JUAN JOSÉ DÍAZ y VICENTE BERMEJO

NIVEL DE ABSTRACCIÓN DE LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS EN ALUMNOS URBANOS Y RURALES

LEVEL OF ABSTRACTION OF ARITHMETIC PROBLEMS IN URBAN AND RURAL STUDENTS

RESUMEN. En este estudio se analiza la incidencia que tiene el grado de abstracción en la resolución de problemas de adición y sustracción en alumnos urbanos y rurales. La muestra se formó con 192 alumnos de primero a cuarto año de educación primaria; el 50% pertenecía a un contexto rural y el 50% restante a un contexto urbano de México. Las tareas empíricas consistieron en resolver problemas aritméticos con objetos, dibujos, algoritmos y verbales. Los resultados muestran que la presencia de objetos o dibujos mejora el rendimiento de los alumnos de primero y segundo año, y baja en los de tercero. Igualmente, conviene destacar que los alumnos rurales obtienen sus mejores resultados en los problemas verbales. Las estrategias de modelado se emplean de modo parecido en todos los cursos del contexto rural, mientras que en el urbano se ocupan especialmente en primero y segundo. Los alumnos rurales utilizan más las estrategias de conteo, y en los urbanos son más comunes las estrategias de hechos numéricos. Finalmente, se señalan algunas aplicaciones educativas a partir de los resultados de este estudio.

PALABRAS CLAVE: Contexto, estrategias, niveles de abstracción, problemas matemáticos.

ABSTRACT. This study analyzes the incidence of the level of abstraction in the resolution of problems of addition and subtraction in urban and rural students. The sample was made up of 192 students from first to fourth grade of primary education; 50% came from a Mexican rural environment and the remaining 50% from a Mexican urban environment. Empirical tasks consisted in resolving arithmetical problems with objects, drawings, algorithms and verbally. The results show that the presence of objects or drawings improves performance in first and second grade students, and lowers performance in third grade students. It should also be pointed out that rural students obtained their best results in verbal problems. Modeling strategies are used in similar ways in all the courses in the rural environment, while in an urban setting they are primarily used in first and second grades. Rural students make use of counting strategies, and urban students lean more toward using numerical facts. Finally, some educative applications will be suggested from the results of the study.

KEY WORDS: Context, strategies, levels of abstraction, mathematical problems.

RESUMO. Neste estudo se analisa a incidência que tem o grau de abstração na resolução de problemas de adição e subtração em alunos urbanos e rurais. A mostra foi coletada de 192 alunos

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2007) 10(3): 335-364
Recepción: Octubre 23, 2006/Aceptación: Agosto 13, 2007

de primeiro ao quarto ano do ensino fundamental; 50 % pertence a um contexto rural e 50 % restante a um contexto urbano do México. As tarefas empíricas consistiram em resolver problemas aritméticos com objetos, desenhos, algoritmos y verbais. Os resultados mostram que a presencia de objetos ou desenhos melhoram o rendimento dos alunos de primeiro e segundo ano, e baixa nos de terceiro. Igualmente, convém destacar que os alunos rurais obtém seus melhores resultados nos problemas verbais. As estratégias de modelagem se empregam de modo parecido em todos os cursos do contexto rural, enquanto que no urbano se ocupam especialmente em primeiro e segundo. Os alunos rurais utilizam mais as estratégias de cálculo, e nos urbanos são mais comuns as estratégias de fatos numéricos. Finalmente, se registram algumas aplicações educativas a partir dos resultados deste estudo.

PALAVRAS CHAVE: Contexto, estratégias, níveis de abstração, problemas matemáticos.

RÉSUMÉ. Cette étude analyse l'incidence du niveau d'abstraction dans la résolution des problèmes d'addition et de soustraction chez les élèves urbains et ruraux. L'échantillon est composé de 192 élèves de la première à la quatrième année de l'école élémentaire, 50 % appartenant à un contexte rural et les 50 % restant appartenant à un contexte urbain à México. Les tâches empiriques ont consisté en la résolution de problèmes arithmétiques qui portent sur les objets, dessins, algorithmes et d'autres en langage naturel. Les résultats montrent que la présence d'objets ou de dessins améliore l'efficacité des élèves de la première et la deuxième année mais qu'elle l'affaibli en troisième. De même, il est convenable de signaler que les élèves ruraux obtiennent leurs meilleurs résultats dans les problèmes en langage naturel. Les stratégies de modélisation sont employées de manière similaire dans tous les cours (1$^{\text{ère}}$ au 4$^{\text{ème}}$) du contexte rural, tandis que dans le contexte urbain elles sont employées principalement dans le premier et deuxième cours. Les élèves ruraux utilisent plus les stratégies d'estimation mais les élèves urbains sont plus habitués aux stratégies des faits numériques. Finalement, sont signalés quelques applications éducatives à partir des résultats de cette étude.

MOTS CLÉS: Contexte, stratégies, niveaux d'abstraction, problèmes mathématiques

1. INTRODUCCIÓN

Los resultados que arrojó la evaluación internacional de la OCDE (2002, 2005) sobre el rendimiento en matemáticas ubicaron a México en el último lugar. Ello debería suponer al menos una llamada para profesores, investigadores y demás personas responsables de la educación en este país, a fin de incrementar esfuerzos que vayan encaminados a mejorar la formación matemática de nuestros escolares. Las acciones de esta índole conviene iniciarlas desde los primeros años del currículo escolar, es decir, desde preescolar o al menos desde el primer año de educación primaria (Alanís, Cantoral, Cordero, Farfán, Garza y Rodríguez, 2000).

El constructivismo sostiene que los niños construyen el conocimiento matemático de una manera activa a lo largo de su desarrollo (Rico, 1997); de ahí que los problemas aritméticos de adición y sustracción se hayan investigado ampliamente según su dificultad, comprensión, procedimientos de resolución y respuestas incorrectas de los alumnos. Sin embargo, existe una carencia de estudios que traten el grado de abstracción en los problemas verbales y su relación con el contexto sociocultural. Dicho conocimiento implicaría analizar un proceso de abstracción que partiría del nivel concreto hasta alcanzar el nivel abstracto, lo cual ocurre en un contexto sociocultural donde un conjunto de interacciones y situaciones sociales modelan el desarrollo cognitivo individual.

Bajo esta idea, la presente investigación tiene como intención estudiar la incidencia del grado de abstracción en los problemas de adición y sustracción, tomando a dos contextos educativos significativos de México, el rural y el urbano. Lo sujetos de investigación serán alumnos de primero a cuarto año de educación primaria.

2. Antecedentes del problema

Para contar con una perspectiva sobre los planteamientos importantes respecto al problema de investigación, se exponen a continuación la definición de problema de cambio y su nivel de dificultad; las estrategias de solución; el grado de abstracción como proceso de conocimiento; la noción de contexto y su relación con la cognición matemática, así como las características cognitivas de los niños urbanos y rurales.

Los problemas de cambio se precisan debido a su estructura semántica, considerando la presencia de una acción implícita o explícita que produce un cambio en la cantidad inicial. Un ejemplo de adición es: “Jorge tiene ocho caramelos. Lupita le da cuatro caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Jorge?”, mientras que un ejemplo de sustracción sería: “María tiene ocho lápices. Le da cuatro lápices a Sonia. ¿Cuántos lápices tiene ahora María?”. Ahora bien, la dificultad de estos problemas es diferente, según el lugar que ocupa la incógnita. Los niños manifiestan un mayor rendimiento en los problemas cuando la incógnita es la cantidad final; sin embargo, este nivel desciende cuando la incógnita se sitúa en uno de los subconjuntos, especialmente en el primero (Bermejo, 1990; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; De Corte y Verschaffel, 1987). Por un lado, Bermejo, Lago y Rodríguez (1998) jerarquizan los problemas verbales de adición y sustracción en función de la dificultad que presentan para los niños de preescolar, primero y segundo de educación primaria. Por otro, Bermejo, Dopico, Lago, Lozano y Rodríguez (2002) afirman que los niños tienen una dificultad creciente en los tipos de problemas, de acuerdo con la secuencia siguiente: algoritmo, cambio, combinación, igualación, comparación y relacional.

Con relación a los procedimientos de solución, Carpenter y Moser (1982) encuentran tres tipos de estrategias infantiles en los problemas verbales tanto de adición como de sustracción: *modelado directo*, *conteo* y *hechos numéricos*. La de modelado directo consiste en representar con dedos u objetos los conjuntos de la operación para encontrar después el resultado. Se manifiesta en la adición $(3+4=?)$ mediante el procedimiento *contar todo con modelos* (el niño extiende en una mano un dedo, luego el segundo dedo, después un tercer dedo…luego en la otra mano extiende un dedo, después el segundo, el tercero y el cuarto… Ahora los cuenta en el mismo orden: “uno, dos, tres”, “uno, dos, tres, cuatro” y dice: “uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, son siete”), mientras que en la sustracción $(8-5=?)$ ocurre a través de los procedimientos *separar de* (el niño construye el conjunto mayor, 8 objetos, y entonces separa un número de objetos igual al número menor, 5 objetos. Al contar el conjunto de objetos restantes, 3 objetos, ocurre la respuesta para el problema: “tres”), *separar a* (el niño separa 3 objetos del conjunto mayor, dejando sólo 5 objetos y cuenta los objetos separados; la respuesta es “tres”), *añadir a* (el niño coloca un conjunto de 8 objetos y enseguida realiza un conjunto de 5 objetos. Posteriormente agrega 3 objetos a este último conjunto para tener 8 objetos. La respuesta es el número de objetos agregados: “tres”), y *emparejamiento* (el niño coloca un conjunto de 8 objetos y otro conjunto de 5 objetos; el número de objetos sin emparejar es la respuesta: “tres”), como los describen Baroody (1987), y Bermejo y Rodríguez (1993).

La estrategia de conteo implica el uso de secuencias de conteo para obtener la solución del problema, sin necesidad de representar los términos de la operación. En el caso de la adición, se recurre a los procedimientos *contar todo sin modelos* (uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete), *contar a partir del primer sumando* (“tres; cuatro, cinco, seis, siete”), y *contar a partir del sumando mayor* (“cinco, seis, siete”), referidos por Baroody (1987), y Bermejo y Rodríguez (1993). En cuanto a la sustracción, se encuentran los procedimientos *contar hacia atrás a partir de* (el niño cuenta hacia atrás a partir del minuendo tantos pasos como marca la cantidad menor; el último número pronunciado es la respuesta: “siete, seis, cinco, cuatro, tres”), *contar hacia atrás* (el niño cuenta hacia atrás desde el número mayor hasta alcanzar el menor; el número de elementos contados es la respuesta: “ocho, siete, seis”), y *contar a partir de lo dado* (el niño cuenta a partir del número menor hasta alcanzar el mayor; la respuesta se obtiene contando los numerales emitidos para equiparar ambos conjuntos: “seis, siete, ocho”), indicados por Baroody (1987), y Bermejo y Rodríguez (1993).

La estrategia de hechos numéricos puede ser de dos tipos: conocidos y derivados. La primera ocurre cuando el niño recuerda el resultado de la adición o sustracción de dos números (“$3+4=7$ porque tres más cuatro son siete”, y “$11-5=6$ porque once menos cinco es igual a seis”), mientras que la segunda alude a la obtención del resultado mediante los procedimientos de composición y descomposición (6 + 7 = ? “Yo sé que 6 más 6 es igual a 12; 6 más 7 es 13 porque 7 es uno más que 6, y 13 es uno más que 12”, y 9 – 5 = ? “Yo sé que 10 menos 5 es igual a 5; 9 es 1 menos que 10; así, separo 1 de la respuesta 5 y tengo 4”), como se detalla en Baroody (1987), Bermejo y Rodríguez (1993), y Putnam, De Bettencourt y Leinhardt (1990).

Bermejo et al. (1998) resaltan dos cuestiones sobre las estrategias. La primera dice que el tipo de estrategia se relaciona más con la ubicación de la incógnita y el tipo de operación que con la estructura semántica del problema. La segunda plantea que las estrategias de los niños cambian en relación con el nivel escolar. En tal sentido, los niños de preescolar recurren con más frecuencia a las estrategias de modelado directo, los alumnos de primero de primaria las de conteo y los de segundo mencionan principalmente a las de hechos numéricos. Por tanto, se considera que la secuencia como se desarrollan las estrategias parte de lo material (uso de objetos) hacia lo verbal (contar) y luego lo mental (hechos numéricos conocidos) (Bermejo, 1990, 2004; Bermejo y Rodríguez, 1993; Carpenter y Moser, 1982; De Corte y Verschaffel, 1987).

La perspectiva constructivista señala que el proceso cognitivo de lo concreto hacia lo abstracto ocurre a través de niveles de desarrollo (Kamii, Kirkland y Lewis, 2001; Kato, Kamii, Ozaki y Nagahiro, 2002). Ahora bien, los niveles de abstracción que se consideran en esta investigación son concreto, pictórico, numérico y verbal, que siguen un orden progresivo en la comprensión de lo concreto hacia lo abstracto. En cuanto al nivel concreto, se afirma que el uso de objetos en la instrucción de las matemáticas puede ser efectivo, aunque no su concretividad; es decir, los alumnos no se centran en los objetos en sí mismos, sino como instrumentos que facilitan el aprendizaje y la comprensión de un concepto nuevo o símbolo escrito (NCTM, 2000). En este nivel, Kamii, Kirkland y Lewis (2001) apuntan que es útil la manipulación de material concreto para adquirir el conocimiento lógico-matemático. Estos autores consideran que el uso de dicho material sirve para solucionar el problema mediante la construcción de relaciones mentales por medio de la abstracción reflexionante.

Tocante al nivel pictórico, se precisa que los dibujos sirven para establecer una conexión de lo concreto con lo abstracto. Se ha propuesto que este nivel abarque la enseñanza de la estructura semántica de los problemas de adición y sustracción dentro de un diagrama parte-todo (Wolters, 1983), a través de dibujos esquemáticos –como un diagrama de flechas– o mediante la construcción de dibujos libres que representen el problema (De Corte y Verschaffel, 1987; Fuson y Willis, 1988). De cualquier forma, los alumnos construyen una representación pictórica adaptada a sus propias ideas o nivel evolutivo. Además, Fuson y Willis (1988) reportaron que los niños de segundo año de primaria son capaces de identificar la estructura semántica del problema dibujado, escribir los números del problema en el lugar apropiado del dibujo y determinar si se suman o restan los dos números conocidos.

Referente al nivel numérico, se ha analizado la representación simbólica convencional. Kamii et al. (2001) plantean que los niños de primero de primaria se familiarizan con los algoritmos al escribir expresiones convencionales (3 + 2 = 5 y 3 + 2), aunque otros sólo escribían dos números o uno, incluso omitían los signos + ó =. Estos autores explican que las relaciones entre 3, 2 y 5 implican una relación jerárquica difícil de comprender para los niños pequeños, debido que, al sumar dos números, se combinan dos enteros (3 y 2); para hacer un número de orden superior (5), se requiere que los números anteriores sean las partes, mientras que las relaciones entre tales partes (3 + 2) no involucran una relación jerárquica. Además, el uso del signo = es poco frecuente y la relación entre los tres números (3, 2 y 5) se considera como una dificultad en los niños de primer curso para hacer relaciones parte-todo jerárquicas. Lo anterior significa que el niño no puede representar (externar) una relación parte-todo que no existe en su mente.

Por último, en el nivel verbal se representa el grado más elevado de abstracción, cuando existe la comprensión sobre la estructura semántica de los problemas de adición y sustracción. La competencia cognitiva abstracta se centra en dominar las relaciones semánticas o el significado entre las cantidades por encima de las relaciones simbólicas convencionales establecidas en el algoritmo. En este nivel, además, se incorporan los planteamientos anteriores sobre los problemas verbales.

A continuación, expondremos los planteamientos sobre la posible influencia del ámbito sociocultural de los alumnos en la resolución de tareas matemáticas. Es esperable que, si existen diferencias transculturales en el rendimiento matemático entre dos o varios países (Resnick, 1989), podemos suponer que hay diferencias relevantes entre distintas culturas o contextos socioculturales al interior de un país. En dicho sentido se requiere abordar la noción del contexto y la cognición matemática, así como las características del conocimiento matemático de niños urbanos y rurales.

Los estudios en torno a la cognición a través del contexto (Carraher, Carraher y Schliemann, 1985; Saxe, 1991, 2002) indican que los niños de contextos diferentes desarrollan de distinta manera las mismas tareas de pensamiento, de modo que los contextos socioculturales constituyen un componente en el desarrollo cognitivo (Brown, Collins y Duguid, 1989; Rogoff, 1990). De acuerdo con Abreu (1998), la noción de contexto incluye dos puntos de vista: como una característica física o un instrumento producido por un grupo cultural particular que se presenta en el momento de la acción, y como una característica social producto de la historia de un grupo dentro de un orden social concreto, el cual sanciona las formas legítimas de conocimiento matemático. Estas formas se conocen simbólicamente por los actores sociales, lo cual les permite participar en determinadas posiciones en la estructura social y crear una identidad social (Abreu, 1995). De tal modo, el conocimiento empieza dentro de ciertas comunidades que se localizan en estructuras sociales particulares.

Por tanto, podemos definir al contexto como un entorno cultural que facilita un conjunto de instrumentos empleados por lo niños en la construcción del conocimiento, mediante un proceso activo que se manifiesta en una interacción social, donde se legitiman las formas y procedimientos para construir significados dentro de una estructura social en un tiempo y situación específicos. Si se toma como base a lo anterior, podemos destacar que la influencia del contexto sociocultural en el conocimiento matemático está mediada por la práctica social con la que se construye el significado contextualizado en el aprendizaje de las matemáticas (Saxe, 1991). Los trabajos sobre el contexto informal han mostrado diferencias entre los niños de diferentes contextos en cuanto a su comprensión de diversos problemas de matemáticas (Carraher et al., 1985; Carraher, Carraher y Schliemann, 1987; Nunes, Schliemann y Carraher, 1993; Schliemann y Carraher, 2002). En términos generales, la construcción del conocimiento matemático en contextos específicos se fundamenta con el uso de reglas y procedimientos matemáticos como herramientas para realizar metas particulares. Entonces, las estrategias tienen un significado sociocultural (Nunes et al., 1993; Resnick, 1987; Schliemann, 1995).

Finalmente, con respecto a las características del conocimiento matemático de los niños urbanos y rurales, Saxe y Gearhart (1990) encuentran que los niños rurales tienen una habilidad espacial mayor que los urbanos. No obstante, los niños urbanos desarrollan formas cognitivas de acuerdo con su práctica económica de ventas, mientras que los rurales generan un conocimiento específico mayor en los problemas espaciales que se presentan durante su práctica de tejer. Además, Saxe (1991) contrasta la existencia de diferencias entre las estrategias de los niños vendedores de la calle con los no vendedores, tanto en el contexto urbano como en el rural, atendiendo a la práctica específica y la evolución de su conocimiento informal. Este autor identifica un mayor rendimiento en los alumnos urbanos, al compararlo con los rurales.

2.1. *Objetivos*

El objetivo general del presente estudio consiste en investigar el patrón evolutivo que tienen los niños de distinto contexto sociocultural en la solución de problemas de *cambio aumento* y *cambio disminución*, según el nivel de abstracción. De aquí se desprenden dos objetivos particulares: el primero implica determinar si existen diferencias de rendimiento entre los alumnos de los contextos urbano y rural en la resolución de problemas de cambio; el segundo es analizar las estrategias empleadas por los niños de cada contexto durante la solución del problema.

2.2. *Planteamiento*

La investigación tiene como propósito analizar el rendimiento y las estrategias que, según su nivel de abstracción, ocupan los escolares de primero hasta cuarto año de primaria en ambos contextos socioculturales, con respecto a los problemas de cambio aumento y cambio disminución.

El diseño experimental incluye problemas de cambio aumento y cambio disminución. Las variables intrasujetos son el nivel de abstracción (concreto, dibujos, numérico y verbal) y el lugar de la incógnita (cantidad final, cantidad inicial), las cuales atañen al curso escolar, que comprende desde primero hasta cuarto año de educación primaria, así como el contexto sociocultural rural y urbano al cual pertenecen los participantes.

Para el primer objetivo se formula la siguiente pregunta de investigación: ¿cuáles son las diferencias de rendimiento en las distintas tareas según el curso escolar, nivel de abstracción, estructura de cambio aumento y cambio disminución, y la incógnita en la cantidad final o inicial entre los alumnos de escuelas urbanas y rurales? El segundo objetivo implica la pregunta: ¿los alumnos de cada contexto sociocultural emplean las estrategias de manera distinta según el nivel de abstracción, cambio aumento y cambio disminución, y la incógnita cantidad final o inicial en el problema?

3. MÉTODO

En esta sección describiremos la metodología de la investigación a partir de las características de los participantes, los materiales empleados y el procedimiento basado en el uso de entrevistas como protocolos verbales.

3.1. *Participantes*

Un total de 192 niños seleccionados al azar tomaron parte en la investigación: 96 eran alumnos rurales y 96 urbanos, quienes cursaban de primero a cuarto año de primaria en varias escuelas públicas del estado de Zacatecas, México.

TABLA I

Puntuación media
de edad en los alumnos participantes

Curso escolar	Alumnos urbanos	Alumnos rurales
Primero	6.8	6.6
Segundo	7.7	7.5
Tercero	8.4	8.5
Cuarto	9.8	9.7

La Tabla I presenta los datos sobre la edad de los participantes. La muestra rural se integró por 24 alumnos de cada curso escolar, de los cuales el 50% eran niñas y 50% niños; lo mismo ocurrió con la muestra de alumnos urbanos, que se formó con 50 niños y 46 niñas. El contexto rural es el municipio de Luis Moya, ubicado en el centro-norte de México, a 60 kilómetros de la capital del estado de Zacatecas, mientras que el urbano es el área metropolitana de la ciudad de Zacatecas. Todos los participantes en el estudio pertenecen a familias con nivel socioeconómico bajo.

En estas escuelas el programa de matemáticas presenta la operación de suma en la segunda mitad del primer curso, mientras que la resta empieza en la segunda mitad del segundo curso. Para aplicar la tarea se solicitó el permiso de los padres y directores de los centros educativos.

3.2. *Material*

El material consistió en 16 problemas de cambio aumento y cambio disminución con dos posiciones de la incógnita –cantidad inicial y cantidad final–, bajo cuatro niveles de abstracción: objetos, dibujos, algoritmos y problemas verbales.

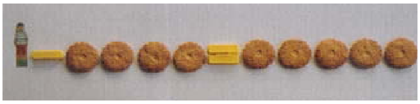
TABLA II
Materiales empleados en los problemas, según el nivel de abstracción

Nivel concreto	Nivel dibujos	Nivel numérico	Nivel verbal
Canicas	Dibujos de canicas	3 + 4 = ?	Juan tenía tres canicas. Lupita le da cuatro canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?
Lápices	Dibujos de lápices	? + 3 = 8	Juan tenía algunos lápices. Lupita le da tres lápices. Ahora tiene ocho lápices. ¿Cuántos lápices tenía Juan al principio?
Caramelos	Dibujos de caramelos	8 – 2 = ?	Pepe tenía ocho caramelos. Le dio dos caramelos a María. ¿Cuántos caramelos tiene Pepe ahora?
Galletas	Dibujos de galletas	? – 4 = 5	Pepe tenía algunas galletas. Le dio cuatro galletas a María. Ahora tiene cinco. ¿Cuántas galletas tenía Pepe al principio?

En la Tabla II se indican los materiales empleados en los problemas, según el nivel de abstracción. Cabe mencionar que los objetos concretos fueron familiares para los alumnos, y que el cambio aumento y cambio disminución resultaron similares a través de los niveles de abstracción. La Figura 1 muestra algunos problemas que se presentaron a los participantes.

Nivel concreto de cambio disminución con incógnita cantidad final

Nivel dibujos de cambio aumento con incógnita cantidad inicial



Nivel concreto de cambio disminución con incógnita cantidad inicial

Nivel dibujos de cambio aumento con incógnita cantidad final

Figura 1. Ejemplos de los niveles de abstracción presentados a los alumnos.

3.3. *Procedimiento*

Los problemas de cambio aumento y cambio disminución se mostraron a los participantes durante dos sesiones. En la primera se presentaron ocho problemas y los ocho restantes en la segunda. El orden en que se dieron a conocer las tareas de adición y sustracción estuvo contrabalanceado al azar de igual manera para todos los participantes.

Además, cada alumno fue entrevistado bajo el siguiente procedimiento. En los problemas concretos se presentaban los objetos sobre la mesa al alumno y el entrevistador formulaba el problema. Por ejemplo: Juanito tiene tres canicas (se señalan). Lupita le regala cuatro canicas (se indican). ¿Cuántas canicas tiene Juanito ahora? (se señala el espacio de la incógnita). En este nivel de concreción se mostraron los símbolos concretos de la operación y el signo igual para que los alumnos mantuvieran visible, y no en la memoria o en el nivel lingüístico, las relaciones semánticas entre las cantidades de manera consistente con los demás niveles de abstracción. En los problemas con dibujos se presentaban las tarjetas al alumno y también el investigador enunciaba el problema, señalando sus dibujos correspondientes.

En los problemas numéricos se mostraba el algoritmo y el experimentador planteaba el problema, indicando sus términos en relación con la ecuación, lo cual implicaba que la expresión numérica no fuera un simple ejercicio, sino que mostrara la estructura semántica de cambio, al igual que en los demás niveles. En los problemas verbales se daba la tarjeta con el problema escrito para que la leyera cada participante, al mismo tiempo, el investigador leía pausadamente el problema. Tras la resolución, se preguntaba a los participantes cómo lo habían hecho, a fin de conocer con precisión la estrategia utilizada. Veamos el caso de una alumna de cuarto año en la solución del problema sobre dibujos de cambio disminución con la incógnita la cantidad inicial.

Experimentador: Juan tenía algunas galletas (se señala el espacio de la incógnita). Le dio 4 galletas a María (se indican). Ahora tiene 5 (se señalan). ¿Cuántas galletas tenía al principio, Juan?
J.María: Nueve.
Experimentador: ¿Cómo le has hecho para saber que son nueve?
J. María: Contando las galletas y después restándole.
Experimentador: ¿Cómo las contaste y cómo le restas?
J. María: Cinco más cuatro, nueve. Y le quitamos las que están aquí, cuatro, y quedan cinco.

Cada entrevista tuvo una duración aproximada de 20 minutos. Las sesiones se grabaron en video, los problemas se aplicaron en las escuelas durante el horario escolar, mientras que las respuestas infantiles se consideraron verdaderas o erróneas. Las estrategias de adición y sustracción se categorizaron de acuerdo con Carpenter y Moser (1982): modelado directo, conteo y hechos numéricos. Un ejemplo de la estrategia modelado en el problema verbal de cambio aumento con la incógnita la cantidad final fue explicado por un alumno de primer año:

J. Pablo: Uno, dos, tres (muestra 3 dedos extendidos), uno, dos, tres, cuatro (muestra 4 dedos extendidos).
Experimentador. ¿Cuál es la respuesta?
J. Pablo: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete (cuenta 7 dedos)... siete.

4. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este apartado nos ocuparemos primero del rendimiento de los alumnos y después analizaremos las estrategias utilizadas en la resolución de los problemas planteados.

4.1. *Rendimiento*

Las respuestas de los participantes presentan un índice de Cronbach (alpha) de fiabilidad de 0.90. Dichos resultados se han estudiado mediante el análisis de varianza (ANOVA) mixto 2 (contexto: rural vs. urbano), X 4 (curso escolar: primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto), X 4 (nivel de abstracción: concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal), X 2 (operación: cambio aumento vs. cambio disminución), X 2 (lugar de la incógnita: cantidad final vs. cantidad inicial), con medidas repetidas en los tres últimos factores mediante el programa SPSS 11.0. El rendimiento de los alumnos en las distintas tareas se considera como variable dependiente.

Ahora bien, los resultados indican que son significativos los efectos principales de los factores curso $F(3, 184) = 57.24$, $p < .01$, nivel de abstracción $F(3, 552) = 3.13$, $p < .05$, operación $F(1, 184) = 4.00$, $p < .05$ y lugar de la incógnita $F(1, 184) = 155.16$, $p < .01$. No hubo efecto del factor contexto $F(1, 184) = 3.09$, $p = .08$ aunque, como veremos después, las diferencias se hacen notorias en algunos cursos o situaciones. Por tanto, el curso escolar, el nivel de abstracción, la operación y la incógnita afectan significativamente el rendimiento de los participantes.

TABLA III
Materiales empleados en los problemas de cambio aumento

Contexto	Curso	Cambio disminución							
		Incógnita cantidad inicial				Incógnita cantidad final			
		C	D	N	V	C	D	N	V
Rural	Primero	.33	.25	.20	.20	.41	.33	.33	.54
	Segundo	.50	.37	.33	.29	.37	.29	.37	.75
	Tercero	.50	.50	.54	.75	.66	.66	.79	.87
	Cuarto	.87	.83	.83	.91	1.0	1.0	1.0	1.0
Urbano	Primero	.33	.37	.33	.08	.37	.37	.45	.50
	Segundo	.70	.70	.54	.41	.62	.54	.58	.83
	Tercero	.62	.58	.62	.66	.41	.62	.83	.91
	Cuarto	.79	.79	.75	.79	.95	.91	.95	1.0

Nota: *C* = nivel concreto, *D* = nivel dibujos, *N* = nivel numérico, *V* = nivel verbal

La Tabla III contiene las puntuaciones medias sobre el nivel de abstracción de los alumnos rurales y urbanos en la solución de los problemas de cambio aumento, según el contexto, grado escolar, nivel de abstracción, operación y lugar de la incógnita. La Tabla IV contiene las puntuaciones medias sobre el nivel de abstracción de los alumnos rurales y urbanos en la solución de los problemas de cambio disminución, según el contexto, grado escolar, nivel de abstracción, operación y lugar de la incógnita.

TABLA IV

Materiales empleados en los problemas de cambio disminución

Contexto	Curso	Cambio aumento							
		Incógnita cantidad inicial				Incógnita cantidad final			
		C	D	N	V	C	D	N	V
Rural	Primero	.20	.25	.16	.12	.54	.45	.50	.66
	Segundo	.12	.20	.29	.29	.91	.75	.37	.87
	Tercero	.37	.45	.45	.54	.70	.70	.91	.83
	Cuarto	.87	.91	.87	.87	1.0	1.0	1.0	1.0
Urbano	Primero	.08	.04	.08	.16	.70	.70	.58	.70
	Segundo	.41	.33	.37	.20	.87	.91	.70	.83
	Tercero	.54	.58	.79	.54	.95	.95	1.0	.95
	Cuarto	.83	.87	.91	.83	1.0	.95	.95	1.0

Nota: *C* = nivel concreto, *D* = nivel dibujos, *N* = nivel numérico, *V* = nivel verbal

En el primer año, los alumnos rurales obtienen un mayor rendimiento en el nivel verbal de cambio aumento con la incógnita cantidad final (.66), mientras que los urbanos destacan más en los niveles concreto, con dibujos y verbal (.70). En el segundo año, los niños rurales muestran mayores destrezas en el nivel concreto de cambio aumento con la incógnita cantidad final (.91), mientras que los urbanos ofrecen mejores habilidades en el nivel dibujos de cambio aumento con la incógnita cantidad final (.91).

En el tercer año, los escolares rurales y urbanos manifiestan mayor competencia en el nivel numérico de cambio aumento con la incógnita cantidad final (.91 y 1.0, respectivamente). Con respecto al cuarto año, los estudiantes rurales logran el más alto rendimiento en todos los niveles de abstracción, tanto en cambio aumento como en cambio disminución con la incógnita cantidad final (1.0), mientras que los urbanos consiguen el mejor rendimiento en los niveles concreto y verbal de cambio aumento con la incógnita cantidad final, así como en el nivel verbal de cambio disminución con la incógnita cantidad final (1.0).

En la Tabla V se muestran los resultados del estudio de comparaciones múltiples de Tuckey. Dentro del factor curso se hallan diferencias significativas entre los escolares de cuarto con relación a los demás cursos, los alumnos de tercero difieren respecto a los de segundo y primero; asimismo, hay diferencias significativas entre segundo y primero. Dichos resultados son consistentes con los de otros estudios (Carpenter y Moser, 1982; Riley, Greeno y Heller, 1983) que plantean un patrón evolutivo del rendimiento en las tareas de cambio aumento y cambio disminución.

TABLA V
Datos de las comparaciones de la prueba de Tukey

Pares	Diferencias entre medias	Error típico	Significación
Curso 4o.-curso 3o.	.23	.04	.00
Curso 4o.-curso 2o.	.39	.04	.00
Curso 4o-curso 1ero.	.55	.04	.00
Curso 3o.-curso 2o.	.16	.04	.00
Curso 3o-curso 1ero.	.32	.04	.00
Curso 2o-curso 1ero.	.16	.04	.00
Nivel verbal-nivel numérico	.04	.02	.03
Pares	Diferencias entre medias	Error típico	Significación
Nivel verbal-nivel dibujos	.05	.02	.01
Cambio aumento-cambio disminución	.03	.01	.04
Incógnita cantidad final–incógnita cantidad inicial	.24	.01	.00

Nota: La diferencia de medias es significativa al nivel .05

La comparación por pares con la prueba de Tuckey en el factor nivel de abstracción encuentra diferencias del nivel verbal con respecto al numérico y al de dibujos; estos datos concuerdan con los identificados por (Riley et al. 1983), en el aspecto de que en el nivel verbal se obtiene un rendimiento mayor que en el algoritmo y la presentación de dibujos. Por otra parte, en el factor operación aparecen diferencias de cambio aumento con respecto a cambio disminución.

Asimismo, se confirman los resultados de (Riley et al., 1983) en cuanto a que la adición es más fácil que la sustracción, si bien otros estudios (Bermejo et al. 1998, 2002) no han encontrado diferencias significativas en la resolución de ambas operaciones. En el factor incógnita, las diferencias son notorias entre su ubicación en la cantidad final, lo que concuerda con los datos reportados en otros estudios (Bermejo y Rodríguez, 1987; De Corte y Verschaffel, 1987) donde se indica que la incógnita cantidad final es más fácil que la incógnita cantidad inicial.

En la Tabla VI aparecen las interacciones significativas. Si nos centramos en la interacción Contexto X Curso X Nivel de abstracción X Operación X Incógnita, encontramos que el análisis sobre los efectos simples del factor nivel de abstracción en los niveles de los demás factores señala que se contrasta el nivel concreto de cambio aumento con la incógnita cantidad final respecto a los niveles numérico y dibujos. Igualmente, los niveles dibujos y verbal difieren con relación al nivel numérico en los alumnos rurales de segundo curso: $F(3, 182) = 16.08$, $p < .01$. Además, en estos alumnos se muestran diferencias significativas del nivel verbal de cambio disminución con la incógnita cantidad final respecto a los niveles concreto, dibujos y numérico $F(3, 182) = 6.03$, $p < .01$.

TABLA VI

Interacciones significativas en el rendimiento de los alumnos

Interacciones	Valor F	Significancia
Curso X Nivel de abstracción	$F(9, 552) = 3.41$	$p < .01$
Curso X Incógnita	$F(3, 184) = 3.93$	$p < .01$
Nivel de abstracción X Incógnita	$F(3, 552) = 11.24$	$p < .01$
Operación X Incógnita	$F(1, 184) = 42.29$	$p < .01$
Contexto X Curso X Operación	$F(3, 184) = 3.11$	$p < .05$
Curso X Nivel de abstracción X Incógnita	$F(9, 552) =3.56$	$p < .01$
Curso X Operación X Incógnita	$F(3, 184) = 8.08$	$p < .01$
Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	$F(3, 552) = 10.27$	$p < .01$
Curso X Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	$F(9, 552) = 2.69$	$p < .01$
Contexto X Curso X Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	$F(9, 552) = 2.14$	$p < .05$

Los niños urbanos de segundo año contrastan en el nivel verbal de cambio disminución con incógnita cantidad final respecto a los niveles numérico y dibujos $F(3, 182) = 2.65$, $p = .05$. Estos escolares también tienen diferencias significativas en los niveles concreto y dibujos en cambio disminución con la incógnita cantidad inicial, en relación con los niveles numérico y verbal $F(3, 182) = 3.73$, $p < .05$. Asimismo, desarrollan más los niveles superiores de abstracción en los problemas fáciles de cambio disminución, mientras que expresan más los niveles inferiores de abstracción en los problemas difíciles con la misma operación.

Por su parte, los niños urbanos de tercer año contrastan en el nivel numérico de cambio aumento con la incógnita cantidad inicial sobre los niveles concreto, dibujos y verbal $F(3, 182) = 3.30$, $p < .05$. Además, muestran diferencias significativas en el nivel dibujos de cambio disminución con la incógnita cantidad final respecto al nivel concreto, así como en los niveles numérico y verbal de cambio disminución con la incógnita cantidad final en relación con los niveles concreto y dibujos $F(3, 182) = 11.88$, $p < .01$. En este curso se emplean más los niveles superiores de abstracción tanto en los problemas fáciles como difíciles de cambio disminución.

Analicemos con más detalle los efectos simples del factor contexto en los niveles de los demás factores. El análisis revela diferencias significativas en el rendimiento de los escolares urbanos de primer año con respecto a los rurales en el nivel dibujos de cambio aumento con la incógnita cantidad final $F(3, 184) = 5.72$, $p < .05$. Los alumnos urbanos son más pictóricos que los rurales en los problemas fáciles de cambio aumento.

También hay diferencias significativas en el rendimiento de los alumnos urbanos de segundo año y los rurales en el nivel concreto de cambio aumento con la incógnita cantidad inicial, en el nivel concreto de cambio disminución con la incógnita cantidad final, en el nivel dibujos de cambio disminución con la incógnita cantidad final, en el nivel dibujos de cambio disminución con la incógnita cantidad inicial y en el nivel numérico de cambio aumento con la incógnita cantidad final [$F(1, 184) = 5.90$, $p < .05$; $F(1, 184) = 3.96$, $p < .05$; $F(1, 184) = 3.98$, $p < .05$; $F(1, 184) = 6.15$, $p < .05$; $F(1, 184) = 9.73$, $p < .01$, respectivamente]. Los niños urbanos de segundo año son más concretos que los rurales en los problemas difíciles de cambio aumento y en los fáciles de cambio disminución. Además, los escolares urbanos son más pictóricos que los rurales en los problemas difíciles de cambio disminución y más numéricos en los fáciles de cambio aumento.

Igualmente, los alumnos urbanos de tercer año difieren con respecto a los rurales en los niveles concreto y dibujos de cambio aumento con la incógnita cantidad final, y en el nivel numérico de cambio aumento con la incógnita cantidad inicial [F (1, 184) = 5.90, p < .05; F (1, 184) = 5.90, p < .05; F (1, 184) = 5.90, p < .05; F (1, 184) = 5.90, p < .05; F (1, 184) = 5.90, p < .01, respectivamente]. Los alumnos urbanos emplean más que los rurales los niveles inferiores de abstracción en los problemas fáciles de cambio aumento, mientras que los rurales difieren significativamente de los urbanos en el nivel concreto de cambio disminución con la incógnita cantidad final F (1, 184) = 3.96, p < .05.

La Figura 2 ilustra la puntuación media en los niveles de abstracción de los alumnos de primaria, tanto en el contexto rural como en el urbano.

Existe un patrón evolutivo en ambos grupos, aunque los niños de primero y segundo año tienden a limitar su proceso de abstracción. También se aprecia un mejor desarrollo a partir de tercero hasta cuarto año. Las diferencias de rendimiento entre los alumnos de ambos contextos indican un predominio de los alumnos urbanos hasta tercer año, pues en cuarto destacan más los rurales.

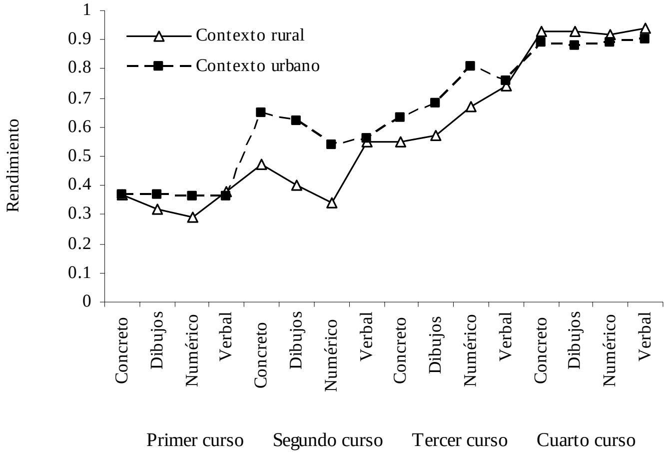


Figura 2. Niveles de abstracción de los alumnos de primaria de los contextos rural y urbano.

En conformidad con el primer objetivo de esta investigación, conviene resaltar que según las puntuaciones medias los niños urbanos rinden mejor que los rurales durante los tres primeros años, especialmente en segundo y tercero. También es pertinente subrayar que ambos contextos muestran un patrón evolutivo en el rendimiento, que se incrementa de acuerdo con los problemas más abstractos en los dos últimos cursos y con la incógnita cantidad final. En cambio, los alumnos de primero y segundo año –sobre todo este curso, particularmente los niños rurales– obtienen mejores rendimientos en las tareas más concretas, excepto en los problemas verbales, donde hay mejores rendimientos en el contexto rural. Tal hecho se debe probablemente al efecto significativo del aprendizaje informal de dichos escolares. Por otra parte, las tareas de cambio aumento se resuelven en general mejor que las de cambio disminución, con excepción de las que tratan la incógnita cantidad inicial.

Si bien no hay en general un efecto del factor contexto, se encuentran algunas diferencias significativas entre los contextos. Por ejemplo, los alumnos rurales de segundo año recurren especialmente a los niveles inferiores de abstracción en los problemas fáciles de cambio aumento, mientras que los urbanos emplean dichos niveles en los problemas fáciles de cambio disminución. Por tanto, aunque la evolución del pensamiento matemático infantil no se determina por los factores sociales, éstos influyen en las diferencias individuales de las competencias necesarias para resolver un problema de cambio aumento o cambio disminución. Así, vale la pena resaltar que los alumnos rurales obtienen sus mejores rendimientos en todos los cursos en el nivel verbal.

En cambio, con respecto a los demás niveles de abstracción, en primero y segundo año el rendimiento se incrementa en sentido inverso al nivel de abstracción, de modo que cuanto más concreta es la situación, más fácil les resulta a los niños más pequeños. Sin embargo, esa tendencia cambia en los alumnos de tercer año, en el sentido de que lo concreto puede llegar a ser un distractor al resolver los problemas. Por tanto, el uso de objetos o dibujos en el aprendizaje de las matemáticas parece eficaz en los inicios del aprendizaje, mas dejaría de serlo cuando el aprendizaje está avanzado o conseguido. Además, es necesario precisar que aunque no hay diferencias significativas en el rendimiento entre los alumnos de distinto contexto, se continuará analizando la variable contexto en el empleo de estrategias durante la solución de problemas, en virtud de que se han identificado diferencias relevantes en los procedimientos manifestados por los alumnos de distintos contextos (Saxe, 1991).

4.2. *Análisis de las estrategias*

Para analizar las estrategias de los alumnos en ambos contextos hicimos tres análisis de varianza (ANOVA) mixto 2 (contexto: rural vs. urbano) X 4 (curso: primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) X 4 (nivel de abstracción: concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) X 2 (operación: cambio aumento vs. cambio disminución) X 2 (lugar de la incógnita: cantidad final vs. cantidad inicial), poniendo medidas repetidas en los tres últimos factores con cada tipo de estrategia, mediante el programa SPSS 11.0. Las estrategias de modelado directo, conteo y hechos numéricos se consideraron como variables dependientes.

Respecto a las estrategias de modelado directo, se encuentran efectos principales de los factores curso $F(3, 184) = 5.97$, $p < .05$, nivel de abstracción $F(3, 552) = 28.89$, $p < .01$, operación $F(1, 184) = 28.95$, $p < .01$ y lugar de la incógnita $F(1, 184) = 84.36$, $p < .01$. Por tanto, el curso escolar, nivel de abstracción, operación y lugar de la incógnita afectan a la frecuencia con la que los alumnos utilizan dicha estrategia. En otras palabras, el uso de las estrategias de modelado directo depende del curso al que pertenecen los alumnos; cambia según el nivel de abstracción presentado; se modifica cuando la operación es cambio aumento o cambio disminución, y depende si la incógnita se ubica en la cantidad final o inicial de la operación.

En el estudio de comparaciones múltiples de Tuckey, se hallan diferencias significativas entre los escolares de cuarto año con relación a los demás cursos ($p < .05$), mientras que los alumnos de tercero tienen diferencias respecto a los de segundo y primero ($p < .05$); sin embargo, las diferencias no son significativas entre los de segundo y primer año. Los datos son consistentes con otros estudios (Bermejo et al., 1998; Bermejo y Rodríguez, 1993; Carpenter, 1985, 1986) donde se muestra que las estrategias de modelado directo se emplean más en los primeros cursos que en los superiores. De igual manera, encontramos que el nivel concreto difiere del numérico y el verbal ($p < .01$).

La Tabla VII muestra los datos tocantes a las interacciones significativas en el uso de estrategias de modelado directo por parte de los participantes. En las siguientes figuras se presentan dos interacciones relevantes.

TABLA VII
Interacciones significativas
en el uso de estrategias de modelado directo (parte 1)

Interacciones	Valor F	Significancia
Contexto X Nivel de abstracción	$F(3, 552) = 4.01$	$P < .05$
Curso X Incógnita	$F(3, 184) = 3.63$	$P < .05$
Contexto X Curso	$F(3, 184) = 3.66$	$P < .05$
Contexto X Curso X Nivel de abstracción	$F(9, 552) = 2.22$	$P < .05$

TABLA VII
Interacciones significativas
en el uso de estrategias de modelado directo (parte 2)

Interacciones	Valor F	Significancia
Curso X Operación X Incógnita	F (3,184) = 11.73	P < .01
Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	F (3, 552) = 5.26	P = .01
Curso X Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	F (9, 552) = 5.03	P < .01
Contexto X Curso X Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	F (9, 552) = 2.00	P < .05

En la Figura 3 se aprecia la interacción entre el contexto y el nivel de abstracción, según las estrategias de modelado directo. El uso de tales estrategias cambia en los distintos contextos escolares, de acuerdo con el nivel de abstracción que tiene la tarea propuesta a los participantes. Ahora bien, el patrón evolutivo indica que los niveles concreto y dibujos se resuelven más con las estrategias de modelado directo, especialmente en el contexto urbano, mientras que los niños rurales las usan más que los urbanos en los niveles numérico y verbal. Los niveles inferiores de abstracción (concreto, dibujo) favorecen el uso de estrategias de modelado directo por todos los alumnos, mientras que en los superiores (numérico, verbal) se recurre menos a ellas, de manera especial en los alumnos urbanos, ya que los rurales siguen empleándolas con cierta frecuencia.

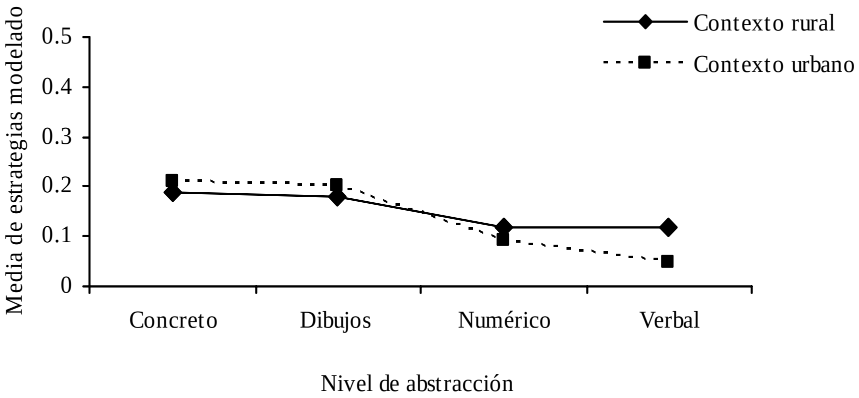


Figura 3. Interacción nivel de abstracción por contexto
en las estrategias de modelado directo.

Por tanto, en la construcción del conocimiento matemático los niños rurales usan más que los urbanos la manipulación de objetos cuando las tareas son más abstractas; en cambio, ante situaciones menos abstractas (objetos, dibujos) ambos grupos de escolares utilizan con más frecuencia las estrategias de modelado directo, especialmente los urbanos. Ello se debe probablemente a que la presentación de la tarea (situación más concreta) favorece su uso. Los resultados son consistentes con los planteamientos de otros autores (Saxe, 1991; Saxe y Gearhart, 1990) en el sentido de que el aprendizaje de las matemáticas implica una práctica especializada en los niños del contexto rural, quienes desarrollan habilidades espaciales superiores a las destrezas manifestadas por los del contexto urbano. Además, confirman los datos encontrados en otros estudios (Schliemann y Carraher, 2002) respecto a que las situaciones de aprendizaje contextuales son variables. En este caso, las situaciones de mayor o menor abstracción implican un aprendizaje distinto de estas estrategias, según el contexto escolar.

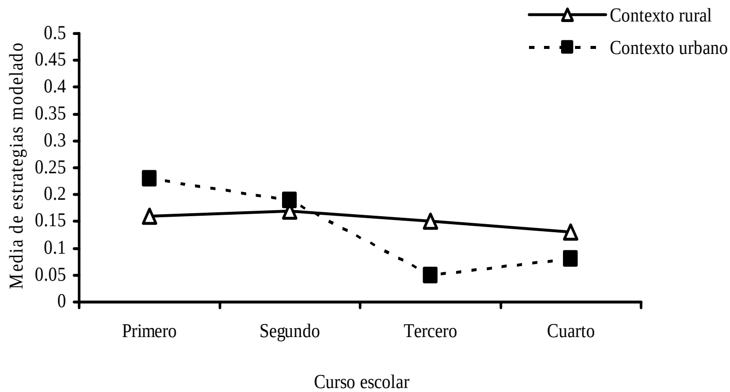


Figura 4. Interacción curso por contexto en las estrategias de modelado directo.

En la Figura 4 aparece la interacción curso por contexto en las estrategias de modelado directo. El análisis sobre los efectos simples del factor contexto en los niveles del factor curso indica diferencias significativas entre los alumnos de tercer año en el contexto rural y los del urbano: $F(1, 184) = 2.96$, $p < .05$, lo que confirma las diferencias mencionadas en torno a la evolución de los cursos superiores. Mientras los niños urbanos de tercero y cuarto año utilizan menos las estrategias de modelado directo, los rurales siguen empleándolas a lo largo de los cuatro años casi con la misma frecuencia. También se nota que la mayor frecuencia en el uso de dicha estrategia ocurre en los dos primeros años, como puede constatarse especialmente en el grupo urbano. Así, el análisis de los efectos simples del factor contexto en los niveles del factor curso señala que las diferencias son significativas entre primero y segundo con relación a tercero y cuarto año en el contexto urbano. Es decir, las estrategias de modelado directo se emplean más por los alumnos de los primeros cursos y menos en los cursos superiores. Tal patrón evolutivo es consistente con los planteamientos sobre el desarrollo de las estrategias básicas en los cursos inferiores (Carpenter y Moser, 1982; Bermejo et al., 1998), y confirma que la manipulación de objetos favorece la adquisición de conocimientos matemáticos, sobre todo al inicio de su aprendizaje.

Referente a las estrategias de conteo, el análisis detecta efectos principales en los factores contexto $F (1, 184) = 8.53$, $p < .05$, operación $F (1, 184) = 75.17$, $p < .01$ y lugar de la incógnita $F (1, 184) = 30.33$, $p < .01$. No hubo efecto del factor curso $F (3, 184) = 1.91$, $p = .12$ ni del factor nivel de abstracción $F (3, 552) = 2.34$, $p = .07$. Es decir, el contexto, tipo de operación y lugar de la incógnita afectan al uso de las estrategias de conteo.

Ahora bien, el estudio de comparaciones por pares con la prueba Tuckey revela que hay diferencias significativas al ocupar las estrategias de conteo en el factor contexto, ya que los alumnos rurales tienden a usarlas más que los urbanos ($p < .01$). En cuanto al factor operación, tales estrategias se usan más en cambio aumento que en cambio disminución ($p < .01$), mientras que en el factor incógnita se recurre más a ellas en los problemas con la incógnita cantidad final que con la incógnita cantidad inicial ($p < .05$).

TABLA VIII
Interacciones significativas
en el uso de estrategias de estrategias de conteo (parte 1)

Interacciones	Valor F	Significancia
Curso X Nivel de abstracción	F (9, 552) = 2.54	p < .05
Contexto X Operación	F (1, 184) = 9.34	p < .05
Nivel de abstracción X Operación	F (3, 552) = 8.03	p < .01
Nivel de abstracción X Incógnita	F (3, 552) = 7.22	p < .01
Operación X Incógnita	F (1, 184) = 20.36	p < .01
Contexto X Curso X Nivel de abstracción	F (9, 552) = 2.60	p < .05

TABLA VIII
Interacciones significativas
en el uso de estrategias de estrategias de conteo (parte 2)

Interacciones	Valor F	Significancia
Contexto X Nivel de abstracción X Operación	*F* (3, 552) = 3.95	$p < .05$
Curso X Nivel de abstracción X Operación	*F* (9, 552) = 3.74	$p < .01$
Curso X Nivel de abstracción X Incógnita	*F* (9, 552) = 3.57	$p < .01$
Curso X Operación X Incógnita	*F* (3, 184) = 4.05	$p < .05$
Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	*F* (3, 552) = 6.54	$p < .01$
Curso X Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	*F* (9, 552) = 2.06	$p < .05$

La Tabla VIII contiene las interacciones significativas correspondientes al empleo de estrategias de conteo. Una de ellas aparece en la Figura 5, que muestra la interacción contexto, curso y nivel de abstracción en las estrategias de conteo.

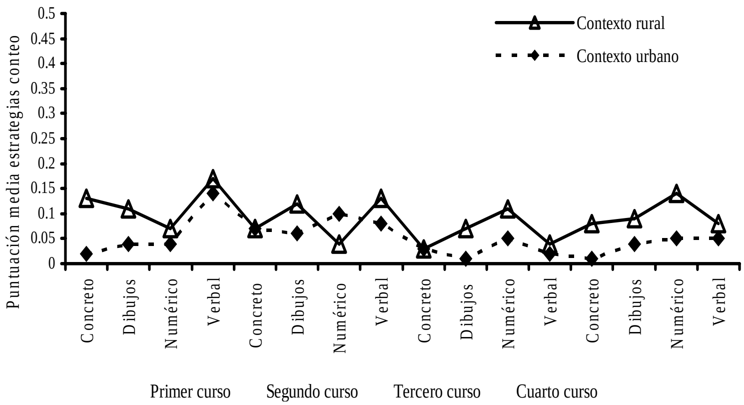


Figura 5. Interacción contexto por curso por nivel de abstracción en las estrategias conteo.

En dicha figura se observa que los alumnos de contexto rural utilizan en general dichos recursos más frecuentemente que los alumnos urbanos, especialmente los de tercero y cuarto año. Ello puede deberse a que en estos años los alumnos urbanos prefieren las estrategias de hechos numéricos.

Además, en el contexto rural en los dos primeros años se usan estas estrategias, sobre todo en el nivel verbal, mientras que en los dos últimos años se hacen en el nivel numérico.

En lo tocante a las estrategias de hechos numéricos, el análisis detecta efectos principales en los factores contexto $F(1, 184) = 13.05$, $p < .01$, curso $F(3, 184) = 88.39$, $p < .01$ y nivel de abstracción $F(3, 552) = 26.95$, $p < .01$. Por ende, el contexto, el curso escolar y el nivel de abstracción afectan al uso de las estrategias de hechos numéricos en los alumnos. Al hacer el estudio de comparaciones múltiples de Tuckey, hay diferencias significativas entre los escolares de cuarto año con relación a los demás cursos ($p < .05$), los alumnos de tercero muestran diferencias significativas respecto a los de segundo y primero ($p < .05$), y finalmente los niños de segundo difieren significativamente de los primero ($p < .05$). Dichos resultados concuerdan con los hallados por otros investigadores (Bermejo et al., 1998; Carpenter y Moser, 1982) en el sentido de que las estrategias de hechos numéricos son ocupadas principalmente por alumnos de cursos superiores. La comparación por pares con la prueba Tuckey en el factor contexto indica diferencias significativas del contexto urbano con respecto al rural ($p < .01$), de modo que los alumnos urbanos emplean con mayor frecuencia dichas estrategias que los rurales. Asimismo, hay diferencias en el factor nivel de abstracción, ya que el nivel verbal contrasta con los demás niveles ($p < .01$), mientras que el numérico difiere con los niveles concreto y dibujos ($p < .01$).

En la Tabla IX se presentan las interacciones significativas entre los alumnos al usar las estrategias de hechos numéricos; los urbanos recurren más a ellas, en comparación con los rurales.

TABLA IX
Interacciones significativas
en el uso de estrategias de hechos numéricos (parte 1)

Interacciones	Valor F	Significancia
Curso X Nivel de abstracción	$F(9, 552) = 2.80$	$p < .05$
Contexto X Operación	$F(1, 184) = 4.74$	$p < .05$
Curso X Incógnita	$F(3, 184) = 2.80$	$p < .05$
Nivel de abstracción X Operación	$F(3, 552) = 10.06$	$p < .01$
Nivel de abstracción X Incógnita	$F(3, 552) = 3.34$	$p < .05$
Operación X Incógnita	$F(1, 184) = 27.18$	$p < .01$

TABLA IX
Interacciones significativas
en el uso de estrategias de hechos numéricos (parte 2)

Contexto X Nivel de abstracción X Incógnita	$F\ (3, 552) = 3.16$	$p < .05$
Curso X Operación X Incógnita	$F\ (3, 184) = 7.60$	$p < .01$
Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	$F\ (3, 552) = 8.83$	$p < .01$
Contexto X Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	$F\ (3, 552) = 2.65$	$p < .05$
Contexto X Curso X Nivel de abstracción X Operación X Incógnita	$F\ (9, 552) = 2.86$	$p < .05$

Con respecto al segundo objetivo, se afirma que los alumnos del contexto rural emplean más que los del urbano las estrategias de modelado directo y conteo en la mayoría de los niveles de abstracción. En cambio, los escolares de las escuelas urbanas superan a los de las rurales en el uso de las estrategias de hechos numéricos en todos los niveles de abstracción presentados en el estudio. Los resultados son consistentes con los de otros trabajos (Carraher et al. 1985; Saxe, 1991) sobre la cuestión necesaria de analizar el contexto social en el aprendizaje de las matemáticas, visto como una práctica específica. Los niños rurales son más concretos que los urbanos en el nivel verbal, lo cual reafirma la idea de la especificidad del conocimiento infantil. Por tanto, el patrón de estrategia se manifiesta a partir de una interacción social basada en el conocimiento informal que se adquiere mediante la manipulación de objetos cotidianos. Dicho patrón de desarrollo ocurre dentro de las características sociales de una cultura rural.

5. Conclusiones

En esta investigación se confirman los siguientes planteamientos. Por una parte, la tendencia evolutiva que marca el rendimiento de los alumnos, pues en general el comportamiento de los participantes mejora sensiblemente a medida que se avanza de primero a cuarto año de educación primaria. También se comprueba la secuencia de abstracción de lo concreto a lo abstracto, aunque con patrones evolutivos diferentes, ya que en general durante los dos primeros años el rendimiento de los alumnos baja a medida que se incrementa el nivel de abstracción de las tareas propuestas, excepto en el nivel verbal, lo cual resulta especialmente notorio en los alumnos rurales. Sin embargo, en tercer año los rendimientos mejoran globalmente a medida que se incrementa el nivel de abstracción de los problemas aritméticos, debido a que en este nivel evolutivo la presencia de objetos o dibujos no sólo no facilitan, sino que probablemente funcionan como distractores a lo largo de la resolución de problemas.

Por otra parte, se confirma que la incógnita afecta significativamente al comportamiento matemático de los escolares, de modo que las tareas resultan más fáciles con la incógnita cantidad final que con la cantidad inicial. No obstante, tal afirmación hay que matizarla en función del tipo de situación matemática planteada, como hemos visto con cierto detalle. Finalmente, resaltamos la importancia del factor contexto socioeconómico, que si bien no ha sido estadísticamente significativo, las diferencias son notorias en algunos cursos y situaciones matemáticas. Así ocurre, por ejemplo, en segundo año de educación primaria, donde los alumnos urbanos puntúan muy por encima de los rurales, sobre todo en los niveles de abstracción concreto-dibujo-numérico. Sin embargo, no hay diferencias en el nivel verbal entre los alumnos urbanos y rurales en ninguno de los cuatro años que se han investigado en este trabajo.

Sobre las estrategias que ocupan los alumnos en la resolución de los problemas planteados, se verifica igualmente el empleo específico y variado de procedimientos. Los alumnos de primero y segundo utilizan el modelado directo más que los de tercero y cuarto de educación primaria. En cambio, no hay diferencias significativas entre los cursos respecto al uso de las estrategias de conteo, pero se observa un desarrollo progresivo entre los cursos en lo tocante al uso de los procedimientos de hechos numéricos.

Con respecto a los contextos rural y urbano, los alumnos rurales suelen utilizar la estrategia de modelado directo de modo parecido a lo largo de los cuatro años, mientras que los urbanos recurren a ella sobre todo durante los dos primeros cursos. En cuanto a las estrategias de conteo, los alumnos rurales las emplean con mayor frecuencia que los urbanos en los cursos más avanzados, mientras que las de hechos numéricos se desarrollan progresivamente a medida que avanzan los cursos escolares, siendo especialmente frecuente su empleo en los niños urbanos, sobre todo en los niveles verbal y numérico.

Desde el punto de vista de la práctica educativa, esta investigación evidencia el desajuste en la planificación de la enseñanza formal y el desarrollo del conocimiento matemático infantil; por ejemplo, los alumnos rurales obtienen mejor rendimiento en los problemas verbales que en el algoritmo. El aprendizaje mecánico de los alumnos quedó de manifiesto en la solución de los problemas, una situación que atañe al diseño de los libros de texto, el cual se orienta fundamentalmente al aprendizaje memorístico.

Ahora bien, esos textos podrían modificarse por una metodología que modele la comprensión de los problemas de cambio aumento y cambio disminución. Resulta pertinente proponer el aprendizaje de estas operaciones en función de la secuencia del nivel de abstracción y la estructura semántica de los problemas en el aula de matemáticas. Por tanto, huelga recomendar la implantación del marco teórico-metodológico constructivista en el proceso de instrucción de las matemáticas en el aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bagni, G. (2000). “Simple” rules and general rules in some high school students’ mistakes. *Journal für Mathematik Didaktik 21*(2), 124-138.

Abreu, G. de (1995). Understanding how children experience the relationship between home and school mathematics. *Mind, Culture and Activity 2*(2), 119-142.

Abreu, G. de (1998). The mathematics learning in sociocultural contexts: the mediating role of social valorisation. *Learning and Instruction 8*(6), 567-572.

Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A. y Rodríguez, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Baroody, A. J. (1987). The development of counting strategy for single-digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education 18*(2), 141-157.

Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética*. Madrid, España: Paidós.

Bermejo, V. (2004). *Como enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid, España: CCS.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje*, 39-40, 71-81.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1993). La operación de sumar: competencia conceptual vs. competencia de procedimiento. En J. A. Beltrán, L. Pérez, E. González, R. González y D. Vence. (Eds.), *Líneas actuales en la intervención psicopedagógica I: Aprendizaje y contenidos del currículum* (pp. 711-726). Madrid, España: Universidad Complutense.

Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodríguez, P. (1998). Aprendizaje de la adición y sustracción. Secuenciación de los problemas verbales según su dificultad. *Revista de Psicología General y Aplicada 51*(3-4), 533-552.

Bermejo, V., Lago, M. O., Rodríguez, P., Dopico, C. y Lozano, J. M. (2002*) PEI. Un programa de intervención para la mejora del rendimiento matemático*. Madrid, España: Editorial Complutense.

Brown, J. S., Collins, A. y Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher 18,* 32-42.

Carpenter, T. P. (1985). Learning to add and subtract: An exercise in problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 17-40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: implications from research on the initial learning of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 113-132). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P., Hiebert, J. y Moser, J. M. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education 12*, 27-29.

Carraher, T. N., Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Development Psychology 3*, 21-29.

Carraher, T. N., Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (1987). Written and oral mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education 18*(2), 83-97.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first grader's strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education 18*(5), 363-381.

Fuson, K. C. y Willis, G. B. (1989). Second grader's use of shematic drawings in solving addition and subtracion word problems. *Journal of Educational Psychology 81*, 514-520.

Kamii, C., Kirkland, L. y Lewis, B. A. (2001). Representation and abstraction in young children's numerical reasoning. In NCTM (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp.24-34). Reston, VA: NCTM.

Kamii, C., Lewis, B. A. y Kirkland, L. D. (2001). Manipulatives: when are they useful? *Journal of Mathematical Behavior 20*(1), 21-31.

Kato, Y., Kamii, C., Ozaki, K. y Nagahiro, M. (2002). Young children's representations of groups of objects: The relationship between abstraction and representation. *Journal for Research in Mathematics Education 33*(1), 30-45.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nunes, T. N., Schliemann, A. D. y Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. New Cork, USA:Cambridge University Press.

OCDE (2002). Conocimientos y aptitudes para la vida. Resultados de Pisa 2000. México: Santillana Aula XXI

OCDE (2005). Informe Pisa 2003. Aprender para el mundo del mañana. Madrid, España: OCDE-Santillana.

Putnam, R. T., deBettencourt, L. U. y Leinhardt, G. (1990). Understanding of derived-fact strategies in addition and subtraction. *Cognition and Instruction 7*, 245-285.

Resnick, L. (1987). Learning in school and out. *Educational Researcher*, 1*6*, 13-20.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona, España: Horsori.

Riley, M. S., Greeno, J. G. y Heller, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York, USA: Academic Press.

Rogoff, B. (1990). Apprenticeship in thinking. Cognitive development in social context. New York, USA: Oxford University Press.

Saxe, G. B. (1991). Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Saxe, G. B. (2002). Children's developing mathematics in collective practices. A framework for analysis. *Journal of the Learning Science 11*(2-3), 275-300.

Saxe, G. B. y Gearhart, M. (1990). The development of topological concepts in unschooled straw weavers. *British Journal of Developmental Psychology 8*, 251-258.

Schliemann, A. D. (1995). Some concerns about bringing everyday mathematics to mathematics education. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the XIX International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 45-60). Recife, Brazil.

Schliemann, A. D. y Carraher, D. W. (2002). The evolution of mathematical reasoning: Everyday versus idealized understandings. *Development Review 22*(2), 242-266.

Willis, G. B. y Fuson, K. C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology 80*(2), 192-201.

Wolters, M. A. D. (1983). The part-whole schema and arithmetical problems. *Educational Studies in Mathematics 14*(2), 127-138.

Autores

Juan José Díaz. Unidad Académica de Psicología, Universidad Autónoma de Zacatecas, México; jjdddl@mixmail.com

Vicente Bermejo. Facultad de Psicología, Universidad Complutense de Madrid, España.