuntos de puntos de muy diversa naturaleza, explorar sus propiedades y realizar construcciones geométricas que creen relaciones entre objetos. El *software* está diseñado para que cuando los objetos básicos se desplacen, se conserven las relaciones definidas entre ellos, de modo que es posible observar de forma continua las modificaciones experimentadas por la figura y las características invariantes de los objetos básicos. A pesar de las posibilidades de manipulación que da este *software* y de las bondades del programa para trabajar geometría, observé que la manera como se introdujo el *software* en las aulas durante nuestro proyecto con el MEN no fue la más conveniente, posiblemente porque muchos consideraron que la simple entrada del programa a la clase motivaba por sí misma a los alumnos a estudiar matemáticas. Con esta concepción, los maestros se dedicaron más que todo a enseñar el manejo mecánico del *software* y no a dar soporte a los alumnos para que lo usaran en sus exploraciones de la geometría plana. Este hecho generó en mí la inquietud de diseñar formas efectivas de manejar el *software* en el aula. Lo logré cuando inicié labores en la Institución Educativa Distrital Federico García Lorca como docente del área de matemáticas. Allí conocí las dificultades que presentaban los estudiantes en el aprendizaje de los conceptos matemáticos, en particular los de la geometría, y generé usos diferentes del *software* para apoyar su comprensión. Sin embargo, es sólo a medida que aclaro la concepción

constructivista del aprendizaje y las prácticas que tienen como base sus principios que he empezado a aclarar también las características de la propuesta pedagógica que debo diseñar.

En esta revisión, defino estas características a partir de un resumen de informes de investigación, experiencias de aula y documentos teóricos que tienen en común el constructivismo y la aplicación pedagógica de sus principios para mejorar la comprensión de un concepto geométrico particular, el del área, con uso de recursos informáticos y, específicamente, del programa Cabri-Geometrie. Inicialmente haré explícitos los principios constructivistas que tendré en cuenta durante la revisión. En segundo lugar, presentaré informes que revelan las estrategias de solución que utilizan las personas para enfrentar problemas matemáticos y las formas como acuden a herramientas tecnológicas en el proceso. Luego presentaré documentos que mencionan los beneficios de involucrar *software* en el aula de matemáticas. Continuaré con informes de investigación que revelan la importancia del programa Cabri-Geometrie en el desarrollo de conceptos matemáticos y finalmente con documentos sobre las dificultades de los niños en el aprendizaje del concepto de área y la conveniencia de diseñar actividades que ayuden a superar estas dificultades.

Los principios constructivistas caracterizan el aprendizaje como un proceso que ocurre en quien aprende, debido a su propia acción en contexto y con los demás. Piaget (1970) fue el primero en definir el desarrollo cognoscitivo como un proceso gradual de construcción por parte del sujeto a partir de la experiencia. Para Piaget (1970) el aprendizaje es un proceso que ocurre en la interacción de quien aprende con los objetos y con el medio. Vygotsky (1978) también considera el aprendizaje como un proceso, pero para él éste ocurre en la interacción del sujeto con otros, con el lenguaje y los objetos como mediadores. Esto es, presenta al ser humano como un aprendiz social. Llama al potencial de desarrollo mediante la interacción con los demás *Zona de Desarrollo Próximo* y la define como la distancia entre la capacidad real de resolver independientemente un problema y la potencial de resolver otros en colaboración de socios de aprendizaje más avanzados (Vygotsky, 1978). Se aprende, entonces, bajo la guía de un adulto o en colaboración con iguales más capaces.

Establecer cómo enfrentan problemas matemáticos las personas, tanto individualmente como en colaboración con iguales, y comparar las actividades que realiza la gente común, los estudiantes de matemáticas y los expertos matemáticos al hacerlo, fue el interés de una investigación

efectuado por Brown, Collins y Duguid (1989) en Inglaterra. Estos investigadores conformaron tres grupos, uno de personas de distintas edades que no estudiaron matemáticas o tenían muy poca relación con esta disciplina, otro de estudiantes de matemáticas puras de diversos semestres universitarios y el último de personas dedicadas a la investigación en matemáticas. A todos los grupos les entregaron los mismos problemas, cuya característica fundamental era su relación con situaciones de la vida diaria. Analizando los escritos y las discusiones entre integrantes de los diferentes grupos, los investigadores observaron que existe gran similitud entre las actividades que emprende la gente común y las que realizan los expertos para la solución de problemas. Hallaron, por ejemplo, que la gente común razona en términos de relaciones causales y los expertos, con modelos de la misma naturaleza y que ambos grupos intentan producir un significado negociable y una comprensión socialmente construida. La diferencia está en los estudiantes de matemáticas, quienes intentan producir significados fijos y respuestas únicas. Según Brown, Collins y Duguid (1989) esta semejanza resalta la importancia de hacer énfasis en el uso de estas estrategias durante la solución de un problema en clase de matemáticas. Describen el aprendizaje ideal de las matemáticas como una práctica que se desarrolla dentro de una comunidad en constante interacción.

Teniendo en cuenta estos resultados, Santos (1997) efectuó una investigación de características similares con estudiantes de secundaria y estudiantes de maestría, pero centró su atención en la manera como los sujetos recurrieron en este proceso a diferentes herramientas tecnológicas y seleccionaron de forma natural aquellas que les brindaban mayor información para la resolución del problema. Santos (1997) registró tanto en cuadernos de observación como en material filmico las acciones de los participantes al resolver un problema matemático y corroboró la similitud de los grupos en las estrategias para enfrentar el problema. Además encontró que los estudiantes acudían a diferentes herramientas tecnológicas como la calculadora algebraica, dependiendo de la utilidad que encontraran en ellas y aún sin conocerlas completamente. Así mismo, observó que los estudiantes interactuaban con otros en la solución de problemas, de manera que compartían diferentes métodos que podían ayudarles a resolverlos. Vio que analizaban su pertinencia, evaluaban su potencial particular o general y de allí pasaban a determinar la importancia de una herramienta u otra en la solución.

Una experiencia de aula de Campistrous y López (2001) con estudiantes de secundaria de 15 y 17 años, los obligó a enfrentar problemas matemáticos de manera individual y a contrastar luego su solución con las de otros. El objetivo primordial de esta intervención fue mostrar el carácter heurístico de la calculadora algebraica. En otras palabras, se deseaba verificar que este instrumento computacional, caracterizado por tener *software* de geometría dinámica y tratamiento algebraico, puede ser una herramienta importante para ayudar a solucionar problemas.

Campistrous y López (2001) manifiestan que los estudiantes acuden de manera natural a la calculadora algebraica al enfrentar problemas, dada la posibilidad que tienen de manipular los objetos que aparecen en pantalla. Esta afirmación coincide con las de Moreno (2001) en varios trabajos teóricos, en los que indica que esto puede ocurrir porque los objetos virtuales que aparecen en la pantalla pueden ser manipulados de tal manera que se genera una sensación de existencia casi material.

Es por esta razón que Balacheff y Kaput (1996) habían asegurado con anterioridad que las herramientas computacionales han generado un nuevo realismo matemático. Los supuestos teóricos propuestos por estos investigadores fueron tenidos en cuenta en un trabajo de investigación desarrollado por Cedillo (1999), cuyo objetivo primordial fue establecer que la calculadora algebraica, a diferencia del lápiz y el papel, permite una retroalimentación inmediata al estudiante porque no sólo puede usarla para registrar expresiones algebraicas, sino para obtener de manera casi inmediata el valor numérico específico de una variable o para construir tablas y gráficas necesarias para exploraciones subsiguientes. Cedillo (1999) trabajó en la ciudad de México con 120 estudiantes de secundaria entre los 13 y los 14 años. Generó una serie de actividades y contrastó las estrategias de los estudiantes cuando acudían al lápiz y el papel o a la calculadora. Los resultados que obtuvo lo llevaron a afirmar que involucrar la calculadora programable en el aula daba origen a que los estudiantes abordaran las actividades mediante estrategias no convencionales que generaban al seguir sus propias formas de razonamiento.

Estas mismas ventajas de incorporar el *software* en la enseñanza de las matemáticas son consideradas por Laborde (1998) en un estudio en Francia sobre la enseñanza de la noción de variación con geometría dinámica. La investigadora trabajó con estudiantes de entre 12 y 13 años, con base en una investigación anterior suya que reveló la dificultad de estos niños para lograr pasar de lo espacial a lo teórico, construir objetos variables por

medio de funciones (no solamente con la ayuda de informaciones visuales que toman del dibujo) y razonar sobre un objeto variable y no sobre un caso específico representado. Consideró la hipótesis de que esta dificultad se reduce cuando se involucra el *software* de geometría dinámica Cabri-Geometrie y les planteó a los alumnos una serie de problemas de geometría para resolver con lápiz y papel o con el *software*. Observó las estrategias que utilizaban cuatro parejas de alumnos para resolver estos problemas y analizó su comportamiento con cada herramienta. Laborde (1998) observó cómo el Cabri-Geometrie se constituyó en una ventana hacia las concepciones de los alumnos pues ayuda a la exteriorización del pensamiento por medio de la cantidad de acciones y experimentos que permite, mucho más ricos en posibilidades que el papel.

Santos (2001) también exploró la mayor cantidad de posibilidades que ofrece el *software* Cabri-Geometrie sobre el papel, en la enseñanza de conceptos geométricos. En la descripción de una experiencia de aula indica que cuando los estudiantes disponen de una herramienta tecnológica como el *software* de geometría dinámica, pueden enfocar su atención en procesos de toma de decisiones, reflexión, razonamiento y resolución de problemas. Para ilustrar esta situación planteó a estudiantes de secundaria y estudiantes universitarios mexicanos una serie de problemas en donde el uso de Cabri-Geometrie permitía una mejor aproximación a soluciones. Observó que, gracias a la posibilidad que brinda el *software* de manipular los objetos geométricos, su uso ayudó a los estudiantes a definir estos objetos según sus propiedades, a diferencia de lo que sucede con el lápiz y el papel, que no dejan identificar claramente invariantes. La posibilidad de observar invariantes resultó fundamental, según Santos, tanto para el desarrollo de conjeturas por parte de los estudiantes, como en el proceso de argumentación y comunicación de esas conjeturas. Esto, según el investigador, supera muchas de las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de conceptos geométricos (Santos, 2001).

Las dificultades en la comprensión de conceptos específicos han sido objeto de discusión teórica y también de investigación entre personas interesadas en el aprendizaje de las matemáticas. Hart (1984) por ejemplo, aplicó una serie de instrumentos que lo llevaron a determinar problemas en la comprensión del concepto geométrico de área a partir de las estrategias de solución de problemas de área usadas por estudiantes de secundaria entre los doce y catorce años. Este investigador encontró que el error más frecuente que presentaban estaba asociado con la

confusión entre área y perímetro. En muchos casos los niños calculan el área y el perímetro y le asignan el dato mayor al área y el menor al perímetro (Hart, 1984). Otra dificultad que observó es que los estudiantes no asociaban fácilmente figuras de diferente forma con la misma área, de modo que no manejaban la conservación del área.

Algunas dificultades se asocian con la medida del área. Éstas se deben en la mayoría de los casos, según trabajos de Del Olmo, Moreno y Gil (1993), a metodologías de enseñanza que no tienen en cuenta el uso de los sentidos para manejar atributos de superficie y que se reducen al uso de instrumentos de medida convencionales, que generan elecciones poco afortunadas como la de usar la regla para medir la longitud de una curva. Además, Del Olmo, Moreno & Gil (1993) establecen que también se presentan dificultades en la comprensión del área cuando se plantean a los estudiantes problemas que contienen datos erróneos o no reales o en donde sólo se calcula la medida de figuras regulares. De igual manera, consideran erróneo como tratamiento metodológico de la medida abusar de la medida exacta y confundirla con la medida entera. Los autores afirman que si se tienen en cuenta en el diseño de actividades principios de autonomía en la construcción del conocimiento como los establecidos por Piaget y Vygostky, los estudiantes tendrán menos dificultades en la comprensión real del área (Del Olmo, Moreno & Gil, 1993).

A partir de los informes de investigación, las experiencias de aula y los documentos teóricos que he presentado en esta revisión, parece claro que la efectividad en el uso de *software* para el aprendizaje matemático, y en particular para la comprensión de conceptos geométricos, puede relacionarse con el diseño pedagógico de actividades consistente con principios constructivistas. La literatura indica la conveniencia de plantear problemas a los estudiantes que generen diversas estrategias para resolverlos y la necesidad de acudir al *software* de manera natural. Así también, parece que induce a la discusión en grupo de las diferentes estrategias utilizadas para resolver un problema y de las formas y ventajas de utilizar el *software* puede generar ambientes propicios de aprendizaje. Aunque los documentos revisados no presentan explícitamente prácticas pedagógicas que busquen el desarrollo de conceptos específicos, parece que programas como Cabri-Geometrie pueden establecer diferencias importantes en la comprensión de algunos conceptos de la geometría y que vale la pena experimentar con actividades que lleven a los alumnos a manipular libremente el programa para sustentar sus estrategias de comprensión.

## Referencias

- Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-Based Learning Environment in Mathematics. En A.J. Bishop; K. Clements; C. Keitel; J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.). *International Handbook of Mathematical Education* (469 - 501). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Brown, J.S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18, 32-42.
- Campistrous, L. & López J. (2001). La calculadora como una herramienta heurística. *Revista UNO*, 28, 84-99.
- Cedillo, T. (1999). *Desarrollo de Habilidades Algebraicas*. México: Editorial Iberoamericana.
- Hart, K. (1984). *Problemas en el aprendizaje del concepto de área*. México: Labor.
- Del Olmo, M.; Moreno, M.F. & Gil, C.F. (1993). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.
- Laborde C. (1998). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer- based environment. En: C. Mammana & V. Villani (Eds.). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21 st Century. ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Piaget, J. (1970). Piaget's Theory. En P. H. Mussen (Ed.). *Carmichael's Manual of Child Psychology* (Vol.1). New York: Wiley.
- Moreno, L. (2001). Cognición, mediación y tecnología. *Avance y Perspectiva*, 20, 65-68.
- Santos Trigo, M. (1997). ¿Qué significa el aprender matemáticas?. Una experiencia con estudiantes de cálculo. *Educación Matemática*, 7, 46-62.
- Santos Trigo, M. (2001). Potencial didáctico del *software* dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. *Avance y Perspectiva*, 20, 247- 258.
- University Joseph Fourier (1997). *Cabri-Geometrie*. Texas Instruments Incorporated.
- Vygotsky, (1978). Interaction between learning and development. En: *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.