FILOSOFIA-LOGICA-MATEMATICAS

Luis Eduardo Suárez Fonseca

RESUMEN

El propósito fundamental del autor es presentar, el horizonte filosófico de la teoría matemática señalándolo como posible campo de investigación a los estudiantes de Filosofía. El trabajo pretende ser una introducción, parcialmente sistemática, al estudio de las corrientes dominantes en la Filosofía de la Matemática, surgidas a raíz de la llamada "crisis de los fundamentos". Busca analizar las distintas formas con que se ha tratado de organizar la teoría del conocimiento matemático y explicitar el problema de fondo que subyace en todas ellas. Consta de dos partes: En la primera —la que publicamos en este número—, se exponen los principales intentos teóricos que se hicieron a lo largo del S. XIX y en los juicios del S. XX, para dar una fundamentación teórica última a la Matemática desde la perspectiva del logicismo, el intuicionismo y el formalismo. En esta parte el autor examina cada una de las escuelas y pone de relieve las limitaciones que en cada una de ellas se pueden advertir en el intento fundamental de fundar teóricamente la Matemática, y deja abierto el problema de la verdad en las Matemáticas, objeto central de la segunda parte del trabajo, que será publicada en un próximo número.

1. UN CAMINO POCO FRECUENTADO

Por lo general se considera que, exceptuada la Lógica, la verdad y el razonamiento matemáticos están fundamentados sobre bases más seguras que las que sostienen la verdad y razonamiento de cualesquiera otras disciplinas. Sin embargo, en esta creencia se ocultan no pocas ambigüedades, espejismos y prejuicios teóricos que una atenta mirada filosófica debe descubrir.

El empeño en patentizar la claridad y solidez teóricas de la Matemática y el deseo de conseguir algo similar para las otras disciplinas es una de las razones que hacen del análisis del pensamiento matemático o, lo que es lo mismo, del análisis de la verdad y razonamiento matemáticos una antigua tarea de la Filosofía, que hoy, quizá más que nunca, debe continuar.

El presente trabajo intenta exponer y examinar algunas teorías filosóficas sobre la naturaleza de la Matemática pura, confrontando sus credos con algunos recientes descubrimientos matemáticos (o mejor, metamatemáticos). Puede inscribírselo en el ámbito de la Filosofía de la Matemática, entendida como una investigación cuyo objetivo es caracterizar y explicar el estado actual de la evolución de la Matemática, clarificando y explicitando sus conceptos y principios básicos. Es una introducción, parcialmente histórica y parcialmente sistemática, al estudio de las corrientes dominantes en la Filosofía de las Matemáticas, que de alguna manera subyacen a toda discusión sobre los así llamados "problemas de los fundamentos".

Quisiera con estas líneas, excitar a los jóvenes que aspiran a ser filósofos para que se inicien en algunos temas fascinantes de la Filosofía: los de la Filosofía de la Matemática (y otros temas conexos como la Filosofía de la Lógica) en los que muy poco o nada ha incursionado la filosofía colombiana debido, quizá, a una unilateral concepción del currículo de la carrera de Filosofía que lleva a centrar el trabajo filosófico en las distintas escolásticas, antiguas, modernas o contemporáneas, pero en todo caso 'escolásticas'.

Evidentemente, el trabajo en estos campos, casi desconocidos en nuestro medio filosófico, implica un esfuerzo particular, una disciplina a la que no acabamos de acostumbrarnos (díganlo si no las innumerables dificultades para el aprendizaje y asimilación de los elementos de Lógica y Matemáticas): la disciplina que impone a la mente y a su ejercicio límites rigurosos fuera de los cuales ninguna idea puede pretender un sitio entre las verdades filosóficas. Lo contrario equivaldría en últimas a la destrucción de la Filosofía, como búsqueda de la verdad.

2. CORRIENTES FILOSOFICAS EN MATEMATICAS: SUS ORIGENES

La creación y aparición de las Geometrías no-euclidianas en la primera mitad del siglo XIX provocó una profunda crisis filosófica no sólo en

Matemáticas sino en general en toda la teoría del conocimiento humano. Hasta este momento, las principales ramas de la Matemática se consideraban bien fundadas desde el punto de vista de su lógica interna. El surgimiento de tres geometrías internamente coherentes, pero mutuamente excluyentes hizo aparecer inmediatamente la pregunta por el significado de 'verdad' en Matemáticas y en general, en el conocimiento.

La teoría del conocimiento de Kant, síntesis (feliz/infeliz) de las intuiciones clásicas y modernas, se derrumbaba ante este hecho asombroso. Otro tanto sucedía con la filosofía pitagórico-platónica de la Matemática que se sustentaba sobre la dualidad entre la Matemática y sus leyes por un lado y el mundo observado o 'real' y sus leyes por otro lado. Los interrogantes que surgieron inmediatamente fueron: ¿Hay un conocimiento creado por el hombre, independientemente de la experiencia, no ligado —a ni gobernado— por un universo exterior o sus leyes? ¿Cómo se puede controlar o delimitar tal conocimiento? ¿Qué diferencia hay entre conocimiento e imaginación? ¿Cómo diferenciarlos?

Las preguntas no son triviales y sería muy optimista creer que se han resuelto completamente. Este trabajo busca analizar las distintas formas en que se ha tratado de organizar la teoría del conocimiento, especialmente dentro de la Matemática, o mejor, dentro de la Filosofía de la Matemática. Es claro, igualmente, que en este caso se exploran las fronteras mismas del conocimiento humano lo que implica tratar con preguntas abiertas y trabajar con respuestas parciales y tentativas. Se trata de ver cómo la Filosofía de la Matemática ha enfrentado la crisis de la pérdida de la 'verdad'.

Por otra parte, la destrucción de la dualidad entre las leyes matemáticas y las del mundo externo presiona para que se creen mecanismos y criterios internos de control (la noción clásica de Verdad no sirve) para el discurso científico. Esto implicó un desarrollo muy pronunciado de la Lógica como instrumento fiscalizador interno a la ciencia. La segunda mitad del S. XIX presencia un desarrollo extraordinario de la Lógica simbólica, Lógica proposicional, Lógica relacional. Igualmente el concepto aristotélico de ciencia, como ciencia deductiva (demostrativa) adquiere una relievancia inusitada que influye de modo directo en el movimiento axiomático.

Lo anterior explica la importancia que se quiere dar a la Lógica también en el discurso filosófico.

Esto sucedía hacia la mitad del siglo XIX. Pero, a finales de siglo algunos matemáticos más radicales pretenden, no sólo fortalecer la Lógica sino 'derivar' toda la Matemática de la Lógica pura, naciendo así, la corriente logicista en Matemáticas. Se pueden encontrar claros antecedentes de la doctrina logicista en Leibniz. Pero la figura máxima en ese momento es Bertrand Russell quien había escrito un libro sobre la Filosofía de Leibniz. Su idea central es tan atractiva como simple: las Matemáticas son lógica, o la Lógica es la base y raíz de la Matemática (su niñez). De un sólo golpe se *desacredita* a la Geometría considerada hasta entonces como el modelo fundamental o fuente generadora de los 'entes' matemáticos.

Frente a esta posición 'herética' y motivado por los abusos y por las inconsistencias del programa logicista, se levanta un grupo de matemáticos que defienden el papel de la intuición en la creación de la Matemática y que niegan que la Matemática pueda reducirse a una simple combinatoria de principios lógicos. Esta escuela, denominada intuicionista busca 'salvar' los restos de la línea Pitágoras-Platón-Kant. En particular, esta corriente niega la independencia total de la Matemática respecto a algún marco de referencia, sea éste el mundo de las ideas o el mundo exterior, y cree que la Matemática es algo más que una creación caprichosa o arbitraria de la mente humana con base en la Lógica. Representantes de este punto de vista son Kronecker, Poincaré. Brower.

Como un punto de vista, hasta cierto punto, 'intermedio', aparece la escuela formalista para la cual el método axiomático es el método en Matemática. Su líder es D. Hilbert. Su preocupación central es establecer mediante métodos constructivos la consistencia absoluta de la Matemática. Consideran que la Matemática se desarrolla simultáneamente con la Lógica y que la actividad de la Matemática se restringe a la manipulación de símbolos carentes de significado intuitivo alguno, según reglas formales de transformación. Tan pronto se dota a un tal conjunto de símbolos de un significado proveniente de las ciencias físicas, de la intuición (es decir, cuando se interpreta el conjunto), ya no estamos haciendo Matemática, sino ciencia natural. . . Esta metodología permitiría aislar la naturaleza misma de la Matemática, su esqueleto, del gran cuerpo del conocimiento dependiente de ella, de sus aplicaciones.

Debe recordarse, además, que hasta finales del S. XVIII la Matemática estaba íntimamente ligada a la Física y demás ciencias de la naturaleza. Se creía que las leyes de la naturaleza eran susceptibles de ser expresadas en lenguaje matemático. La Aritmética y la Geometría eran consideradas como verdades apriorísticas.

La aparición de las Geometrías no-euclidianas rebaja a la Geometría euclidiana de su categoría de verdad apriori y precondición de todo conocimiento humano, a mera ciencia empírica, quedando la Aritmética en pie como la única verdad apriori. Esto hace que al buscar nuevas bases para la Matemática se las busque en la Aritmética.

En la primera mitad del S. XIX otro rudo golpe iba a ser atestado a la Matemática como prototipo de racionalidad y a la teoría del conocimiento en general. Era un presupuesto común de las ciencias y principio indiscutido de una filosofía ingenua del progreso (producto a su vez de la ciencia moderna) la creencia en que todo problema enunciado por el ser humano era susceptible de una eventual solución. Quedaban, sin embargo, dos problemas famosos sin solución. Uno de ellos, heredado de la Matemática griega, tenía que ver con construcciones con regla y compás: la cuadratura del círculo (= construir un cuadrado cuya área sea igual al área de un círculo); la duplicación del cubo (= construir un cubo cuyo volumen es el doble del volumen de un cubo dado); y la trisección de un ángulo. El segundo problema, legado de los grandes algebristas italianos consistía en hallar la fórmula de solución (por radicación) de la educación polinómica general de quinto grado. Pues bien, a comienzos del S. XIX, el matemático noruego Niels Abel demostró que no había solución para el segundo de tales problemas; y en 1835 el jovensísimo matemático francés Evariste Galois publicó una teoría general, una de cuyas consecuencias es la imposibilidad de hallar una solución a cualquiera de estos problemas de tan larga data.

Si bien es cierto que las Geometrías no-euclidianas abrieron nuevos horizontes jamás soñados a la Matemática, estos resultados casi simultáneamente, impusieron limitaciones tampoco imaginadas sobre ella. La Matemática era a la vez, más fuerte y más débil de lo que la epistemología tradicional suponía.

Otro problema que surgió a principios del siglo XIX está relacionado con las aplicaciones de la Matemática en general, y en particular sus aplicaciones a las ciencias físicas. En efecto, se puede afirmar que para esta época ya se había aceptado que toda aplicación de la Matemática a la Física y toda ley de la ciencia física enunciada en términos matemáticos se podría llevar a cabo con un mínimo de experimentación y tecnología. Quedaban sinembargo problemas inmanejables relacionados con teorías adecuadas de la luz, la electricidad, el magnetismo y el calor cuya resolución requería una experimentación sistemática y detallada, así como una creciente sofisticación tecnológica para comenzar a resolverlos. Esto, a su vez, exigía una creciente especialización de los científicos, que sería otro motivo fuerte para el alejamiento, separación y eventual divorcio entre Matemática y ciencia física. La Matemática no es el lenguaje directo, sencillo y espontáneo del mundo objetivo. Las cosas oponen una opacidad y resistencia a la racionalidad matemática mayores de lo esperado.

Pero el estancamiento en la matematización de las ciencias traería otras consecuencias importantes para la Matemática. Matemáticos de gran talento como Gauss y Bolzano se preocuparían por examinar más a fondo el concepto de aplicabilidad de la Matemática, es decir las precondiciones de la matematización de una situación física. El resultado más importante que arroja este análisis es que la matematización no consta de la simple simbolización de objetos, sino del reconocimiento y formulación de relaciones entre objetos. De esta corriente junto con la creciente desconfianza hacia la intuición surgirán los grandes movimientos que buscan fortalecer la lógica cuyos resultados serán la Lógica Simbólica y la extensión de la Lógica tradicional de clases a la Lógica de relaciones.

Por otra parte, la línea de pensamiento de Gauss y Bolzano desemboca naturalmente en la teoría de conjuntos que permite a la vez tener en cuenta el individuo (el elemento) y la colectividad (el conjunto) expresando así relaciones entre objetos tal como lo exigía Gauss. La teoría de conjuntos a su vez sirvió de base para una minuciosa construcción de la Aritmética por Frege y Russell. Como ya se ha dicho la Aritmética iba a ser la base de la fundamentación de toda la Matemática.

La primera corriente se extiende de Gauss a Russell pasando por Bolzano, Cantor (creador de la teoría de conjuntos) y Frege. Esta corriente llega a fundamentar la Aritmética sobre la teoría de clases y de relaciones y a derivar ésta de la Lógica pura, dando origen así a la Escuela Logicista. Su máximo exponente, B. Russell, afirma que la Lógica es la niñez de la Matemática y la Matemática la madurez de la Lógica. En resumen: a lo largo del Siglo XIX hemos hallado tres corrientes de pensamiento o intentos teóricos principales que pretenden dar una fundamentación última a la Matemática: el logicismo, el formalismo, el intuicionismo. No creo equivocado identificar la Escuela Logicista con la inicial preocupación de Gauss por ampliar el campo de aplicación de la Matemática, pues Russell afirma claramente su afán por hacer que los símbolos matemáticos correspondan al significado que se les atribuye en la vida cotidiana. Esto en abierta oposición a la escuela formalista de Hilbert que se limita a manipular símbolos sin significado, formas carentes de contenido.

Al señalar las raíces de la Escuela Formalista decía que su línea de desarrollo está bastante bien definida. Las Geometrías no-euclidianas reforzaron la dependencia de la Matemática con respecto al método axiomático y debilitaron la confianza en la intuición; éstas son dos características principales de la Escuela Formalista donde la desconfianza en la intuición se manifiesta en la exigencia de no dar significado a los símbolos. La Escuela Formalista busca fundamentar toda la Matemática sobre la Aritmética, ya no por razones epistemológicas, por su carácter de juicios apriori, sino más bien por consideraciones matemáticas. La axiomatización de la Matemática en reacción a las Geometrías no-euclidianas, puso en claro que tanto el Análisis como el Algebra y la misma Geometría habían de fundamentarse sobre una axiomatización de la Aritmética. De acuerdo con sus criterios, por lo tanto, sería objetivo principal de la Escuela Formalista mostrar la consistencia absoluta de dicha axiomatización.

El surgimiento de una Escuela Intuicionista se debe principalmente a dos factores: El residuo de las antiguas epistemologías, en particular la influencia de Kant, así como el deseo de creer que la ciencia matemática no es de naturaleza totalmente arbitraria.

Pasemos ahora a un examen más detenido de los intentos, los horizontes teóricos, los logros y limitaciones de cada una de estas escuelas en el proceso seguido para llegar a un fundamento teórico definitivo para Matemática.

3. EL LOGICISMO

En la revisión de los fundamentos de la Matemática de fines del siglo pasado se llegó a la llamada aritmetización del Análisis matemático (que incluye Algebra, Aritmética, Cálculo Diferencial e Integral), eliminándose algunas nociones confusas como la de 'infinitésimo' concebidos por Newton y Leibniz, y llegándose a que el concepto básico era el de número natural. Se consiguió definir rigurosamente los conceptos de número real, complejo, etc., teniendo como punto de partida 0, 1, 2, 3, . . . y sus propiedades. El estudio de la Geometría ya no fue más el estudio del espacio real, sino el de una estructura abstracta (lógica).

Hacia mediados del siglo pasado el trabajo de Geoge Boole dio un impulso extraordinario a la Lógica, iniciando el proceso de simbolización que permite un análisis profundo de las operaciones lógicas. Otros matemáticos contemporáneos de Boole, como A. de Morgan y S. Jevons hacen contribuciones muy significativas al avance de la Lógica. La obra de Shcröder en tres volúmenes publicada entre 1890-1905, representa la culminación de esta línea de investigaciones.

Sinembargo, solamente con Peano y su escuela encontramos la contribución más significativa de la Lógica a una mejor comprensión de los problemas relativos a la fundamentación de la Matemática. Peano crea un lenguaje lógico simbólico con el cual trata de exponer todas las disciplinas deductivas, permitiendo, de este modo, una visión más exacta del mecanismo lógico de las numerosas teorías matemáticas.

Por otro lado, G. Cantor en 1872 comenzó a publicar trabajos revolucionarios que influenciaron no solo la Matemática sino los fundamentos de la misma. La teoría de Cantor es la hoy llamada Teoría Ingenua de

Conjuntos. La obra de Cantor contiene entre otras cosas una Aritmética de los números infinitos.

Esta era la situación, a grandes rasgos, en el momento en que surge el Logicismo. Esta corriente filosófica nació como culminación de las indagaciones anteriormente mencionadas. En la obra de B. Russell, líder del logicismo, convergen las investigaciones de Cantor, Dedekind y Weiertrass referentes a la aritmetización del análisis, y las de Boole, De Morgan, Pierce y Peano referentes a la Lógica. Hay que anotar, sin embargo, que antes de Russell, el filósofo alemán G. Frege había presentado las tesis centrales del logicismo, pero debido a la dificultad del lenguaje simbólico por él empleado, su obra fue prácticamente ignorada hasta que sus ideas fueron redescubiertas independientemente por Russell. Por eso se considera a Frege como el precursor del logicismo. Hay que resaltar, igualmente, el aporte de Frege a la Lógica con su teoría de los cuantificadores.

La tesis fundamental del logicismo es: la Matemática se reduce a la Lógica. Para probar sus tesis, los partidarios del logicismo desarrollaron inmensamente la Lógica, dotándola de un algoritmo simbólico parecido al del Algebra y de métodos supremamente potentes de análisis, que permitieran definir las expresiones matemáticas en términos lógicos. Demostrar la tesis implicaba mostrar 1) que todas las proposiciones matemáticas pueden ser totalmente expresadas en terminología lógica y 2) que toda proposición matemática verdadera es una expresión lógica válida, o lo que es lo mismo, que una proposición matemática verdadera es deducible, por un razonamiento puramente lógico, de los axiomas de una teoría lógica axiomatizada.

La segunda parte de este programa, como se verá enseguida no puede cumplirse, y por lo tanto tampoco el programa en su totalidad. Pero los intentos iniciales de Frege y los posteriores de Russell y Whitehead y sucesores para realizarlo han conducido a descubrimientos y apreciaciones muy interesantes. Merece especial mención el análisis de Frege del concepto de número. Cuando decimos que Juanita y Alberto son dos estudiantes aplicados, adscribimos el atributo de 'ser-estudiante aplicado', pero no el atributo de "ser-dos" a cada uno de ellos individualmente. Hasta aquí no hay nada raro. Luego, en una serie ordenada de pasos, Frege analiza el concepto de número en la siguiente forma: 1) La tesis de que un número es un atributo de una clase (en nuestro caso, la clase que tiene a Juanita y Alberto como miembros); 2) La definición del concepto de 'clases equinumerales' (a y b son equinumerosas, si y solo si, se puede establecer entre ellas una correspondencia biunívoca). Como es posible mostrar que dos clases son equinumerales sin que por eso determinemos su número, se necesita un paso ulterior 3) que consiste en la construcción puramente lógica de una secuencia con referencia a la cual podamos determinar el número de cualquier clase. Para este tercer paso hay varios métodos como el de J. Von Neumann. 4) El paso siguiente, una vez definida la secuencia de los naturales como atributos de clase. . . es definir los conceptos aritméticos de enteros positivos, negativos, racionales. . . etc. y las operaciones con ellos. Por ahora no interesan los detalles.

Lo que es de suma importancia es saber si procediendo así, puede realizarse el programa logicista sin tener que recurrir para nada a conceptos y presupuestos no lógicos. El problema es doble: ¿Se puede lograr la reducción de la Matemática a la Lógica elemental? Y si tal cosa fuera posible ¿Quedaría así demostrado que la Matemática es pura Lógica? La respuesta a ambos interrogantes es negativa. Ciertas ideas de Frege desarrolladas por Russell condujeron a la llamada antinomia de Russell y a otras para cuya solución fue necesario recurrir a axiomas adicionales que no son axiomas ni teoremas de la Lógica elemental. Las consecuencias para la viabilidad del proyecto logicista son obvias. La existencia de totalidades infinitas era una de esas otras presuposiciones especialmente problemáticas. Claro que este no era un problema nuevo ya que se lo discute desde Platón y Aristóteles. Pero el resultado final de todo este esfuerzo es que la Matemática no logra encontrar en la Lógica un fundamento absoluto dejando así abiertos problemas filosóficos ulteriores.

4. EL INTUICIONISMO

Kronecker, contemporáneo de Weierstrass y Cantor se opone a las ideas de estos. Aceptando la idea de la aritmetización del análisis no está de acuerdo con la construcción de los reales ya que esto implicaba la aceptación de la existencia del infinito actual. Kronecker piensa que el conjunto de los números naturales no debe pensarse como existente totalmente (actu). Lo que existe es un primer elemento y una ley de formación (= añádase 1) para ir obteniendo la serie completa; pero jamás será posible construirlos todos o tenerlos todos a la vez. Una colección infinita, acabada, existente le parece a Kronecker una idea matemática ilícita. Las colecciones infinitas lo son apenas potencialmente. Es conocida su afirmación: "Dios creó los números naturales, el resto es obra del hombre". Con esto quería significar que en Matemática todo debería ser intuitivo y efectivamente construído por la mente del matemático, partiendo de los números naturales. Rechaza el método de reducción al absurdo y ataca a Cantor por sus trabajos sobre el infinito.

A comienzos de este siglo H. Poincaré defiende las tesis de K. aunque no es tan radical como éste. Se refiere a la teoría de conjuntos cantoriana como a una enfermedad de la que la Matemática debía curarse. En el fondo de este asunto está el problema de la "*existencia*" en Matemáticas. El axioma de elección garantizaba la existencia de objetos matemáticos (Vgr. clase infinita), sin decir como construirlos.

Quien llevó las tesis de K. al extremo de elaborar una nueva filosofía de la Matemática fue el geómetra holándes L. Brower. Las paradojas de la teoría de conjuntos son algo más que una mera dificultad pasajera en la teoría; es síntoma de un mal profundo. Para Brower el origen del problema está en la Lógica tradicional que permite trabajar con conjuntos finitos solamente, mientras que en Matemática se necesitan los conjuntos infinitos (potentia). Habrá, pues, una Matemática finistista y una Matemática infinitista aunque en realidad esta última sea inmanejable.

Otra idea en que insiste Brower, es que la Matemática no se compone de verdades eternas, relativas a objetos intemporales, metafísicos, semejantes a las ideas platónicas. La Matemática es una actividad socio-biológica destinada a satisfacer ciertas necesidades del hombre en relación con un medio. Es una actividad, no una doctrina. El matemático no descubre, crea. 'Existir' en Matemáticas significa haber sido construido por la mente humana. La Matemática para Brower no es verdadera en cualquier mundo posible. La negación de la existencia de totalidades matemáticas infinitas, la tesis de que la 'existencia matemática' es constructividad y la consiguiente negación del principio de tercero excluido, implican que la Lógica en que se enmarca la Matemática (la Lógica intuicionista) no es la Lógica elemental ordinaria; no es una lógica de funciones veritativas: La negación, conjunción, implicación, etc. . . son reinterpretadas (Cfr. Heyting).

Hay que reconocer, desde el punto de vista filosófico, la superioridad del intuicionismo sobre el logicismo. Cumple el programa que establece, sin recurrir a presupuestos excluídos por él mismo, utilizando en sus construcciones los principios de razonamiento descritos en su lógica intuicionista. El logicismo, al contrario, elimina de la Matemática toda presuposición no lógica o sintética, solo en teoría. Además, para los intuicionistas los axiomas y teoremas matemáticos no son lógicos en el sentido de Leibniz, es decir, verdaderos en todos los mundos posibles.

Pero el concepto de intuición matemática suscita de inmediato todas las dificultades planteadas por la concepción cartesiana del conocimiento intuitivo. ¿Cómo protegernos contra las intuiciones aparentes? ¿Cómo decidir entre intuiciones contrapuestas? Una objeción mayor a la filosofía intuicionista de la matemática es que sacrifica buena parte de la Matemática clásica. Por lo tanto, tampoco puede esta escuela ofrecernos una fundamentación definitiva de la Matemática. Hay muchas cuestiones abiertas e inexploradas especialmente en el campo de la verificabilidad y de la objetividad.

5. FORMALISMO DE HILBERT-EL METODO AXIOMATICO

Como los intuicionistas, los filósofos formalistas no creen que la Matemática pueda reducirse a la lógica, pues abarca proposiciones sintéticas que son descripciones verdaderas de situaciones perceptibles muy simples. Aceptan también la división de la Matemática clásica en Matemática "finitista" y Matemática "infinitista". Pero los formalistas no rechazan la Matemática infinitista, aceptándola en la medida en que no genere contradicciones al ser incorporada a la Matemática finitista. El creador y principal representante de esta escuela es el matemático alemán D. Hilbert. Otros grandes matemáticos han pertenecido a esta escuela como Bernays, Curry, Ackermann, Herbrand y el célebre grupo de matemáticos franceses conocidos bajo el pseudónimo de Nicolás Bourbaki. El formalismo nace de los éxitos alcanzados por el método axiomático, en el cual se dejan de lado los significados intuitivos de los conceptos primitivos, considerándoselos caracterizados por propiedades formales de la teoría. Sería bueno considerar la diferencia entre axiomática abstracta y axiomática material.

Ax. Material (Ax Peano)	Ax.abstracta
1) 0 es un número	0) , s, O, + ,
2) el sucesor de un número es un número	1) $0 \neq S(x)$ 2) $X \neq Y \quad S(x) \neq S(y)$
3) 0 no es sucesor de ningún número	3) $x + 0 = x$
4) números diferentes, tienen sucesores diferentes.	4) $x + S(y) = S(x + y)$
5) Ax. de inducción	5) $x \quad 0 = 0$ 6) $x.\, S(y) = x.y + x$ 7) $x = y \longrightarrow S(x) = S(y)$ 8) $[A(0) \wedge (vx) \quad Ax \Longrightarrow As(x)] \Longrightarrow (vx) \quad Ax$

El método axiomático ha sido de la mayor importancia y conduce a una economía del pensamiento. Un sistema axiomático puede tener varias interpretaciones, lo que permite estudiar varias teorías a la vez. El método axiomático tiene sus orígenes en Grecia: donde se halla representado en los Pitagóricos, en Aristóteles y Euclides primordialmente. Con la evolución de la Matemática, el método se hizo cada vez más riguroso, llegando a un alto grado de perfección lógica a finales del siglo pasado con Peano y su escuela y adquiere un estado casi definitivo con la obra de D. Hilbert *(Grundlagen der Geometrie, 1899)*. Actualmente el método axiomático es una técnica básica en el desarrollo de la Matemática.

La Escuela Formalista se proponía: 1) la 'formalización completa' de la Matemática, 2) la demostración de que el sistema formal resultante era 'formalmente consistente', 3) esta demostración debía hacerse por métodos finitistas, efectivos, constructivos. Formalizar una teoría significa, hacer explícitas todas sus afirmaciones y reglas de inferencia, considerando tan sólo su forma, al margen de cualquier contenido concreto. El procedimiento de formalización consta básicamente de un vocabulario formal, de reglas para la construcción de fórmulas bien formadas de un sistema finito de fórmulas bien formadas (axiomas) sobre las que se puedan efectuar transformaciones formales de acuerdo a reglas de inherencia (formal). Una teoría se halla completamente formalizada si y solo si cada axioma o teorema de la misma corresponde sin ambigüedad alguna a un axioma o teorema formal de su réplica formalizada, y viceversa. Una teoría connotada de sentido es consistente si y solo si no contiene dos teoremas uno de los cuales sea negación del otro. La consistencia de un sistema formal no se define así pues no contiene proposiciones y por lo mismo, tampoco, negaciones de proposiciones. Sin embargo, puede contener teoremas formales y sus negaciones formales lo que permitirá demostrar, que la teoría formal de proposiciones es formalmente consistente.

Hilbert pensaba que la Matemática Clásica, finitista e infinitista, podía ser completamente formalizada y que podía demostrarse que era formalmente consistente por métodos de razonamiento finitista. K. Gödel en un famoso artículo de 1931 (über formal unentscheidbare Sätze dar Principia Mathematica und verwandter Systeme) demuestra que tal cosa no es realizable. Muestra que si se extiende la Lógica elemental ordinaria hasta el punto de englobar la Aritmética de los números naturales, la teoría resultante no es formalizable completamente, ya que existirán teoremas de la teoría a los que no corresponde teorema alguno del sistema formal. Igualmente demostraba Gödel que la consistencia formal de un sistema formal no puede ser probada por métodos finitistas. Esto significó un rudo golpe al programa formalista.

No quiero referirme a los remedios sugeridos, quiero más bien, antes de terminar, referirme a otras ideas generales que guiaban esta corriente de pensamiento. Los formalistas no querían reducir la Matemática a la Lógica; más bien, habría que decir que buscan fundamentar ambas ciencias conjuntamente. Aunque considera, con los intuicionistas, que algunos principios de la Matemática tradicional no tienen contenido pleno, Hilbert opina que la teoría de conjuntos de Cantor debe subsistir. Igualmente los formalistas consideran a la Matemática como la ciencia de la estructura de los objetos; los números son las propiedades estructurales más simples y son a su vez objetos de nuevas propiedades que se pueden estudiar mediante un sistema de símbolos no interpretados, precisamente porque no representan objeto particular alguno. Lo que no significa que la Matemática sea un mero juego sin sentido.

Muchos de los conceptos que envuelven el infinito en Matemática son considerados por Hilbert no como 'reales' sino como 'ideales', pero sirven para simplificar y sistematizar las teorías y esto está permitido siempre que no conduzca a contradicciones. Para Hilbert 'existir' significa 'no-contradictorio'. Basta demostrar la consistencia de una teoría matemática para hacerla completamente lícita.

A Hilbert se debe, igualmente, la fundación de una nueva ciencia: la Metamatemática cuya tarea básica era demostrar la consistencia de las teorías matemáticas (ya sabemos hasta dónde es esto viable). Hay que notar además, que para el formalismo la 'verdad matemática' reside en la deducción lógica de un enunciado desde premisas fijadas arbitrariamente. Finalmente, para Hilbert, la Matemática no puede desarrollarse sin apelar a cierto tipo de evidencia, que no es de naturaleza lógica, sino más bien intuitiva. Pero la evidencia lógica es de la mayor importancia no solo para la Matemática sino para cualquier investigación.

A pesar de los grandes logros parciales obtenidos por esta Escuela, tampoco logra su propósito central de llegar a una fundamentación definitiva de la Matemática. Propósito que remite constantemente a nuevos problemas y abre la teoría Matemática a horizontes inalcanzables.

Un resultado parcial de este Examen de las corrientes más importantes de la Filosofía de los Matemáticos es que en la metateoría se juegan supuestas posiciones filosóficas muy conocidas. Esto se pone aún más de relieve al abordar el problema de la verdad Matemática.

El problema central de la filosofía de las Matemáticas es la definición de la verdad matemática. Si se quiere que la Matemática sea una ciencia debe consistir en proposiciones concernientes a algo y serán verdaderas si corresponden con los hechos. Qué sea ese algo y cuáles esos hechos, será objeto de otro trabajo.

BIBLIOGRAFIA

1. Actes dur Kiéme Congrés Internationel de Philosophie - Vol. V - Louvain Nauwelaerts - 1953.
2. Bochenski I.M: **Historia de la Lógica Formal,** Madrid, Gredos. 1966.
3. Brunschvicg Leon: **Les étapes de la Philosophie mathématique,** París, Alcan. 1912.
4. Cavaillés J: **Méthode axiomatique et formalisme ASI,** París, Hermann. 1938. **Logique et théorie de la science,** París, PUF. 1947.
5. Hasenjager G: **Grundbegriffe und Probleme der modernen Logik,** Freiburg-Munchen, K. Albert, 1962 (Hay versión Española en la Ed. Alianza).
6. Hilbert D. y W: Ackermann. **Elementos de lógica teórica.** Madrid, Tecnos. 1969.
7. Kneale W.C. y M: **El desarrollo de la lógica,** Madrid, Tecnos. 1966.
8. Korner S: **Introducción a la Filosofía de la Matemática,** México, Siglo XXI. 1969.
9. Koyré Alex: **Epiménide le menteur** *(Ensemble et catégorie).* París. Hermann. 1947.
10. Ladriére J: **Limitaciones internas de los formalismos,** Madrid, Tecnos. 1969.
11. Piaget J: y otros. **Logique et Connaissance Scientifique,** París, Gallimard. 1967.
12. Quine W.V.O: **El sentido de la nueva-lógica,** B,A. Nueva Visión. 1966.