Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XIII No. 2 (2006), pp. 159–175

SISTEMA PARACOMPLETO LBP∘¬C

MANUEL SIERRA A. (*)

Resumen. El lenguaje del sistema LBP∘¬C extiende el lenguaje de la lógica clásica positiva al incluir un operador de negación débil y un operador de determinabilidad, y además permite definir un operador de negación fuerte, el cual tiene todas las características de la negación clásica. El sistema es caracterizado por una semántica de valuaciones tradicionales con la cual se prueba que, respecto al operador de negación débil, el sistema es paracompleto. Como es de esperarse, cuando las fórmulas involucradas en un argumento se comportan clásicamente, es decir son determinables, entonces la negación débil se comporta como la negación clásica, pero este requisito no siempre es necesario, la negación débil puede ser puntualmente tan potente como la clásica aunque las fórmulas involucradas no se comporten clásicamente.

Palabras claves. Sistema LBP∘¬C, lógica clásica positiva, operador de negación débil, operador de negación fuerte, operador de determinabilidad, sistema paracompleto.

2000 Mathematics Subject Classification: 03B60, 03B22

(*) Manuel Sierra A. Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT.
E-mail: msierra@eafit.edu.co.

ABSTRACT. The language of the system LBPo¬C extends the language of the positive classical logic by including a weak negation operator and a determinability operator, furthermore it allows to define a strong negation operator having the same characteristics of the classical negation. The system is characterized by a semantic of traditional valuations showing that with respect to weak negation operator the system is paracomplete. As expected, when the formulas involved in the argument behave classically, that is, are determinable, then the weak negation behaves as the classical negation, but this requirement is not always necessary, the weak negation can be pointwise as powerful as the classical one, although the formulas involved do not behave classically.

KEY WORDS AND PHRASES. LBPo¬C system, positive classical logic, weak negation operator, strong negation operator, determinability operator, paracomplete system.

PRESENTACIÓN

La negación clásica tiene dos características importantes, la primera dice que si se acepta la negación de un enunciado entonces el enunciado no puede ser aceptado, la segunda dice que si no se acepta la negación de un enunciado entonces el enunciado debe ser aceptado. La primera característica prohíbe que un enunciado y su negación sean ambos aceptados, no permite que un enunciado sea *compatible* con su negación. La segunda característica prohíbe que un enunciado y su negación sean ambos no aceptados, no permite las *indeterminaciones* respecto a la negación. Estas dos características son conocidas como los principios de *no-contradicción* y del *tercero excluido* respectivamente.
En [1] se proponen las llamadas *lógicas de la vaguedad*, las cuales se caracterizan por soportar las inconsistencias y/o las indeterminaciones. Uno de estos sistemas, llamado V_2, no soporta las inconsistencias pero si soporta las indeterminaciones, al permitir que una teoría tenga espacios en los que ni un enunciado ni su negación son ciertos. En V_2 para cada fórmula un operador de *buen comportamiento* respecto a las indeterminaciones es definido como la disyunción entre la fórmula y su negación, es decir como el *principio del tercero excluido*. La idea es que cuando una fórmula está débilmente negada y tiene buen comportamiento entonces la fórmula débilmente negada se debe comportar como si estuviera clásicamente negada.

La no validez del tercero excluido y la validez del principio de no-contradicción se presentan también en la *lógica intuicionista* presentada en [6]. Este sistema deductivo formaliza los planteamientos del *intuicionismo*. El intuicionismo acepta el manejo que la lógica clásica da a los conjuntos finitos, pero rechaza su manejo de los infinitos actuales y exige además que aún en lo relacionado con los infinitos potenciales no se utilice ni el principio del tercero excluido, ni la eliminación de la doble negación.

El sistema *lógica básica paracompleta con negación débil y determinabilidad* LBPo¬C presentado en este trabajo, resulta ser una generalización de la lógica clásica. El sistema posee un operador de *negación débil* el cual tiene la característica de no prohibir la indeterminabilidad de un enunciado con su negación, y por lo tanto es *paracompleto*. Los teoremas acerca de la negación clásica son recuperados de dos formas, por un lado definiendo en términos de los operadores negación débil y determinabilidad, un operador de *negación fuerte*, y por otro lado, pidiendo a las fórmulas que se encuentran bajo el alcance de la negación, algunos requisitos de determinabilidad. En el sistema la determinabilidad respecto a la negación débil de una fórmula puede ser caracterizada como la disyunción entre la fórmula y su negación débil.

El sistema es caracterizado con una semántica de valuaciones tradicional, las pruebas de validez y completitud son presentadas de manera detallada.

Sistema deductivo LBPo¬C

El lenguaje de la *Lógica Clásica Positiva* LCP consta de los operadores binarios $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ y $\leftrightarrow$, además del paréntesis izquierdo y el paréntesis derecho. El *lenguaje del sistema* LBPo¬C se obtiene extendiendo el lenguaje de la lógica clásica positiva con los operadores monádicos ¬, C.

El conjunto de *fórmulas de* LBPo¬C es generado por las siguientes reglas y sólo por ellas:

R1. Se tiene un conjunto enumerable de *fórmulas atómicas*.

R2. Si A es una fórmula entonces $\neg(A)$ y $(A)^C$ son fórmulas[1].

[1] ¬A es la negación débil de A. A^C indica que las fórmulas A y ¬A son determinables, semánticamente significa que al menos una de A y ¬A es verdadera. A^C se lee A es determinable con su negación débil.

R3. Si A y B son fórmulas entonces (A)$\wedge$(B), (A)$\vee$(B), (A)$\rightarrow$(B) y (A)$\leftrightarrow$(B)son fórmulas.

El *sistema deductivo para* LBPo$\neg$C es una extensión del cálculo proposicional clásico positivo LCP, por lo que se toman 2 grupos de axiomas.
Axiomas para el cálculo proposicional clásico:

Ax0.1 A$\rightarrow$(B$\rightarrow$A).
Ax0.2 (A$\rightarrow$(B$\rightarrow$C))$\rightarrow$((A$\rightarrow$B)$\rightarrow$(A$\rightarrow$C)).
Ax0.3 A$\rightarrow$(A$\vee$B).
Ax0.4 B$\rightarrow$(A$\vee$B).
Ax0.5 (A$\rightarrow$C)$\rightarrow$((B$\rightarrow$C)$\rightarrow$((A$\vee$B)$\rightarrow$C)).
Ax0.6 (A$\wedge$B)$\rightarrow$A.
Ax0.7 (A$\wedge$B)$\rightarrow$B.
Ax0.8 (A$\rightarrow$B)$\rightarrow$((A$\rightarrow$C)$\rightarrow$(A$\rightarrow$(B$\wedge$C))).
Ax0.9 (A$\leftrightarrow$B)$\rightarrow$(A$\rightarrow$B).
Ax0.10 (A$\leftrightarrow$B)$\rightarrow$(B$\rightarrow$A).
Ax0.11 (A$\rightarrow$B)$\rightarrow$[(B$\rightarrow$A)$\rightarrow$(A$\leftrightarrow$B)].
Ax0.12 ((A$\rightarrow$B)$\rightarrow$A)$\rightarrow$A.

Axiomas para los nuevos operadores:

Ax1.1. $\neg$A$\rightarrow$A^C.
Ax1.2. $\neg$A$\vee$(A$\rightarrow$A^C).
Ax1.3. (A$\wedge\neg$A)$\rightarrow$B.
Ax1.4. (A$^C \rightarrow \neg$A)$\vee$A.

Como única *regla de inferencia* se tiene el *Modus Ponens* MP: de A y A$\rightarrow$B se infiere B.
En el sistema se define un operador de *negación fuerte*[2]: $\sim$A $=$ A$^C \rightarrow \neg$A.
Se dice que una fórmula A es un *teorema de LBPo*$\neg$C, denotado $\vdash$ A, si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP.
Si Γ es un conjunto de fórmulas, se dice que una fórmula A es un *teorema de LBPo*$\neg$C *a partir de* Γ, denotado $\Gamma \vdash$ A, si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un

[2]La negación fuerte posee las características de la negación clásica.

axioma o un elemento de Γ o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP.

Proposición 1 (Consecuencias en LCP).
Principio de identidad: $\vdash$ A→A
Teorema de deducción: Sean A y B fórmulas de LBPo¬C y Γ un conjunto de fórmulas de LBPo¬C. Si $\Gamma\cup\{A\} \vdash B$ entonces $\Gamma \vdash A\rightarrow B$.
Introducción y eliminación de la conjunción: $\vdash A\wedge B \Leftrightarrow \vdash A$ y $\vdash B$
Conmutatividad de la conjunción: $\vdash A\wedge B \Leftrightarrow \vdash B\wedge A$
Conmutatividad de la disyunción: $\vdash A\vee B \Leftrightarrow \vdash B\vee A$
Introducción de la disyunción: $\vdash A \Rightarrow \vdash A\vee B$ y $\vdash B\vee A$.
Silogismo hipotético: $\vdash A\rightarrow B$ y $\vdash B\rightarrow C \Rightarrow \vdash A\rightarrow C$.
Eliminación de la disyunción: $\vdash A\vee B$ y $\vdash A\rightarrow C$ y $\vdash B\rightarrow C \Rightarrow \vdash C$.
Dilema constructivo: $\vdash A\vee B$ y $\vdash A\rightarrow C$ y $\vdash B\rightarrow D \Rightarrow \vdash C\vee D$.
Exportación: $\vdash A\rightarrow(B\rightarrow C) \Leftrightarrow \vdash (A\wedge B)\rightarrow C$
Disyunción en el antecedente: $\vdash (A\vee B)\rightarrow C) \Leftrightarrow \vdash A\rightarrow C$ y $\vdash B\rightarrow C$

Prueba. Todos son resultados muy conocidos de LCP. Para detalles de las pruebas ver [2] y [4]. □

Proposición 2 (Afirmar es determinar). $A\rightarrow A^C$.

Prueba. Supóngase A y $A\rightarrow A^C$. Por modus ponens resulta A^C, por el teorema de deducción se ha probado que de A se infiere $(A\rightarrow A^C)\rightarrow A^C$. Por Ax1.1 se tiene $\neg A\rightarrow A^C$, y por Ax1.2 se tiene $\neg A\vee(A\rightarrow A^C)$. Utilizando eliminación de la disyunción entre los 3 resultados se obtiene que de A se infiere A^C. Por el teorema de deducción se concluye $A\rightarrow A^C$. □

Proposición 3 (Trivialización con la negación fuerte). $A\rightarrow(\sim A\rightarrow B)$.

Prueba. Gracias al teorema de deducción, basta con probar que si se tienen tanto A como $\sim$A se puede inferir B. Supóngase entonces que se tienen A y $\sim$A. Por la definición de la negación fuerte al tener $\sim$A resulta $A^C \rightarrow \neg A$. Por la proposición 2 se tiene $A\rightarrow A^C$, y al tener A se infiere A^C, lo cual junto con $A^C \rightarrow \neg A$ permite inferir $\neg$A. Por introducción de la conjunción se obtiene $A\wedge\neg A$, y como por Ax1.3 se tiene $(A\wedge\neg A)\rightarrow B$, entonces resulta B. Por lo tanto, de A y $\sim$A se infiere B. □

Proposición 4 (Tercero excluido)**.** $(\sim A \to A) \to A$.

Prueba. Se supone $\sim A \to A$ y se debe probar A. Utilizando la definición de negación fuerte se tiene $(A^C \to \neg A) \to A$, por el principio de identidad (proposición 1) se tiene $A \to A$, y por Ax1.4 $(A^C \to \neg A) \vee A$. Utilizando eliminación de la disyunción en estos tres resultados se infiere A. Por lo tanto, de $\sim A \to A$ se sigue A, lo cual por el teorema de deducción es $(\sim A \to A) \to A$. $\square$

Proposición 5 (La negación fuerte se comporta como la clásica)**.** Los teoremas del cálculo proposicional clásico que involucren la negación clásica son teoremas del sistema LBPo¬C cuando se cambia la negación clásica por la negación fuerte.

Prueba. Basta notar que el cálculo proposicional clásico puede ser axiomatizado por Ax0.1, ..., Ax0.12, proposición 4 y proposición 3. Para los detalles ver [8]. $\square$

Semántica para LBPo¬C

Una *valuación* v es una función que interpreta las fórmulas atómicas como elementos del conjunto $\{0, 1\}$. La valuación v se extiende a una función V que interpreta las fórmulas de LBPo¬C en el conjunto $\{0, 1\}$ de la siguiente manera:

Si p es atómica entonces $V(p) = v(p)$.
V∧. $V(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 1$.
V∨. $V(A \vee B) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 0$ y $V(B) = 0$.
V→. $V(A \to B) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 0$.
V↔. $V(A \leftrightarrow B) = 1 \Leftrightarrow V(A) = V(B)$.
VI. $V(A^C) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$.
V¬. $V(\neg A) = 1 \Rightarrow V(A) = 0$.

Se dice que una fórmula A es *válida* y se denota $\models A$, si y solamente si para toda valuación v, $V(A) = 1$.

Proposición 6 (La negación fuerte es clásica)**.** V∼. $V(\sim A) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 0$.

Prueba. Supóngase que existe una valuación v tal que, $V(\sim A) = 1$ y $V(A) = 1$. Por la definición de negación fuerte se tiene que $V(A^C \to \neg A) = 1$, y entonces de acuerdo a V→, $V(A^C) = 0$ o $V(\neg A) = 1$. Como $V(A) = 1$ por V¬ resulta

que V(¬A) = 0. De los dos últimos resultados se obtiene que V(A^C) = 0, lo cual por VC implica que V(A) = 0. Como el último resultado es imposible, se ha probado que, si V(∼A) = 1 entonces V(A) = 0.
Para probar la recíproca, supóngase que existe una valuación v tal que, V(A) = 0 y V(∼A) = 0. Al ser V(∼A) = 0, por la definición de negación fuerte se tiene que V(A^C → ¬A) = 0, y por V→ resulta V(A^C) = 1 y V(¬A) = 0. Al tener V(A) = 0 y V(¬A) = 0, por VC se obtiene que V(A^C) = 0, lo cual es imposible. Por lo tanto, si V(A) = 0 entonces V(∼A) = 1. □

Para probar que la semántica presentada caracteriza al sistema deductivo LBPo¬C, se deben garantizar dos puntos, validez y completitud. El primero dice que todos los teoremas del sistema sean válidos, esto se logra con la proposición 10. El segundo dice que todos los enunciados válidos sean teoremas, esto se logra con la proposición 17. Lo anterior significa que los teoremas del sistema son las fórmulas válidas y solamente ellas.

Validez de LBPo¬C

Proposición 7 (Validez de los axiomas positivos)**.** Los axiomas Ax0.1, . . . , Ax0.12 son válidos.

Prueba. Estos son resultados bien conocidos de la LCP. Para detalles de las pruebas ver [7]. □

Proposición 8 (Validez de los axiomas para los nuevos operadores)**.** Ax1.1, Ax1.2, Ax1.3 y Ax1.4 son válidos.

Prueba. Supóngase que Ax1.1 es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, V(¬A→A^C) = 0, es decir según V→, V(¬A) = 1 y V(A^C) = 0. Al ser V(A^C) = 0, por VC, se tiene que V(¬A) = 0, lo cual es imposible. Por lo tanto, Ax1.1 es válido.
Supóngase que Ax1.2 es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, V(¬A∨(A→A^C)) = 0, por V∨ se tiene V(¬A) = 0 y V(A→A^C) = 0. Como V(A→A^C) = 0, por V→ resultan V(A) = 1 y V(A^C) = 0. Al ser V(A^C) = 0, por VC se obtiene que V(A) = 0, lo cual es imposible. Por lo tanto, Ax1.2 es válido.
Supóngase que Ax1.3 es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, V((A∧¬A)→B) = 0, es decir según V→, V(A∧¬A) = 1. Se tiene entonces por

V$\wedge$ que V(A) = 1 y V($\neg$A) = 1. Al ser V($\neg$A) = 1, de acuerdo a V$\neg$ resulta que V(A) = 0, lo cual no puede ser. Por lo tanto, Ax1.3 es válido.
Supóngase que Ax1.4 es inválido. Por lo que existe una valuación v tal que, V((A^C $\rightarrow$ $\neg$A)$\vee$A) = 0, es decir según V$\vee$, V(A^C $\rightarrow$ $\neg$A) = 0 y V(A) = 0. Al ser V(A^C $\rightarrow$ $\neg$A) = 0, por V$\rightarrow$ se tiene V(A^C) = 1 y V($\neg$A) = 0. Se tienen V(A) = 0 y V($\neg$A) = 0, por VC se infiere V(A^C) = 0, lo cual no puede ser. Por lo tanto, Ax1.4 es válido. □

Proposición 9 (Modus Ponens preserva validez)**.** Sean A y B fórmulas de LBPo$\neg$C. Si A y A$\rightarrow$B son válidas entonces B también es válida.

Prueba. Es un resultado muy conocido. Para detalles de la prueba ver [4] o [7]. □

Proposición 10 (Validez)**.** Todo teorema de LBPo$\neg$C es válido.

Prueba. Se procede como es habitual en las pruebas de validez, es decir una prueba por inducción sobre la longitud de la demostración del teorema. Para garantizar el resultado basta que los axiomas sean válidos y que las reglas de inferencia del sistema preserven validez. Puesto que esto se ha garantizado con las proposiciones 7, 8 y 9, la proposición queda probada. Para detalles de la estructura de la prueba ver [4] o [7]. □

Completitud de LBPo¬C

Para la prueba de completitud se siguen las directrices dadas por Henkin para probar la completitud de la lógica de primer orden en [5].
Las pruebas de las proposiciones 11, 12, 13 y 15 se encuentran en [4] y [7].
Una *extensión* de un sistema deductivo se obtiene alterando o ampliando el conjunto de axiomas de manera que todos los teoremas del sistema sigan siendo teoremas. Mientras no se diga lo contrario, se trabajará con extensiones de LBPo$\neg$C pero el conjunto de fórmulas no se cambiará, por lo que se dirá simplemente fórmulas o fórmulas de LBPo$\neg$C cuando se quiera hacer referencia a las fórmulas de una extensión de LBPo$\neg$C.
Una extensión es *consistente* si no existe ninguna fórmula A tal que tanto A como $\sim$A sean teoremas de la extensión. Una extensión es *completa* si para toda fórmula A, o bien A o bien $\sim$A es teorema de la extensión.

Proposición 11 (Consistencia)**.** LBPo¬C es consistente.

Proposición 12 (Extensión consistente)**.** Sea E una extensión de LBPo¬C y sea A una fórmula que no sea teorema de E. Entonces E* es también consistente, siendo E* la extensión de LBPo¬C obtenida añadiendo ∼A como nuevo axioma a E.

En la proposición 13 se presentan algunas reglas derivadas que se requieren para la prueba de completitud. Todas ellas son resultados bien conocidos de la lógica clásica, y se tienen como consecuencia de la proposición 5. Para detalles de las pruebas ver [2] y [4].

Proposición 13 (Reglas de inferencia para la negación fuerte)**.**

Silogismo disyuntivo: $\vdash$ A∨B y $\vdash$ ∼A $\Rightarrow$ $\vdash$ B.
Demostración indirecta: $\vdash$ A→(B∧ ∼B) $\Rightarrow\vdash$∼A. $\vdash$ ∼A→(B∧ ∼B) $\Rightarrow$ $\vdash$ A.
Doble negación: $\vdash$ A $\Leftrightarrow\vdash$∼∼A.
Negación de la disyunción: $\vdash$∼(A∨B) $\Leftrightarrow\vdash$∼A∧ ∼B.
Negación de la conjunción: $\vdash$ ∼(A∧B) $\Leftrightarrow\vdash$∼A∨ ∼B.
Negación del condicional: $\vdash$ ∼(A→B) $\Leftrightarrow$ $\vdash$ A∧ ∼B.
Transposición: $\vdash$ A→B $\Leftrightarrow\vdash$∼B→∼A.
Modus Tollens MT: $\vdash$ A→B y $\vdash$ ∼B $\Rightarrow\vdash$∼A.
Implicación material: $\vdash$ A→B $\Leftrightarrow\vdash$∼A ∨ B.
Equivalencia material: $\vdash$ A↔B $\Leftrightarrow$ $\vdash$ (A∧B)∨(∼A∧ ∼B).
Transposición en la equivalencia: $\vdash$ A↔B $\Leftrightarrow\vdash$∼A↔∼B.

Proposición 14 (Disyunción y Equivalencia en las extensiones completas)**.** Si J es una extensión consistente y completa de LBPo¬C, entonces

a. $\vdash_J$ A∨B si y solo si $\vdash_J$ A o $\vdash_J$ B.
b. $\vdash_J$ A↔B $\Leftrightarrow$ $\vdash_J$ A $\Leftrightarrow\vdash_J$ B.

Prueba. Para la parte a, supóngase que $\vdash_J$ A∨B pero no $\vdash_J$ A y no $\vdash_J$ B, entonces se tendría que $\vdash_J$∼A al ser J completa. Al tener $\vdash_J$ A∨B y $\vdash_J$∼A, por silogismo disyuntivo, se infiere $\vdash_J$ B, pero se supuso que no. Por lo tanto, si $\vdash_J$ A∨B entonces $\vdash_J$ A o $\vdash_J$ B. La recíproca es aplicación inmediata de la introducción de la disyunción.

Para la parte b, supóngase que A$\leftrightarrow$B es un teorema de J, por Ax0.9 y Ax0.10 también lo son A$\rightarrow$B y B$\rightarrow$A. Si A fuese teorema de J entonces por MP también lo sería B, es decir, $\vdash_J$ A $\Rightarrow\vdash_J$ B. De igual forma se prueba que $\vdash_J$ B $\Rightarrow\vdash_J$ A. Para la recíproca supóngase que $\vdash_J$ A $\Leftrightarrow$ $\vdash_J$ B, por lo que $\vdash_J$ A $\Rightarrow\vdash_J$ B, y supóngase que no se tiene $\vdash_J$ A$\rightarrow$B. Al ser J completa resulta que $\vdash_J$ $\sim$(A$\rightarrow$B), lo cual por negación del condicional significa que $\vdash_J$ A$\wedge$ $\sim$B y por eliminación de la conjunción $\vdash_J$ A y $\vdash_J$$\sim$B. Al tener $\vdash_J$ A y $\vdash_J$ A $\Rightarrow$ $\vdash_J$ B, se infiere $\vdash_J$ B, lo cual es imposible ya que $\sim$B es un teorema de J y J es consistente. De igual forma se prueba $\vdash_J$ B$\rightarrow$A y por Ax0.11 se tiene $\vdash_J$ A$\leftrightarrow$B. □

Proposición 15 (Extensión consistente y completa)**.** Sea E una extensión consistente de LBPo¬C. Entonces existe una extensión consistente y completa de E.

Proposición 16 (Valuación asociada a una extensión)**.** Si E es una extensión consistente de LBPo¬C, entonces existe una valuación en la cual todo teorema de E toma el valor 1.

Prueba. Se define v sobre fórmulas de LBPo¬C haciendo: V(A) = 1 si $\vdash_J$ A, y V(A) = 0 si $\vdash_J$$\sim$A, siendo J una extensión consistente y completa de E, como la dada en la proposición 15. Nótese que V está definida sobre todas las fórmulas, por ser J completa. Ahora bien, V(A) = 1 $\Leftrightarrow$ V($\sim$A) = 0 para toda fórmula A, ya que J es consistente.
Para el caso del condicional, utilizando la negación del condicional, y la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que V(A$\rightarrow$B) = 0 $\Leftrightarrow\vdash_J$$\sim$(A$\rightarrow$B) $\Leftrightarrow\vdash_J$ A$\wedge$ $\sim$B $\Leftrightarrow\vdash_J$ A y $\vdash_J$$\sim$B $\Leftrightarrow$ V(A) = 1 y V(B) = 0, por lo que se satisface la definición V$\rightarrow$.
Para el caso de la conjunción, utilizando la introducción y eliminación de la conjunción, se tiene que V(A$\wedge$B) = 1 $\Leftrightarrow\vdash_J$ A$\wedge$B $\Leftrightarrow\vdash_J$ A y $\vdash_J$ B $\Leftrightarrow$ V(A) = 1 y V(B) = 1, por lo que se satisface la definición V$\wedge$.
Para el caso de la disyunción, utilizando la proposición 14, disyunción en las extensiones completas, se tiene que V(A$\vee$B) = 1 $\Leftrightarrow\vdash_J$ A$\vee$B $\Leftrightarrow$ ($\vdash_J$ A o $\vdash_J$ B) $\Leftrightarrow$ (V(A) = 1 o V(B) = 1), por lo que se satisface la definición V$\vee$.
Para el caso de bicondicional, utilizando la proposición 14, equivalencia en las extensiones completas, se tiene que V(A$\leftrightarrow$B) = 1 $\Leftrightarrow\vdash_J$ A$\leftrightarrow$B $\Leftrightarrow$ ($\vdash_J$ A $\Leftrightarrow\vdash_J$

B) $\Leftrightarrow$ (V(A) $=1 \Leftrightarrow$ V(B) $=1$) $\Leftrightarrow$ V(A) $=$ V(B), por lo que se satisface la definición V$\leftrightarrow$.
Para el caso de la determinabilidad. Supóngase que V(A^C) $=0$, por la definición de v resulta $\vdash_J$∼A^C, y por Ax1.1 se tiene $\vdash_J$ ¬A→A^C, por modus tollens se infiere entonces $\vdash_J$ ∼ ¬A, y por la definición de v se tiene V(¬A) $=0$. Por Ax1.2 se tiene que $\vdash_J$ ¬A∨(A→A^C), y como se tiene $\vdash_J$∼ ¬A, entonces por silogismo disyuntivo se infiere $\vdash_J$ A→A^C, y como también se tiene $\vdash_J$∼A^C, por modus tollens resulta $\vdash_J$∼A, lo que por la definición de v significa que V(A) $=$ 0. Se ha probado entonces que, si V(A^C) $=0$ entonces V(A) $=0$ y V(¬A) $=0$.
Para probar la recíproca supóngase que V(A) $=0$ y V(¬A) $=0$. Por la definición de v resulta $\vdash_J$∼A y $\vdash_J$∼ ¬A. Con Ax1.4 se tiene $\vdash_J$ (A^C → ¬A)∨A, y al tener $\vdash_J$∼A por conmutatividad y silogismo disyuntivo resulta $\vdash_J$ (A^C → ¬A), pero como se tiene $\vdash_J$∼ ¬A, entonces por modus tollens se infiere $\vdash_J$∼A^C, lo que por la definición de v es V(A^C) $=0$. Por lo tanto, si V(A) $=0$ y V(¬A) $=0$ entonces V(A^C) $=0$.
Se ha probado entonces que V(A^C) $=0 \Leftrightarrow$ V(A) $=0$ y V(¬A) $=0$, por lo que se satisface la definición VC.
Para el caso de la negación débil, supóngase que V(A) $=1$ y V(¬A) $=1$. Por la definición de v resulta $\vdash_J$ A y $\vdash_J$ ¬A, y por introducción de la conjunción se infiere $\vdash_J$ A∧¬A . Por Ax1.3 se tiene $\vdash_J$ (A∧¬A)→∼A, y por modus ponens resulta $\vdash_J$∼A. Lo cual es imposible ya que $\vdash_J$ A y J es consistente. Por lo tanto, V(¬A) $=1 \Rightarrow$ V(A) $=0$, por lo que se satisface la definición V¬.
Con base en el análisis anterior se concluye finalmente que v es una valuación.
Sea ahora A un teorema de E. Entonces $\vdash_J$ A, donde J es una extensión consistente y completa de E. Por lo tanto, V(A) $=1$. □

Proposición 17 (Completitud)**.** Sea A es una fórmula de LBPo¬C, si A es válida entonces A es un teorema.

Prueba. Sea A una fórmula válida, y supóngase que A no es un teorema. Entonces la extensión E, obtenida añadiendo ∼A como nuevo axioma, es consistente, por la proposición 12. Así pues, según la proposición 16, existe una valuación v que da a todo teorema de E el valor 1. En particular, V(∼A) $=1$. Pero V(A) $=$ 1, ya que A es una fórmula válida, y se llega a una contradicción. Por lo tanto, si A es válida entonces A es un teorema. □

Proposición 18 (Caracterización semántica)**.** Sea A es una fórmula de LBPo¬C, A es válida si y solamente si A es un teorema.

Prueba. consecuencia de las proposiciones 10 y 17. □

Características del sistema

En [3] se dice que un sistema deductivo es *paracompleto respecto al operador de negación* ¬ si existen una fórmula y una valuación tal que tanto la fórmula como su negación son falsas. Para probar que un sistema es *paracompleto respecto al operador* ¬ basta probar que no tiene como teorema la fórmula A∨¬A, es decir que A∨¬A no es válida.

Proposición 19 (Paracompletez de LBPo¬C)**.** El sistema LBPo¬C es *paracompleto respecto al operador* ¬.

Prueba. La valuación v tal que $V(A) = V(\neg A) = 0$, hace que $V(A\vee\neg A) = 0$. Por lo que, A∨¬A no es válida, y por lo tanto no es teorema. □

Proposición 20 (Caracterización de C)**.**

a. $A^C \leftrightarrow (\sim A\rightarrow \neg A)$ es un teorema.
b. $\neg A\rightarrow\sim A$ es un teorema.
c. $\sim A\rightarrow \neg A$ no es un teorema.

Prueba. Para la parte a, supóngase A^C y $\sim A$. Por Ax1.4 se tiene $(A^C \rightarrow \neg A)\vee A$, y al tener $\sim A$ por silogismo disyuntivo se infiere $A^C \rightarrow \neg A$, como además se tiene A^C entonces resulta $\neg A$. Aplicando dos veces el teorema de deducción se obtiene que $A^C \rightarrow (\sim A\rightarrow \neg A)$.
Para la recíproca, supóngase que $\sim A\rightarrow \neg A$ y $\sim A^C$. Por Ax1.1 se tiene $\neg A\rightarrow A^C$, y al tener $\sim A^C$ se infiere $\sim \neg A$. Por Ax1.2 se tiene $\neg A\vee(A\rightarrow A^C)$, y como se tiene $\sim \neg A$ se infiere $A\rightarrow A^C$. Al tener $A\rightarrow A^C$ y $\sim A^C$ resulta $\sim A$, y como se tiene $\sim A\rightarrow \neg A$ se infiere $\neg A$. Por la introducción de la conjunción se tiene $\neg A\wedge \sim \neg A$. Por lo que, según el teorema de deducción de $\sim A\rightarrow \neg A$ se sigue $\sim A^C \rightarrow (\neg A\wedge \sim \neg A)$. Por lo tanto, gracias a la proposición 13 (demostración indirecta), se ha probado que bajo el supuesto $\sim A\rightarrow \neg A$ se infiere A^C. Utilizando el teorema de deducción se obtiene $(\sim A\rightarrow \neg A)\rightarrow A^C$.
En resumen, se tienen $A^C \rightarrow (\sim A\rightarrow \neg A)$ y $(\sim A\rightarrow \neg A)\rightarrow A^C$. Utilizando Ax0.11 se infiere $A^C \leftrightarrow (\sim A\rightarrow \neg A)$.

Para la parte b, supóngase $\neg$A y A. Por introducción de la conjunción resulta A$\wedge\neg$A, y como por Ax1.3 se tiene (A$\wedge\neg$A)$\rightarrow\sim$A, entonces se infiere $\sim$A. Por introducción de la conjunción se obtiene A$\wedge\sim$A. Utilizando el teorema de deducción resulta que de $\neg$A se sigue A$\rightarrow$(A$\wedge\sim$A). Utilizando demostración indirecta se tiene que de $\neg$A se sigue $\sim$A, y por teorema de deducción queda probado $\neg$A$\rightarrow\sim$A.
Para la parte c, la valuación v tal que V(A) $=$ V($\neg$A) $= 0$, hace que V($\sim$A$\rightarrow\neg$A) $= 0$. Por lo que, $\sim$A$\rightarrow\neg$A no es válida, y por lo tanto no es teorema. □

En la tabla se presenta un paralelo entre algunas de las principales reglas de inferencia que involucran la negación clásica, con las correspondientes reglas en LBPo¬C.

Negación de la conjunción	De $\sim$(A$\wedge$B) se infiere $\sim$A$\vee\sim$B	De $\neg$(A$\wedge$B) no se infiere $\neg$A$\vee\neg$B
		De A^C, B^C y $\neg$(A$\wedge$B) se infiere $\neg$A$\vee\neg$B
	De $\sim$A$\vee\sim$B se infiere $\sim$(A$\wedge$B)	De $\neg$A$\vee\neg$B no se infiere $\neg$(A$\wedge$B)
		De $(A\wedge B)^C$ y $\neg$A$\vee\neg$B se infiere $\neg$(A$\wedge$B)
	$\sim$(A$\wedge$B)$\leftrightarrow$ ($\sim$A$\vee\sim$B)	De $(A\wedge B)^C$, A^C y B^C se infiere $\neg$(A$\wedge$B)$\leftrightarrow$ ($\neg$A$\vee\neg$B)

Negación de la disyunción	De $\sim$(A$\vee$B) se infiere $\sim$A$\wedge\sim$B	De $\neg$(A$\vee$B) no se infiere $\neg$A$\wedge\neg$B
		De A^C, B^C y $\neg$(A$\vee$B) se infiere $\neg$A$\wedge\neg$B
	De $\sim$A$\wedge\sim$B se infiere $\sim$(A$\vee$B)	De $\neg$A$\wedge\neg$B no se infiere $\neg$(A$\vee$B)
		De $(A\vee B)^C$ y $\neg$A$\wedge\neg$B se infiere $\neg$(A$\vee$B)
	$\sim$(A$\vee$B)$\leftrightarrow$ ($\sim$A$\wedge\sim$B)	De $(A\vee B)^C$, A^C y B^C se infiere $\neg$(A$\vee$B)$\leftrightarrow$ ($\neg$A$\wedge\neg$B)

<table>
<tr><td rowspan="5">Negación del condicional</td><td rowspan="2">De $\sim(A\to B)$ se infiere $A\wedge \sim B$</td><td>De $\neg(A\to B)$ no se infiere $A\wedge\neg B$</td></tr>
<tr><td>De B^C y $\neg(A\to B)$ se infiere $A\wedge\neg B$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">De $A\wedge \sim B$ se infiere $\sim(A\to B)$</td><td>De $A\wedge\neg B$ no se infiere $\neg(A\to B)$</td></tr>
<tr><td>De $(A\to B)^C$ y $A\wedge\neg B$ se infiere $\neg(A\to B)$</td></tr>
<tr><td>$\sim(A\to B)\leftrightarrow(A\wedge \sim B)$</td><td>De $(A\to B)^C$ y B^C se infiere $\neg(A\to B)\leftrightarrow(A\wedge\neg B)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="5">Negación de la negación</td><td rowspan="2">De $\sim\sim A$ se infiere A</td><td>De $\neg\neg A$ no se infiere A</td></tr>
<tr><td>De A^C y $\neg\neg A$ se infiere A</td></tr>
<tr><td rowspan="2">De A se infiere $\sim\sim A$</td><td>De A no se infiere $\neg\neg A$</td></tr>
<tr><td>De $(\neg A)^C$ y A se infiere $\neg\neg A$</td></tr>
<tr><td>$\sim\sim A\leftrightarrow A$</td><td>De $(\neg A)^C$ y A^C se infiere $\neg\neg A\leftrightarrow A$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">Silogismo disyuntivo</td><td>De $A\vee B$ y $\sim A$ se infiere B</td><td>De $A\vee B$ y $\neg A$ se infiere B</td></tr>
<tr><td rowspan="2">De $\sim A\to B$ se infiere $A\vee B$</td><td>De $\neg A\to B$ no se infiere $A\vee B$</td></tr>
<tr><td>De A^C y $\neg A\to B$ se infiere $A\vee B$</td></tr>
<tr><td>$(A\vee B)\leftrightarrow (\sim A\to B)$</td><td>De A^C se infiere $(A\vee B)\leftrightarrow (\sim A\to B)$</td></tr>
</table>

Modus Tollens	De $A \to B$ y $\sim B$ se infiere $\sim A$	De $A \to B$ y $\neg B$ no se infiere $\neg A$
		De A^C, $A \to B$ y $\neg B$ se infiere $\neg A$
	De $\sim B \to \sim A$ y A se infiere B	De $\neg B \to \neg A$ y A no se infiere B
		De B^C, $\neg B \to \neg A$ y A se infiere B
	$(A \to B) \leftrightarrow (\sim B \to \sim A)$	De B^C, A^C se infiere $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$
	$(A \leftrightarrow B) \to (\sim B \leftrightarrow \sim A)$	De B^C, A^C se infiere $(A \leftrightarrow B) \to (\neg B \leftrightarrow \neg A)$
	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\sim B \leftrightarrow \sim A)$	De B^C, A^C se infiere $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \leftrightarrow \neg A)$

Reducción al absurdo	De $A \to B$ y $A \to \sim B$ se infiere $\sim A$	De $A \to B$ y $A \to \neg B$ no se infiere $\neg A$
		De A^C, $A \to B$ y $A \to \neg B$ se infiere $\neg A$
	De $\sim A \to B$ y $\sim A \to \sim B$ se infiere A	De $\neg A \to B$ y $\neg A \to \neg B$ no se infiere A
		De A^C, $\neg A \to B$ y $\neg A \to \neg B$ se infiere A

Trivialización con las contradicciones	De A y $\sim A$ se infiere B	De A y $\neg A$ se infiere B

Trivialización con indeterminaciones	De $\sim\sim$A y $\sim$A se infiere B	De $\sim$A y $\sim\neg$A no se infiere B
		De A^C, $\sim$A y $\sim\neg$A se infiere B

La forma como se prueban estas reglas se ilustra con la prueba de *negación débil de la conjunción.*

Proposición 21 (negación débil de la conjunción)**.**

a. $\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$ no es un teorema.
b. $(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$ no es un teorema.
c. $[A^C\wedge B^C]\rightarrow[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]$ es un teorema.
d. $[(A\wedge B)^C]\rightarrow[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]$ es un teorema.
e. $[(A\wedge B)^C\wedge A^C\wedge B^C]\rightarrow[\neg(A\wedge B)\leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)]$ es un teorema.

Prueba. Para probar que $\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$ no es un teorema, considérese la valuación v tal que, $V(\neg(A\wedge B))=1$, $V(\neg A)=0$ y $V(\neg B)=0$. Para probar que $(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$ no es un teorema, considérese la valuación v tal que, $V(\neg(A\wedge B))=0$, $V(\neg A)=1$ y $V(\neg B)=1$.
Para probar $[A^C\wedge B^C]\rightarrow[\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)]$, gracias al teorema de deducción y a las reglas de conmutatividad y de eliminación de la conjunción basta con probar que, de A^C y B^C y $\neg(A\wedge B)$ se infiere $\neg A\vee\neg B$. Por la proposición 20 se tiene $\neg(A\wedge B)\rightarrow\sim(A\wedge B)$, como se tiene el antecedente, se infiere el consecuente $\sim(A\wedge B)$. Por negación de la conjunción se tiene $\sim A\vee\sim B$. De la proposición 20 se tienen $A^C\rightarrow(\sim A\rightarrow\neg A)$ y $B^C\rightarrow(\sim B\rightarrow\neg B)$, y como se tienen los antecedentes, se infieren $\sim A\rightarrow\neg A$ y $\sim B\rightarrow\neg B$. Se tienen $\sim A\vee\sim B$, $\sim A\rightarrow\neg A$ y $\sim B\rightarrow\neg B$, utilizando dilema constructivo se obtiene $\neg A\vee\neg B$.
Para probar $[(A\wedge B)^C]\rightarrow[(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)]$, gracias al teorema de deducción basta con probar que, de $(A\wedge B)^C$ y $\neg A\vee\neg B$ se infiere $\neg(A\wedge B)$. Por la proposición 20 se tienen $\neg A\rightarrow\sim A$ y $\neg B\rightarrow\sim B$, y como se tiene $\neg A\vee\neg B$, por dilema constructivo se infiere $\sim A\vee\sim B$. Por negación de la conjunción se tiene

$\sim$(A$\wedge$B). De la proposición 20 se tiene (A$\wedge$B)^C $\rightarrow$ ($\sim$(A$\wedge$B)$\rightarrow$ $\neg$(A$\wedge$B)), como se tiene el antecedente, se infiere $\sim$(A$\wedge$B)$\rightarrow$ $\neg$(A$\wedge$B). De nuevo se tiene el antecedente, por lo que se sigue $\neg$(A$\wedge$B).
La prueba de [(A$\wedge$B)^C$\wedge$A^C$\wedge$B^C]$\rightarrow$[$\neg$(A$\wedge$B)$\leftrightarrow$ ($\neg$A$\vee$$\neg$B)] es consecuencia inmediata de las dos pruebas anteriores. □

Conclusiones

En el sistema LBPo¬C, gracias a la definición del operador de negación fuerte, se recuperan todos los teoremas del cálculo proposicional clásico. Pero además, permite probar estos mismos resultados con la negación débil, haciendo explícitos los requisitos mínimos de completez de las fórmulas involucradas en el resultado clásico. Es interesante observar que cuando se analizan estos requisitos, no siempre se requiere un comportamiento clásico, por ejemplo para inferir $\neg$(A$\wedge$B)$\rightarrow$ ($\neg$A$\wedge$$\neg$B), se requiere que A y B sean determinables, pero no se requiere que A$\wedge$B sea determinable. Lo anterior muestra que el análisis respecto a la negación, en LBPo¬C es más fino que en la lógica clásica. Lo anterior también permite la construcción de sistemas intermedios entre LBPo¬C y la lógica clásica.

Referencias

[1] Arruda, A. y Alves, E. *A semantical study of some systems of vagueness logic.* Bulletin of the Section of Logic, Polish Academy of Sciences 8. 1979.

[2] Caicedo, X. *Elementos de lógica y calculabilidad.* Ed. Universidad de ls Andes. Bogotá. 1990.

[3] Grana, N. *Sulla Teoría delle Valutazioni di N. C. A. da Costa.* Nàpoli: Ligoure, 1990.

[4] Hamilton, A. *Lógica para matemáticos.* Ed. Paraninfo S.A. Madrid. 1981.

[5] Henkin, L. *The completeness of the first order functional calculus.* The journal of symbolic logic. Vol 14, No 3. 1949.

[6] Heyting, A. *Intuitionism, an Introduction.* North-Holland Publishing Co. Amsterdam. 1971.

[7] Sierra, A. *Lógica básica con afirmación alterna.* Revista Ingeniería y Ciencia. Vol 1, No 1. Medellín. 2005.

[8] Tarski, A. Logic, semantics and metamathematics. Second edition. Hackett Publ. Indianapolis. 1983.

Recibido: Marzo de 2006. Aceptado para publicación: Octubre de 2006