LOS CONJUNTOS BORROSOS: UNA INTRODUCCION

Luisa L. Lazzari - Emilio A. M. Machado - Rodolfo H. Pérez

Este articulo esta destinado fundamentalmente a aquellos que se introducen en las metodologías borrosas y sus aplicaciones.

En la 1ra parte se intenta presentar las necesidades de las metodologías borrosas en el contexto actual y se da un resumen de las sucesivas etapas del desarrollo de la lógica borrosa.

En la 2da parte, que se inicia con la noción de pertenencia, se exponen los conceptos de conjunto borroso y número borroso.

0 - INTRODUCCION

El mundo actual es incierto e impreciso, los actos de los hombres y las relaciones entre ellos están afectados de vaguedad, es por esto que la realidad no puede estudiarse en términos absolutos con técnicas aplicables a situaciones ciertas ni aun aleatorias; que, en la búsqueda de la precisión, intentan ajustar el mundo real a modelos matemáticos rígidos y estáticos, perdiendo con ello información valiosa.

En efecto, muchas propiedades atribuidas a los objetos de la ciencia y de la vida cotidiana son imprecisas. Por ejemplo, el predicado “pequeño” se utiliza en ámbitos de discurso muy diferentes: el departamento es “pequeño”, el presupuesto es “pequeño”, la empresa es “pequeña”, etc. Las afirmaciones del tipo “x es pequeño” brindan información si se conoce el ámbito del discurso. La propiedad reflejada por el predicado “pequeño” es imprecisa, es decir, las afirmaciones del tipo “x es pequeño” no son únicamente verdaderas o falsas, sino que admiten grados diversos de verdad y falsedad.

Un predicado nítido es el nombre de una propiedad precisa de los elementos de un conjunto, de manera que cada elemento la verifica o no. Por ejemplo, en el conjunto de los números enteros positivos el predicado **impar** es nítido.

Pero los discursos ordinarios están plagados de predicados vagos, continuamente nos encontramos con propiedades imprecisas y una "lógica" que pretenda tratar con los razonamientos que usualmente hacen las personas ha de poder operar con tales predicados. Ello no es posible con la lógica clásica (evolucionada desde las ideas de George Boole), ni utilizando la teoría usual de conjuntos basada en esa lógica.

Podrá decirse que hay casos en que un predicado vago puede sustituirse por uno nítido, pero ello en general obliga a forzar el discurso con una sintaxis que puede ser inadecuada a su semántica. Por ejemplo, el predicado vago "x es una persona alta" podría sustituirse por "x mide más de 1,80m", pero entonces ¿qué decir de una persona de 1,79m de altura y otra de 1,95? El lenguaje ordinario ha resuelto este problema con flexibilidad, sin usar clasificaciones en que el salto de una clase a otra es abrupto; adoptando clases sin bordes nítidos que no son asimilables a conjuntos clásicos. El lenguaje usa nombres para designar a clases borrosas, a las que los objetos pertenecen con un cierto grado, de manera que el paso de una clase a otra es suave; esto que significa que un mismo objeto pertenece a varias clases con distinto grado de pertenencia a cada una de ellas.

Los predicados nítidos P o las propiedades precisas p permiten clasificar los objetos de su ámbito de discurso en dos conjuntos nítidamente diferenciados: el de los que verifican la propiedad p o hacen la correspondiente afirmación "x es P" verdadera y el de los que no verifican la propiedad p o hacen "x es P" falsa. En cambio un predicado vago o la correspondiente propiedad imprecisa p no clasifican en dos clases a los objetos del ámbito del discurso.
"Casi toda la lógica del razonamiento humano no es la lógica clásica de dos valores, o incluso de varios valores, sino una lógica de verdades borrosas, de conjunciones borrosas, de reglas de deducción borrosas" (Zadeh, 1977).

El problema de la vaguedad fue poco considerado por los lógicos, exceptuando algunos intentos, como el de B. Russell en los años veinte, que lo reconoció como un problema importante. El primero que lo aborda es Lotfi A. Zadeh en el año 1965, en su artículo "Fuzzy sets". Ingeniero eléctrico, doctorado en la Universidad de Columbia, (Nueva York, 1949), cuando escribió el artículo era conocido por sus investigaciones en teoría del control dentro de la tradición metodológica de la Cibernética y profesor en la Universidad de California de Berkeley desde 1959. Zadeh arribó a la conclusión de que en el estudio de los sistemas complejos llega un momento en el cual la precisión choca con la significatividad: a más, precisión menos significatividad. Zadeh ha escrito que "la teoría de los subconjuntos borrosos es, de hecho, un paso hacia un acercamiento entre la precisión de la matemática clásica y la sutil imprecisión del mundo real, un acercamiento nacido de la incesante búsqueda humana por lograr una mejor comprensión de los procesos mentales y del conocimiento". Desde entonces se ha asociado a los términos "lógica borrosa" cualquier sistema matemático que se base en los conjuntos borrosos.

Zadeh amplió la teoría clásica de conjuntos para poder operar con clases definidas por predicados vagos y logró esa ampliación generalizando el concepto de pertenencia a un conjunto A para el que sólo existían, a ese momento, dos posibilidades: x pertenece a A o x no pertenece a A, que expresado mediante la función característica o de elección de Boole se representa por $\mu_A(x) = 1$ o $\mu_A(x) = 0$, respectivamente. Zadeh introdujo la idea de los **conjuntos borrosos** $\tilde{A}$, caracterizados por funciones características generalizadas o funciones de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}$, cuyos valores no son sólo los números 0 y 1, sino todos los números entre 0 y 1; la pertenencia dejó de ser abrupta para ser graduada.

El cálculo de Zadeh facilitó una vía para representar y gestionar el razonamiento con predicados vagos, un cálculo que contiene como caso particular el cálculo con predicados nítidos, los cuales definen conjuntos clásicos. Un conjunto borroso deviene clásico cuando su función de pertenencia toma únicamente los valores 0 y 1; de esta manera el cálculo lógico clásico queda englobado en el cálculo lógico borroso, que resulta más general, y la nitidez o la precisión aparecen como un caso límite de la vaguedad o imprecisión. Es decir, con el punto de vista aportado por Zadeh, lo normal es la imprecisión y lo extraordinario la precisión, a la que no es fácil llegar sin perder riqueza conceptual.

Al aportar modelos matemáticos flexibles, dependientes del contexto, es decir, del ámbito en cuestión y del discurso a realizar sobre el mismo, el modelo de Zadeh ha resultado tecnológicamente importante. Por ejemplo, las reglas de tipo "Si x es P, entonces y es Q" pueden representarse usando funciones de pertenencia. Una regla resulta ser un conjunto borroso y una familia de reglas es una colección de conjuntos borrosos a los que se les puede aplicar los cálculos permitidos por la teoría. Si un sistema físico tiene un comportamiento que puede describirse por reglas del tipo "Si ..., entonces ..." (como un aparato de refrigeración o un péndulo invertido) su control puede efectuarse, con técnicas adecuadas, por medio de la teoría de Zadeh. Las técnicas de control borroso mediante reglas empíricas resultan muy útiles en los casos en los que la representación de un sistema dinámico lleva a un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales cuya computación es costosa y sensible a pequeños errores. En sus formas más simples esas reglas son del tipo "**Si x es P, entonces y es Q**", donde **x** es una variable en cierto ámbito e **y** lo es en otro, mientras que P y Q son predicados vagos sobre esos respectivos ámbitos. Por ejemplo, para regular los acondicionadores de aire se usan reglas como: "Si la temperatura es muy baja, entonces la velocidad del ventilador debe reducirse considerablemente", donde "muy baja" y "considerablemente" son predicados graduados.

Este nuevo punto de vista choca con muchos siglos de tradición cultural y costó años que los científicos aceptaran que era un primer intento de hacer un estudio científico del campo de la vaguedad, permitiendo modelizar conceptos del lenguaje ordinario que no se habían podido considerar anteriormente. Tal vez la mayor dificultad estaba vinculada con el significado de grado de cumplimiento de una regla de tipo "Si ..., entonces...". Hasta fines de los años veinte las reglas se entendían como de obligado cumplimiento; como por ejemplo "Si n es un número natural, entonces 2n+1 es impar" sólo podía ser verdadera o falsa. Con los estudios estadísticos de las ciencias actuariales y por la generalización de los seguros, reglas inciertas como "Si x es varón y tiene cincuenta años, entonces vivirá veinticinco años más" pasaron a ser de uso común. Esas reglas se refieren a sucesos inciertos que en determinado momento dejan de serlo, por lo que al momento de ser enunciadas no son ni verdaderas ni falsas: hay que agregarles, por ejemplo, "con una probabilidad del 70%". Aparecen, entonces, reglas que pueden ser calificadas de otra forma. En términos de probabilidades, la regla puede enunciarse: "Si x es varón y tiene cincuenta años, entonces vivirá veinticinco años más, con una probabilidad del 70%". Los problemas que se pueden modelizar por medio del cálculo de probabilidades son problemas que se refieren a experimentos de resultado preciso pero incierto; en cambio, hay otros problemas que involucran el fenómeno de la imprecisión. La probabilidad se refiere a preguntas que en algún momento tendrán una respuesta nítida: “sí” o “no”, mientras que la imprecisión se refiere a afirmaciones significativas e informativas de las que no se puede decir que sean verdaderas o falsas, sino que tienen un grado de verdad. Se trata de afirmaciones del lenguaje cotidiano, indispensables para “dialogar”, **ya que su flexibilidad, sus matices, permiten una interrelación entre los discursos de las personas**.

Un predicado vago o impreciso admite modificadores lingüísticos, lo que no sucede con un predicado nítido; por ejemplo, en el contexto de una conversación, tiene sentido hablar de “demanda muy pequeña”, pero no lo tiene decir que un número es “muy impar”, ya que un número es impar o no lo es.

El origen de las aplicaciones de la lógica fuzzy son los trabajos realizados por Ebrahim Mamdani en el Queen Mary College de la Universidad de Londres, en 1973. Con su estudiante de doctorado Sedrak Assilian, obtuvo un controlador para un motor a vapor que es el antecedente de todas las aplicaciones posteriores y que funcionó gracias a 24 reglas del tipo “Si ... , entonces ... ”, que contenían la experiencia de los mejores operadores humanos. El controlador agregaba las reglas y por un procedimiento de “desborrosificación” daba un número, una orden nítida, que era la cantidad de calor necesaria. Enviando muchísimas de tales ordenes por segundo, podía regular perfectamente el funcionamiento del motor y probó ser mejor que los sistemas convencionales de control.

En Japón, desde 1988, se produjo un verdadero *boom* de la lógica borrosa, no sólo por los trabajos de Michio Sugeno y de otros científicos e ingenieros japoneses, sino también por la confianza e interés de las empresas en la emergente tecnología *fuzzy*. En la obra del japonés Michio Sugeno se mezclan sofisticados trabajos matemáticos con aplicaciones reales de gran importancia; sus aplicaciones han permitido hablar de “ingeniería *fuzzy*”, además de lógica y tecnología *fuzzy*. La primera de sus aplicaciones, el control de una planta purificadora de agua, fue realizada entre 1980 y 1983 para la compañía Fuji Electric; la segunda: un automóvil en miniatura guiado por instrucciones orales. Entre 1987 y 1989, Sugeno desarrolló con la compañía Matsushita Panasonic, el primer producto mundial de consumo con la etiqueta *fuzzy logic*: la "unidad suministradora de agua caliente": se trata de un aparato que regula la temperatura del agua de una canilla. Finalmente, entre 1989 y 1995, Sugeno y sus colaboradores desarrollaron un pequeño helicóptero controlado por radio, a distancia y por instrucciones muy simples de la voz humana (del tipo "despega", "aterriza", "vuela en línea recta", etc.) tratadas por inferencia con reglas representadas mediante la lógica borrosa y redes neuronales (proyecto T que fue financiado por el Ministerio Japonés de Transportes).

A partir de los trabajos de Sugeno se evidencia que la confluencia de técnicas borrosas con las neuronales, las probabilísticas y otras como los algoritmos genéticos, están generando el nuevo campo de la Computación flexible (Soft-Computing) que parece prometer una mayor utilidad para enfrentarse con los razonamientos de sentido común y lograr que las máquinas razonen como lo hacen las personas.

Se utiliza metodología borrosa, además, para describir y resolver problemas de gestión, economía, lingüística, medicina, ciencias políticas, y biología. Diversas empresas fabrican aparatos, dotados de un control más preciso como, por ejemplo lavarropas, cámaras fotográficas, videocámaras, aspiradoras, hornos a microondas y hasta ascensores basados en la lógica borrosa.

Lo que se busca a través de la metodología borrosa es describir y formalizar la realidad empleando modelos flexibles que interpreten las leyes que rigen el comportamiento humano y las relaciones entre los hombres.

1 - REVISION DE LA NOCION DE PERTENENCIA

Al considerar un conjunto A, habitualmente "**x es un elemento de A**" o bien "**x pertenece a A**" se indica "**x** $\in$ **A**". Si todo elemento de A pertenece al conjunto E, se dice que A está **incluido** en E o que A es un **subconjunto** de E. Simbólicamente $A \subset E$. E se denomina conjunto referencial o universal.

Al conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto dado E se lo denomina conjunto de partes o conjunto potencia y se lo indica $\wp(E)$.

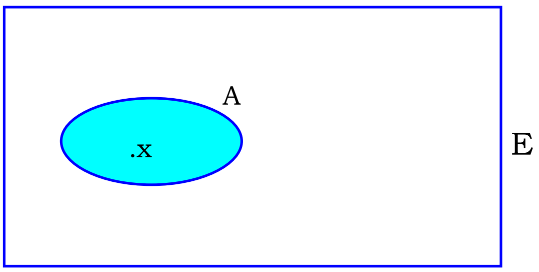
La cantidad de elementos de un conjunto se llama cardinal del conjunto. Si el cardinal de E es n , el cardinal de $\wp(E)$ es 2^n .
Simbólicamente: $\#E = n \Rightarrow \#\wp(E) = 2^n$.

Con el objeto de generalizar la pertenencia se introduce la "función característica μ_A" definida de la siguiente manera:

$$\mu_A : E \to \{0 , 1\} \ / \ \begin{cases} \mu_A(x) = 1 & x \in A \\ \mu_A(x) = 0 & x \notin A \end{cases}$$

Es decir que $\mu_A(x) = 1$ indica que x pertenece al conjunto A y $\mu_A(x) = 0$ significa que x no pertenece al conjunto A. $\mu_A(x)$ es el grado de pertenencia.

La representación mediante diagrama de Venn es:



Ejemplo 1: Sea $E = \{a , e , i , o , u\}$ y $A = \{e , o , u\}$

Entonces podemos escribir $\mu_A(a) = 0$, $\mu_A(e) = 1$, $\mu_A(i) = 0$, $\mu_A(o) = 1$ y $\mu_A(u) = 1$

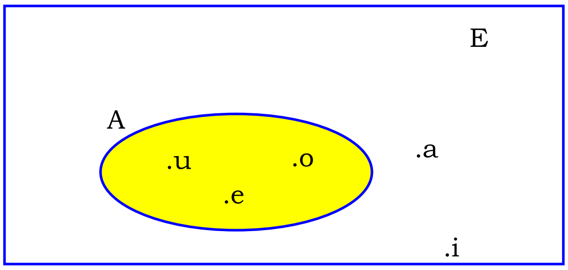
Esto nos permite expresar el conjunto A de una forma diferente, en la cual figuran todos los elementos del referencial con sus respectivos grados de pertenencia:

$$A = \{(a/0) , (e/1) , (i/0) , (o/1) , (u/1)\}$$

El conjunto referencial o universal puede representarse con esta notación, asignando 1 a la función característica de todos sus elementos.

$$E = \{(a/1) , (e/1) , (i/1) , (o/1) , (u/1)\}$$

Representando mediante diagramas de Venn:



Se define conjunto vacío, y se lo simboliza $\varnothing$, como el conjunto nítido tal que $\mu_\varnothing(x) = 0 \ \ \forall x \in E$.

Para separar los elementos en cada par ordenado puede utilizarse una coma (,) o bien una barra (/).

Podemos expresar las operaciones definidas entre conjuntos nítidos, utilizando la función característica de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mu_{A\cup B}(x) = \text{máx}\{\mu_A(x) , \mu_B(x)\} \\ \mu_{A\cap B}(x) = \text{mín}\ \{\mu_A(x) , \mu_B(x)\} \\ \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \end{array}}$$

2 - LOS CONJUNTOS BORROSOS

Supongamos que de un conjunto de inversiones queremos distinguir el subconjunto de inversiones altamente redituables, o que de un conjunto de decisiones tomadas deseamos dar el subconjunto de las decisiones acertadas, o del conjunto de sus libros quira formar el subconjunto de los muy interesantes. ¡Qué difícil! ¿Verdad? Los predicados "altamente redituable", "decisiones acertadas" o "libros muy interesantes" son vagos, difusos, borrosos, subjetivos. No hay duda de que su significado dependerá no sólo del individuo, sino también del momento en que sean considerados. Además, no será posible particionar con ellos el conjunto referencial en dos: separar los que los cumplen de los que no los cumplen Pero esto no quita el hecho de que al utilizar a diario los llamados predicados vagos se está dando información muy importante para la toma de decisión. Veamos un ejemplo: si una señorita le cuenta a su madre cómo es su novio utilizando los predicados clásicos "vive en Capital Federal", "es estudiante universitario" y "mayor de edad", no le está dando demasiada información, en cambio si usa los predicados imprecisos "es joven", "de buena familia", "es buenísimo", "tiene un importante puesto de trabajo", la madre se quedará tranquila.

“El fenómeno de la vaguedad invade el razonamiento ordinario basado en conocimientos comune. Porque el discurso ordinario está lleno de predicados que no clasifican perfectamente el correspondiente universo de objetos en cuestión; de predicados con tales matices de significado que a menudo se entrecruza lo afirmado con lo negado para abrir nuevos espacios al debate y a la discusión enriquecedora; de predicados **vagos** no siempre precisables que pierden matices e informatividad cuando se intenta ceñirlos arbitrariamente” (*Introducción a la lógica borrosa*, Trillas, Alsina y Terricabras,Editorial Ariel, Barcelona 1995).

En este tipo de predicados la pertenencia a un conjunto es cuestión de grados entre el “pertenece” y “no pertenece”, entre “verdadero” y “falso”, son los grises situados entre el blanco y el negro.

Generalizamos entonces la función característica, de modo tal que pueda tomar cualquier valor real del intervalo [0 , 1].

Sea E un conjunto continuo o discreto, se llama **subconjunto borroso** de E (en inglés *fuzzy set*) a todo conjunto de pares ordenados

$$\tilde{A} = \left\{ \left(x \,/\, \mu_{\tilde{A}}(x) \right),\ \forall x \in E \right\}$$

$\mu_{\tilde{A}} : E \to [0,1]$ es la función característica de pertenencia.

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ es el grado o nivel de pertenencia de x a E.

La notación que emplearemos en adelante para distinguir un conjunto borroso de uno nítido es el símbolo ~ colocado sobre la letra que indica el conjunto.

Ejemplo 2: Sea un conjunto de inversiones E = {a, b, c, d, e, f}
Tales que a: bonex, b: acciones, c: fondo de inversión, d: plazos fijos, e: bonos Brady, f: otros activos.

En un determinado período a resultó una muy buena inversión, b mala, c ni buena ni mala, d muy redituable, e bastante buena y f bastante mala.

Podemos definir en el conjunto de inversiones E, el siguiente subconjunto borroso:

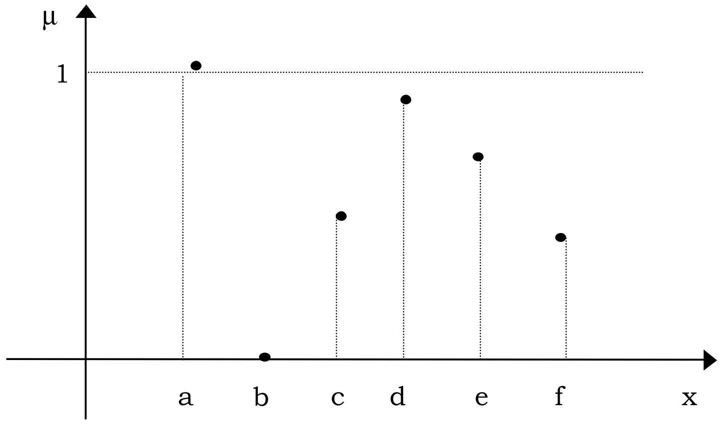
$$\tilde{A} = \{(a/1), (b/0), (c/.5), (d/.9), (e/.7), (f/.4)\}$$

Debe quedar claro que $\tilde{A}$ podrá ser diferente en otro momento, o bien si las inversiones de E son analizadas por otra persona. Es decir, no hay unicidad para un subconjunto borroso, no se asuste, en la realidad tampoco existe unicidad ¿o siempre coincide con su agente de bolsa?

El conjunto $\tilde{A}$, o cualquier conjunto *fuzzy* incluido en un referencial finito, también puede expresarse de la siguiente manera:

x	a	b	c	d	e	f
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	1	0	.5	.9	.7	.4

Gráficamente podremos representarlo del siguiente modo:

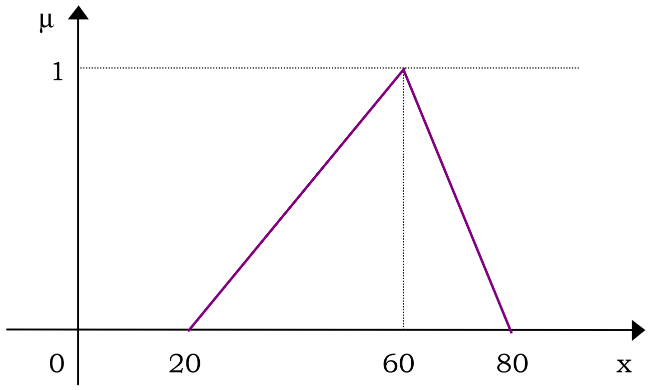


Se llama **soporte** de un subconjunto borroso $\tilde{A}$ de E al conjunto nítido que contiene todos los elementos del referencial cuya función de pertenencia es no nula.

$S(\tilde{A}) = \{x /\ x \in E \wedge \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ en el ejemplo anterior. $S(\tilde{A}) = \{a, c, d, e, f\}$

Si el conjunto referencial es infinito el subconjunto borroso se expresa por medio de su función de pertenencia.

Ejemplo 3: Se sabe que el costo de un artículo no será inferior a \$20, ni superior a \$80 y que lo más posible es que sea de \$60. Esta situación puede ser representada por el subconjunto borroso triangular siguiente:

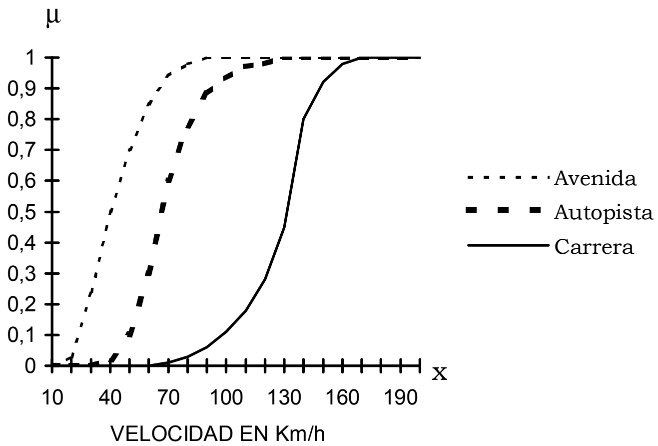


El conjunto $\tilde{C}$ representa el costo del artículo considerado. Su función de pertenencia es

$\forall$ x $\in$ $\Re$ (conjunto referencial de los números reales):

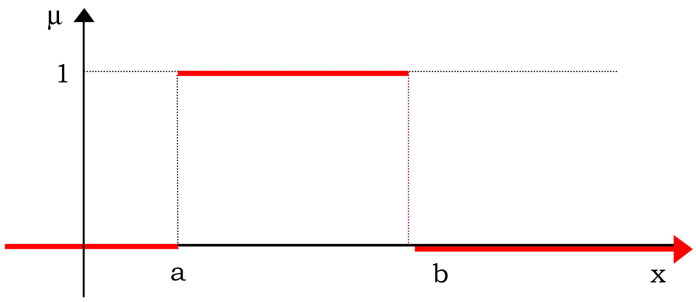
$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 20 \\ \dfrac{x}{40} - \dfrac{1}{2} & \text{si } 20 \leq x \leq 60 \\ -\dfrac{x}{20} + 4 & \text{si } 60 \leq x \leq 80 \\ 0 & \text{si } x > 80 \end{cases}$$

Ejemplo 4: La definición de un subconjunto borroso depende de la situación que se considere; veamos este ejemplo sobre una idea extraída de Tanaka (1997): Cuando uno piensa en la velocidad de un auto, la interpretación de cuán "rápido" el auto está circulando difiere según se considere el tránsito en una avenida, en una autopista o bien en un circuito de carrera. La siguiente figura muestra las funciones de pertenencia correpondientes a cada uno de los casos mencionados para el subconjunto borroso de $\Re$ que podemos llamar "velocidad de circulación rápida". Podemos ver que 60km/h es considerada una velocidad rápida para una avenida pero no lo es para una autopista y menos aun para un circuito de carrera.



Otro ejemplo similar al de la velocidad es el subconjunto de personas "altas", ya que la función de pertenencia será diferente si se la realiza para referirse a conjuntos de individuos de diferentes pueblos, como por ejemplo Japón, Alemania o Argentina, o de diferentes edades -niños, jóvenes o adultos-, o bien si se refiere a los jugadores de diferentes deportes como fútbol, volley o basquet.

Los subconjuntos nítidos pueden expresarse como un caso particular de subconjunto borroso: consideremos como ejemplo el caso de un intervalo cerrado de números reales $\tilde{F} = [a, b]$



$\tilde{F} = [a, b]$

2 - 1 - IGUALDAD E INCLUSION DE SUBCONJUNTOS BORROSOS

Sean $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ dos subconjuntos borrosos de un mismo universal E.

- **Igualdad:** $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son iguales si y sólo si los valores de sus funciones de pertenencia son idénticos (toman los mismos valores para todo x perteneciente a E).

$$\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \forall x \in E : \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$$

- **Inclusión:** $\tilde{A}$ está incluido en $\tilde{B}$ o $\tilde{A}$ es un subconjunto de $\tilde{B}$ si y sólo si todos los valores de la función de pertenencia de $\tilde{A}$ son respectivamente menores o iguales que los correspondientes de $\tilde{B}$.

$$\tilde{A} \subset \tilde{B} \Leftrightarrow \forall x \in E : \mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{B}}(x)$$

2 - 2 - OPERACIONES CON SUBCONJUNTOS BORROSOS

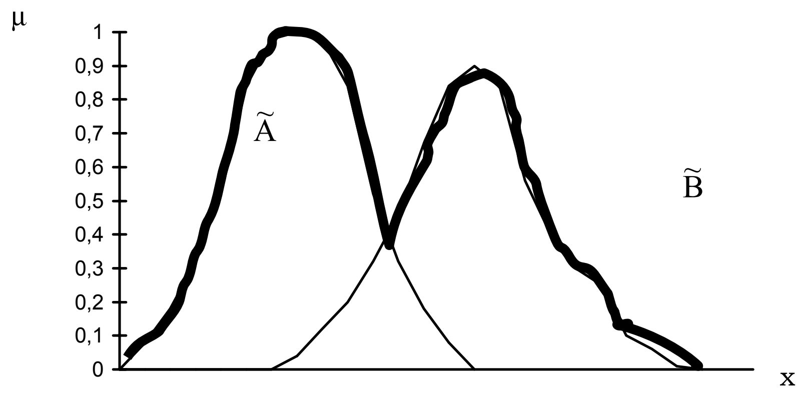
Con los subconjuntos borrosos pueden definirse las mismas operaciones que con los nítidos y aun más. Daremos aquí las definiciones de las llamadas operaciones fundamentales, utilizando las mismas definiciones que para los conjuntos nítidos generalizadas.

Dados dos subconjuntos borrosos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ de un mismo universal E

Unión: $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ es el subconjunto borroso de E cuya función de pertenencia es

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max \{\mu_{\tilde{A}}(x)\ ,\ \mu_{\tilde{B}}(x)\} \qquad \forall\, x \in E$$

Gráficamente:

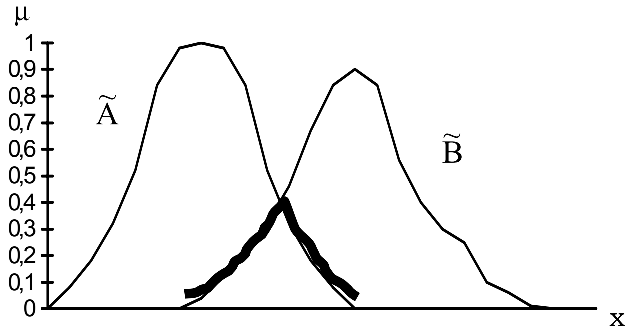


$\tilde{A} \cup \tilde{B}$

Intersección: $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ es el subconjunto borroso de E cuya función de pertenencia es

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min \{\mu_{\tilde{A}}(x)\ ,\ \mu_{\tilde{B}}(x)\} \qquad \forall\, x \in E$$

Gráficamente:



$\tilde{A} \cap \tilde{B}$

- **Complemento:** $\overline{\tilde{A}}$ es el subconjunto borroso de E cuya función de pertenencia es

$$\mu_{\overline{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \qquad \forall\, x \in E$$

Ejemplo 5: Sea el conjunto referencial E = {a , e , i , o , u} y los subconjuntos borrosos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$, tales que los valores de sus funciones de pertenencia son:

x	a	b	c	d	e
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	1	0	.5	.9	.7
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	.8	.6	.2	1	.8

Los valores de las funciones de pertenencia de $\tilde{A} \cup \tilde{B}$, $\tilde{A} \cap \tilde{B}$, $\overline{\tilde{A}}$, $\overline{\tilde{B}}$, $\tilde{A} \cup \overline{\tilde{A}}$ y $\tilde{A} \cap \overline{\tilde{A}}$ son respectivamente:

$$\overline{\widetilde{A}}$$

x	a	e	i	o	u
$\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x)$	1	.6	.5	1	.8
$\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x)$	.8	0	.2	.9	.7
$\mu_{\overline{\widetilde{B}}}(x)$	.2	.4	1	0	.2
$\mu_{\widetilde{A}}(x)$	1	0	.5	.9	.7
$\mu_{\overline{\widetilde{A}}}(x)$	0	1	.5	.1	.3
$\mu_{\widetilde{A}\cup\overline{\widetilde{A}}}(x)$	1	1	.5	.9	.7
$\mu_{\widetilde{A}\cap\overline{\widetilde{A}}}(x)$	0	0	.5	.1	.3

Es evidente que no se verifica la ley del tercero excluido, ya que en ese caso deberían ser iguales a 1 todos los valores de la función de pertenencia de $\widetilde{A}\cup\overline{\widetilde{A}}$ y tampoco se verifica la ley de contradicción porque deberían ser iguales a cero todos los valores de la función de pertenencia de $\widetilde{A}\cap\overline{\widetilde{A}}$. Estas propiedades, que siempre se cumplen para los conjuntos nítidos, en general **no se verifican para los subconjuntos borrosos**, es por ello que los subconjuntos borrosos no forman un álgebra de Boole.

2 - 3 - SUBCONJUNTO NITIDO DE NIVEL α O α-CORTE

Veremos la relación entre un subconjunto borroso y uno nítido. Consideremos un subconjunto borroso $\widetilde{A}$ del referencial E, se llama subconjunto nítido de nivel α al siguiente subconjunto de E:

$$A_\alpha = \{x \in E \ / \ \mu_{\widetilde{A}}(x) \ \geq \ \alpha\} \ \text{ para todo } \alpha \in (0\ ,\ 1]$$

A_α también es llamado α-corte o conjunto de nivel α de $\widetilde{A}$.
Algunos autores lo llaman α-corte débil, definiendo α-corte fuerte al subconjunto

$$A_{\alpha+} = \{x \in E \ / \ \mu_{\widetilde{A}}(x) > \alpha\} \ \text{ para } \alpha \in [0\ ,\ 1)$$

En realidad, la dificultad se presenta en el caso que $\alpha = 0$, ya que con la definición débil $A_0 = E$, puesto que para todo x perteneciente a E $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0$ y no aporta información alguna.

La importancia de los α-cortes radica en la posibilidad de expresar cualquier subconjunto borroso mediante sus α-cortes. George J. Klir dice al respecto "they can be viewed as a bridge by which fuzzy sets and crisp sets are connected".

Ejemplo 6: Consideremos el subconjunto borroso $\tilde{A}$ del referencial E = {a, b, c, d, e}

x	a	b	c	d	e	f
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	1	0	.5	.9	.2	.4

$A_{.1}$ = {a , c , d . e . f} $A_{.3}$ = {a , c , d , f} $A_{.5}$ = {a , c , d}

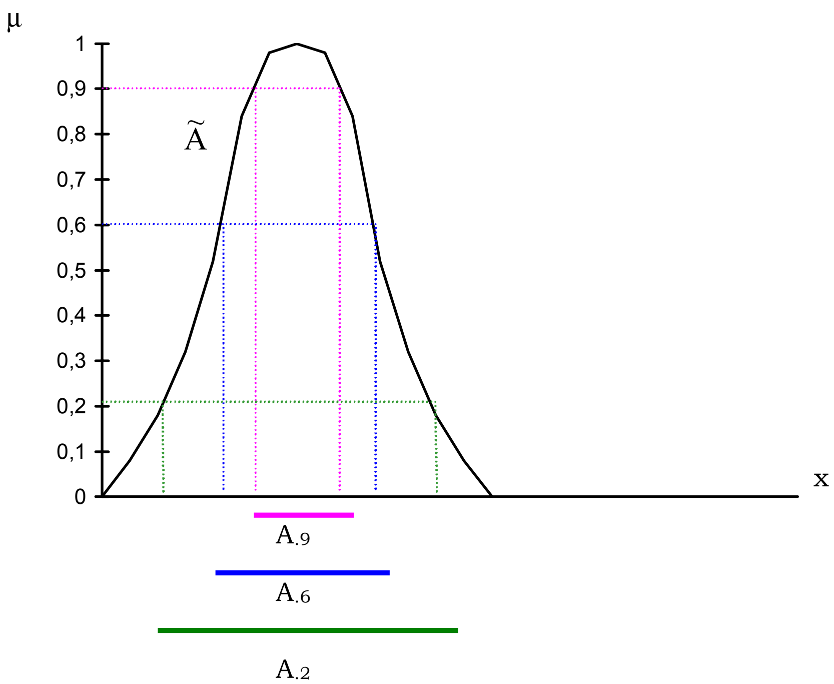
$A_{.8}$ = {a , d} $A_{.9}$ = {a , d} A_1 ={a}

Se observa que si 1 > .9 > .8 > .5 > .3 > 1, entonces, $A_1 \subset A_{.9} \subset A_{.8} \subset A_{.5} \subset A_{.3} \subset A_{.1}$

Se puede demostrar que:

$$\forall\ \alpha_1 , \alpha_2 \in (0 , 1] : \alpha_2 \geq \alpha_1 \Rightarrow A_{\alpha_2} \subseteq A_{\alpha_1}$$

También se pueden obtener los α-cortes en el caso en que la función de pertenencia sea continua, o sea para un subconjunto borroso de $\Re$; lo veremos gráficamente mediante el siguiente ejemplo:



Se observa que: $A_{.9} \subseteq A_{.6} \subseteq A_{.2}$

2 - 4 - TEOREMA DE DESCOMPOSICION

La representación de un subconjunto borroso por sus α-cortes fue introducida por Zadeh en 1971 con el teorema de descomposición:

Todo subconjunto borroso $\tilde{A}$ de E puede descomponerse del siguiente modo:

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha . A_{\alpha}$$

Ejemplo 7. Sea el subconjunto borroso $\tilde{A}$ = {(a/.3) , (b/1) , (c/.6) , (d/.2) , (e/.9)} y sus α-cortes

$A_{.2}$ = {(a/1) , (b/1) , (c/1) , (d/1) , (e/1)}
$A_{.3}$ = {(a/1) , (b/1) , (c/1) , (d/0) , (e/1)}
$A_{.6}$ = {(a/0) , (b/1) , (c/1) , (d/0) , (e/1)}
$A_{.9}$ = {(a/0) , (b/1) , (c/0) , (d/0) , (e/1)}
A_1 = {(a/0) , (b/1) , (c/0) , (d/0) , (e/0)}

0,2 . $A_{.2}$ = {(a/.2) , (b/.2) , (c/.2) , (d/.2) , (e/.2)}
0,3 . $A_{.3}$ = {(a/.3) , (b/.3) , (c/.3) , (d/0) , (e/.3)}
0,6 . $A_{.6}$ = {(a/0) , (b/.6) , (c/.6) , (d/0) , (e/.6)}
0,9 . $A_{.6}$ = {(a/0) , (b/.9) , (c/0) , (d/0) , (e/.9)}
1 . A_1 = {(a/0) , (b/1) , (c/0) , (d/0) , (e/0)}

Es fácil ver que $\widetilde{A}$ puede expresarse como la unión borrosa de los subconjuntos obtenidos

$$\widetilde{A} = (0{,}2 \, . \, A_{.2}) \cup (0{,}3 \, . \, A_{.3}) \cup (0{,}6 \, . A_{.6}) \cup (0{,}9 \, . \, A_{.9}) \cup (1 \, . \, A_1)$$

2 - 5 - CARDINAL DE UN SUBCONJUNTO BORROSO

Sea E un conjunto finito, se define **cardinal del subconjunto borroso** $\widetilde{A}$ de E

$$|\widetilde{A}| = \sum_{x \in E} \mu_{\widetilde{A}}(x)$$

Cardinal relativo de $\widetilde{A}$:

$$\|\widetilde{A}\| = \frac{|\widetilde{A}|}{|E|}$$, tal que $|\widetilde{A}|$ es el cardinal de $\widetilde{A}$ y $|E|$ es el cardinal de E o sea el número de elementos de E.

2 - 6 - SUBCONJUNTO BORROSO NORMAL

El subconjunto borroso $\tilde{A}$ de E es **normal** si y sólo si para todo x perteneciente a E

$$\max \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

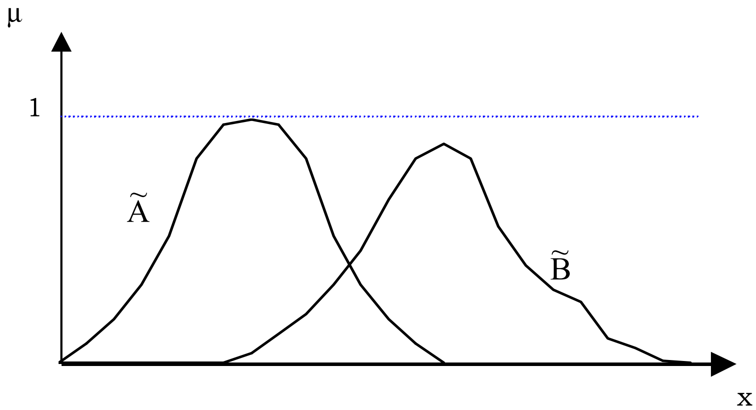
Ejemplo 8. Sean $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ subconjuntos borrosos de E (dado en el ejemplo 9)

x	a	b	c	d	e	f
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	.7	0	.1	.9	.2	.4
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	1	.3	.5	1	.7	.8

$\tilde{B}$ es un subconjunto normal de E y $\tilde{A}$ no lo es.

El cardinal de $\tilde{A}$ es $|\tilde{A}|$ = .7 + 0 + .1 + .9 + .2 + .4 = 2.3

Ejemplo 9. Podemos observar los gráficos de las funciones de pertenencia de dos subconjuntos borrosos de $\Re$: $\tilde{A}$ es normal y $\tilde{B}$ no.



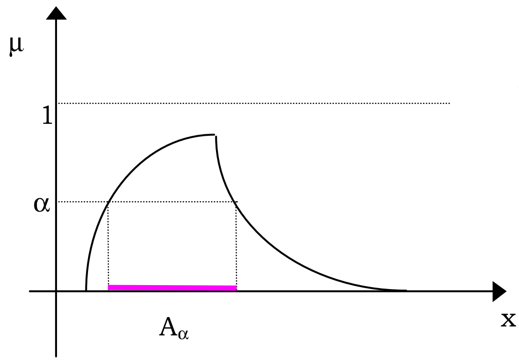
2 - 7 - SUBCONJUNTO BORROSO CONVEXO

El concepto de subconjunto borroso convexo puede considerarse como una generalización del concepto de conjunto nítido convexo. Un subconjunto borroso $\widetilde{A}$ de $\Re$ es convexo si y sólo si para todo $\alpha \in (0,1]$ todo α-corte es un intervalo cerrado de $\Re$ (o sea es un subconjunto convexo de números reales).

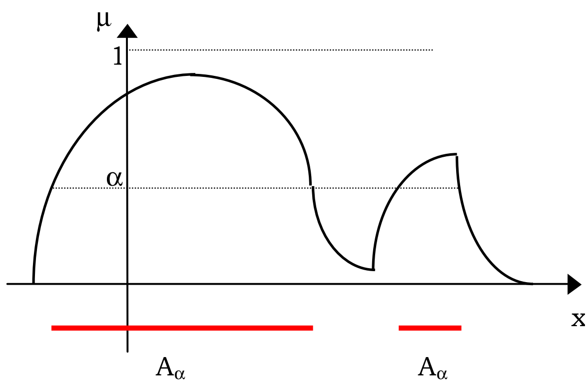
Un subconjunto borroso convexo también puede definirse del siguiente modo (Tanaka, 1997):

$\widetilde{A}$ es convexo $\Leftrightarrow$ $\forall$ x $\in$ $[x_1 , x_2] \subset \Re$ se verifica: $\mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \min \{\mu_{\widetilde{A}}(x_1) , \mu_{\widetilde{A}}(x_2)\}$

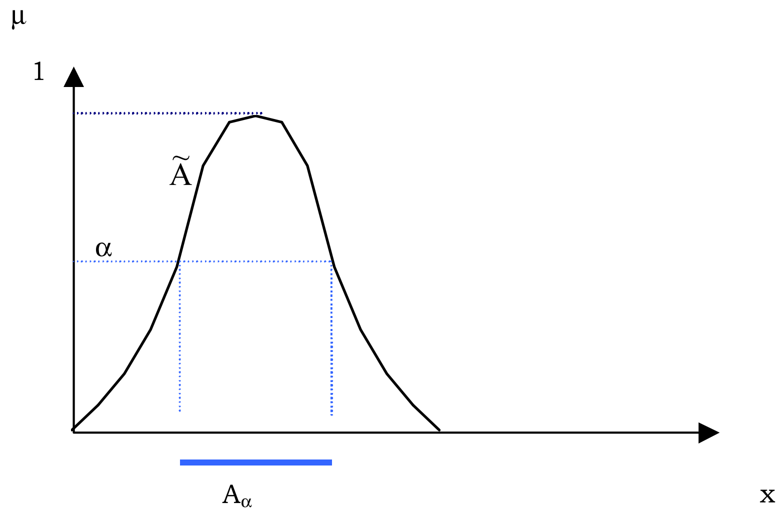
Ejemplo 10.



subconjunto borroso convexo



subconjunto borroso no convexo



subconjunto borroso
convexo y normal

3 - NUMEROS BORROSOS

Un número borroso es un subconjunto borroso de los números reales, **convexo y normal**.

Se puede definir un número borroso (fuzzy number) en cualquier conjunto referencial totalmente ordenado, como por ejemplo $\Re$ (números reales), $\Re^+$ (números reales positivos) , Z (números enteros) o N (números naturales).

Ejemplo 11. En Z definimos el número borroso $\tilde{A}$: "aproximadamente 2"

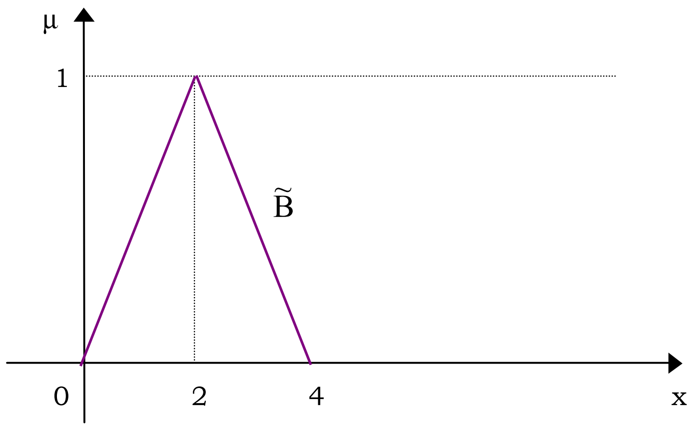
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0	.4	.6	.9	1	.9	.6	.4	0

Ejemplo 12. En $\Re$ definimos el número borroso $\tilde{B}$: "aproximadamente 2", cuya función de pertenencia está definida del siguiente modo:

$\forall\, x \in \Re$:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{-x+4}{2} & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Gráficamente:



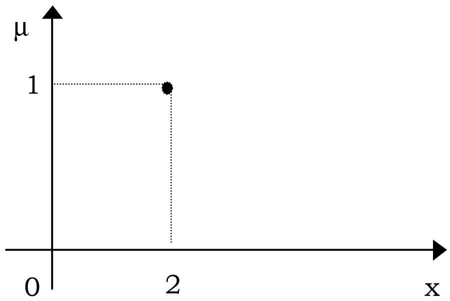
En estos casos en que la función de pertenencia es una función continua diremos que el **número borroso es continuo.**

Ejemplo 13. Los números reales y los intervalos de números reales pueden tratarse como casos particulares de números borrosos:

$\forall\ x \in \Re$:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

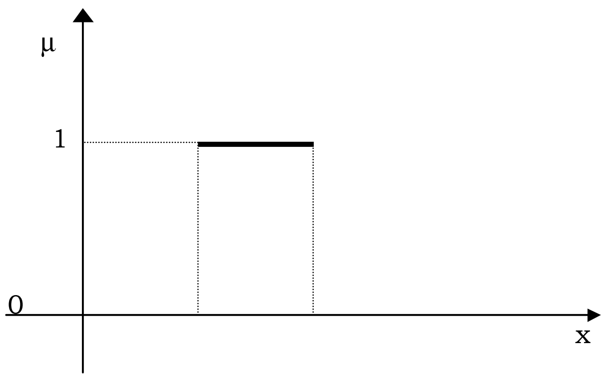
Gráficamente:



$\forall\ x \in \Re$:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Gráficamente:



4 - BIBLIOGRAFIA

[1] Dubois, D. y Prade, H:. *Fuzzy sets and Systems. Theory and Applications*. Academic Press, New York, 1980.

[2] Kandel, A.: *Fuzzy Mathematical Techniques with Applications*. Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1986.

[3] Kaufmann, A.: *Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos*. CECSA, México, 1982.

[4] Kaufmann, A. y Gupta, M.: *Introduction to fuzzy arithmetic*.Van Nostrand Reinhold, Company, New York, 1985.

[5] Kaufmann, A. y Gil Aluja, J.: *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*. Editorial Hispano Europea, Barcelona, 1987.

[6] Kaufmann, A. y Gil Aluja, J.: *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre*. Editorial Ceura, Madrid, 1990.

[7] Klir, G. y Yuan, B.: *Fuzzy sets and fuzzy logic. Theory and Applications*. Prentice-Hall PTR, USA , 1995.

[8] Kruse, R. , Gebhardt, J. y Klawonn, F.: *Foundations of Fuzzy Systems*. John Wiley & Sons Ltd., England, 1995.

[9] Lazzari, L., Machado, E. y Pérez, R.: *Matemática Borrosa*. Facultad de Ciencias Económicas. Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, 1994.

[10] Lazzari, L., Machado, E. y Pérez, R.: *Teoría de la decisión Fuzzy*. Ediciones Macchi, Buenos Aires, 1998.

[11] Tanaka, K.: *An introduction to Fuzzy Logic for pactical aplications*. Springer-Verlag, New York, 1997.

[12] Trillas, E., Alsina, C. y Terricabras, J: *Introducción a la lógica borrosa*, Ariel, Barcelona, 1995.

[13] Trillas, E.: *La inteligencia artificial*, Temas de Debate, Madrid, 1998.

[14] Trillas, E. , Delgado, M. y otros: *Fundamentos e introducción a la Ingeniería Fuzzy*. Omron Electronics S. A., España, 1994.

[15] Zadeh, L.: “Fuzzy sets”, *Information and Control* 8, 338-353, 1965.

[16] Zimmermann, H.: *Fuzzy set theory and its applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991.