LEXICO

LOGICA POLIVALENTE

JULIAN VELARDE LOMBRAÑA
Oviedo

El sistema de lógica «clásica» es un sistema regido por la ley de bivalencia, según la cual toda oración enunciativa (proposición) λόγος ἀποφαντικὸς, siguiendo a Aristóteles (*De Interpretatione, 17 a 2*), es o bien verdadera o bien falsa. Ello quiere decir desde la abstracción del cálculo formal, que el conjunto de los valores consta ni más ni menos que de dos elementos.

La lógica polivalente hace referencia a sistemas formales con más de dos valores, de ahí que reciba el nombre de lógica no-clásica o lógica no-Aristotélica, guiados, sin duda, quienes le aplican este último calificativo, por el famoso pasaje antes citado de *De Interpretatione,* si bien tal denominación a decir de Lukasiewicz (*considerac. Filosof. sobre la lóg. poliv.* p. 83) no es correcta, dado que fue precisamente Aristóteles en la obra mencionada (Cap. IX) el primero que puso en tela de juicio la ley de bivalencia por lo que se refiere a cierto tipo de λόγοι ἀποφαντικοί (proposiciones, en nuestro lenguaje) cuales son las que se refieren a futuros contingentes como es si «mañana habrá una batalla naval» para seguir el ejemplo de Aristóteles.

Es obligado señalar, por otra parte, que la lógica polivalente —como dice Rescher, p. 15— es una materia nueva en el campo de la lógica. A ello cabe añadir que la lógica polivalente constituye una disciplina no lo suficientemente definida en su estado actual de desarrollo. Se compone de una gran masa de hallazgos frecuentemente aislados, hallazgos éstos debidos a autores que se acercan a la materia desde puntos de vista muy heterogéneos. De ahí la urgencia de llegar a una sistematización y unificación. En este sentido cabe citar las obras de Rosser y Turquette (1) A. Zinoviev (2) R. Ackerman (3) y N. Rescher (4).

La aproximación a la lógica polivalente ha tenido lugar desde dos perspectivas claramente distinguibles, si bien no desconexionadas entre sí:

a) desde la filosofía.
b) desde el desarrollo algebráico de la lógica.

2. Precursores de la lógica polivalente

Hemos mencionado ya a Aristóteles. El cap. IX de *De Interpretatione* está dedicado a las proposiciones en futuro; se discute si es necesario que una proposición sobre un hecho futuro como por ej. «mañana habrá una batalla naval» sea verdadera o falsa; sostener tal tesis conduce —según Aristóteles— a «consecuencias incómodas» y a «imposibles». En todas aquellas cosas que no están siempre en el acto, dice, hay potencialidad, el poder ser e igualmente el poder no ser, por ej. este manto puede ser dividido o no. En consecuencia no todas las cosas suceden o no suceden por necesidad. La necesidad se aplica tan sólo a todo lo que es, cuando es

Hasta aquí llega la doctrina de Aristóteles. A ella se añaden diversas interpretaciones, la aceptación o no de la ley de bivalencia queda enmarcada desde la perspectiva filosófica, dentro del problema del determinis-

(1) J. B. Rosser y A. R. Turquette, *Many-Valued Logics*. North Holland. Amsterdam, 1952.

(2) A. A. Zinoviev. *Philosophical Problems of Many-Valued Logic*, Trad. inglesa G. Küng y D. Comey, Reidel, Dordrecht 1963.

(3) R. Ackermann, *Introduction to Many-Valued Logics*, Routledge & Kegan Paul, Londes, 1967

(4) N. Rescher, *Many-Valued Logic*, McGraw-hill, New York, 1969.

mo, y, en efecto, en este sentido es discutido por Aristóteles.

Los estóicos, consideraron —según Boecio— que Aristóteles defendía, como consecuencia de su oposición al determinismo, que los futuros contingentes no eran ni verdaderos ni falsos. En oposición, los estóicos y en especial Crisipo, en cuanto rígidos defensores del determinismo mantenían la ley de bivalencia como principio fundamental de su dialéctica: «Fundamentum dialecticae est quidquid ennuntietur (id auten apellant ἀξίωμα) aut verum esse aut falsum» (5).

De aquí cabe inferir, como dice Lukasiewicz, que no es correcto denominar a la lógica polivalente «lógica no-clásica» (si en lógica clásica incluímos la lógica de Aristóteles) o «lógica no-Aristotélica» ya que fué Aristóteles el primero que puso en cuestión la ley de bivalencia. En relación con los clásicos, la lógica polivalente podría denominarse «lógica no estóica» o mejor «lógica no crisípea».

Frente al determinismo de los estóicos, los epicúreos defensores del indeterminismo, siguen a Aristóteles en cuanto a la tesis de que todo lo que es sea por necesidad. De ahí infieren que hay proposiciones que no son ni verdaderas ni falsas (6).

En la E. Media el problema de los futuros contingentes se complica con el de la presciencia divina. STO. TOMAS distingue (7) entre necesidad absoluta y necesidad del consiguiente y necesidad *sub conditione* o por necesidad de la consecuencia. Si Dios tiene presciencia de una proposición acerca del futuro, dicha proposición es necesaria por relación al hecho de haber sido objeto de tal precognición, pero no es absoluta o incondicionalmente necesaria.

Evidentemente el problema de la presciencia divina y los futuros contingentes envuelve asimismo el problema de la ley de bivalencia y todos los grandes escolásticos con Duns Scoto y Ockam, Suárez, etc. intervinieron en la discusión del problema. Michalski (8) señala que Duns Scoto y especialmente W. Ockam desarrollaron la tesis aristotélica en el sentido de llegar a admitir un tercer valor de verdad aparte de los dos clásicos: verdad y falsedad. En efecto distinguían la *propositio neutra* de la *propositio vera* y de la *propositio falsa*. De ahí que Michalski llegue a señalar a Ockam como uno de los precursores de la lógica trivalente. Sin embargo, no están de acuerdo con esta afirmación W. y M. Kneale (9) para quienes las discusiones de los medievales no arrojaron nueva luz sobre las dificultades que turbaron a Aristóteles, y toda la posible contribución de Ockam al desarrollo de una lógica trivalente quedaría reducida al intento de exponer lo que Aristóteles tuviera que decir acerca de las proposiciones condicionales: «Si Dios sabe que A ha de suceder, entonces A ha de suceder» y «Si A ha de suceder entonces Dios sabe que A ha de suceder».

(5) Von Arnim, *Stoicorum veterum fragmenta*, II p. 63 frag. 196 Ciceron *Acad. Pr.* II, 95.

(6) Ciceron, *De Fato*, 37.

(7) *Summa contra Gentiles*, I, 67.

(8) «Le problème de la volonté a Oxford et à Paris au XIVe siècle» en *Studia philosophica*, vol. 2, 1937, pp. 233-365.

(9) *El desarrollo de la logica*, trad. M. Muguerza. Tecnos Madrid 1972 p. 223.

3. Los fundadores de la lógica polivalente:

Mac Coll (1837-1909) fundamenta toda la lógica en la lógica de proposiciones y establece un sistema de lógica proposicional en el que las proposiciones pueden tomar uno de los cinco valores de verdad siguientes: verdad, falsedad certeza (siempre verdad) imposibilidad (siempre falsa) y variabilidad (contingencia). Una proposición es cierta si siempre y necesariamente es verdadera como por ejemplo $2 + 3 = 5$; una proposición es imposible si siempre y necesariamente es falsa como por ejemplo $3 = 2$; y una proposición es variable si algunas veces es verdadera, otras falsa, como por ejemplo $x = 2$. Mac Coll desarrolló su sistema como un álgebra de la lógica, pero basado sobre tres en vez de sobre cinco valores y aplicó su lógica de proposiciones variables especialmente al cálculo de probabilidades. De ahí que las proposiciones se combinen en otro sentido del que lo hacen las funciones de verdad. Así por ejemplo, si p es una proposición variable la conjunción consigo misma será variable; de modo que variable en conjunción con variable da variable. Pero si p es variable, entonces también lo es no-p. Pero ahora variable en conjunción con variable no da variable, sino imposible.

En cualquier caso Mac Coll puede ser considerado como un precusor de los lógicos posteriores que dedicaron su esfuerzo a la construcción de sistemas de lógica con valores de verdad no clásicos y desde la teoría del cálculo de posibilidades.

C. S. Peirce (1839-1914) Se acerca a la lógica polivalente desde la problemática filosófica en torno a los futuros contingentes dentro del contexto Aristotélico (10). Hace referencia a una matemática tricotómica considerada como una matemática basada sobre una lógica de tres valores llegando a la elaboración del método de las tablas de verdad para una lógica trivalente. El tercer valor considerado por Peirce corresponde a un grado intermedio entre la *afirmación positiva* y la *negación positiva* que es exactamente tan real como los otros dos. Consideró también varios funtores de tres valores que posteriormente fueron reinventados por otros.

N. A. Vasiliev (1880-1940) presenta sus investigaciones como el intento de hacer con la lógica de Aristóteles lo que su colega en la Universidad de Kazan, N. Lobatchevski había hecho con la Geometría de Euclides. Lobatchevski es uno de los creadores de las geometrías no euclídeas. De igual modo Vasiliev trabajó en la construcción de «lógicas imaginarias no aristotélicas» Construyó la ley de *Contradicción* en la forma kantiana «Ningún objeto puede tener un predicado que lo contradiga» y la ley del *tertio excluso* como «un objeto debe poseer un predicado o su negación». Ambas leyes pertenecen a la base ontológica de la lógica y, en cuanto tales, sometidas a cambios; aplicables al mundo actual pero no a todos los mundos posibles. En cambio la ley que llamó de «no-autocontradicción», según la cual

(10) Confer. *Collected papers*. Cambridge, (Mss). (1931-35) vol. 4, pp. 12-20 y 257-265, vol. 3. 366. Sobre la lógica trivalente de Peirce véase M. Fisch y A. R. Turquette, «Peirce's Triadic Logic» en *the Transactions of the Charles S. Peirce Society*, vol. 2, 1966, pp. 71-85.

«uno y el mismo juicio no puede ser a la vez verdadero y falso», constituye un principio metalógico y en cuanto tal, inalterable.

Frente a la lógica con base ontológica determinada por nuestro mundo actual desarrolló Vasiliev su lógica imaginaria según la determinación ontológica de su mundo imaginario, donde algunos objetos poseen el predicado A, otros el predicado no-A y otros que poseen a la vez ambos A y no-A. Por su parte una afirmación puede ser afirmativa, negativa, indiferente, correspondiente con las tres formas del juicio «S es p». «S es no-P», «S es P y no-P» respectivamente.

Evidentemente una tal lógica es esencialmente trivalente y Vasiliev intentó incluso generalizar esta ontología de tres estados al caso de n estados mútuamente exclusivos y exhaustivos. Las dificultades de esta lógica de proposiciones correspondiente a 3 ó 4 estados de hechos reside en su interpretación. Pero ese problema es el mismo que tienen planteado los diversos cálculos de lógica polivalente en general, como luego veremos.

4. Los sistemas de lógica polivalente:

Dos escritos aparecidos alrededor del año 20 sientan las bases de la lógica polivalente. Ambos escritos son independientes entre sí y se acercan a la materia desde dos perspectivas distintas.

Un artículo de Lukasiewicz (11) publicado en 1920 constituye el resultado de las investigaciones que el autor había venido realizando sobre las llamadas «proposiciones modales» y sobre las nociones con ellas relacionadas de posibilidad y necesidad. Motivado por estas consideraciones de carácter filosófico propone y desarrolla un sistema de lógica trivalente.

Post (12) descubrió su familia de sistemas polivalentes independientemente de Lukasiewicz. Guiado, no por cuestiones filosóficas, sino por cuestiones puramente formales internas a la lógica, expuso sus sistemas de n-valores en toda su generalidad, es decir, desde una perspectiva estrictamente algebráica.

CONSIDERACION ALGEBRAICA DE LOS SISTEMAS POLIVALENTES. En el sistema de lógica proposicional bivalente las variables proposicionales o funciones proposicionales se convierten en proposiciones cuándo quedan saturadas mediante uno de estos valores 1=verdad, 0=falsedad. En términos algebráicos existen dos conjuntos: el conjunto de las variables $a = \{p, q, r.\}$ y el conjunto de los valores $\beta = \{1, 0.\}$; hay una aplicación sobreyectiva de a sobre β. Finalmente hay que hacer notar que el conjunto β tiene solo dos elementos, es decir que las proposiciones sólo pueden adquirir dos valores de ahí que sea un sistema bivalente.

(11) «Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkal küls» en *Comptes rendus des séances de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie*. 23, (1930) pp. 51-57 Trad. inglesa de L. Borkowsk, en *Lukasiewicz Selected Works*. North-Holland, Amsterdam-Varsovia 1970 Trad. cast. de A. Deaño. «observaciones filosóficas sobre los sistemas polivalentes de lógica proposicional» en J. Lukasiewiz, *Estudios de lógica y filosofía*. Rev. de Occidente, Madrid 1975, pp. 61-86.

(12) «Introduction to a General Theory of Elementary Propositions» en *American Journal of Mathematics*, vol 43, 1921, pp. 163-85. Reimpreso en J. Heijenoort. *From Frege to Gödel*. Harvard Univ. Press. Cambridge, (Mass), 1971, 2ª edic. pp. 264-283, por donde citamos.

Ahora bien, desde una consideración puramente algebráica —tal es la perspectiva adoptada por Post— podemos considerar sistemas en los que el conjunto β no quede reducido a dos elementos. Así, escribe Post, podemos considerar sistemas en los que «en vez de dos valores de verdad $\{1, 0\}$ podemos distinguir m valores distintos de verdad $\{V_1, V_2, V_3 \ldots V_n\}$ donde m es un entero positivo. Una función de orden n tendrá m^n configuraciones en su tabla de verdad y por consiguiente habrá m^{m^n} tablas de verdad de orden n. (13). Así por ejemplo, para $m=4^{4^2}$ en un sistema tetravalente habrá 4^{4^1} funciones de orden 1 es decir, 256 funciones monádicas y 4 de orden diádico, es decir 4.294.967.269 funciones diádicas.

Siguiendo el procedimiento anterior nada impide desde un punto de vista puramente formal considerar el conjunto β como compuesto de infinitos elementos, es decir, que una proposición puede tener infinitos valores diferentes todos ellos pertenecientes al intervalo (0, 1) incluídos ambos límites. En este caso las conectivas no pueden ser definidas mediante las funciones de verdad sino mediante el cálculo de probabilidades. Tal es el camino abierto por Mc Coll y seguido especialmente por Reichenbach.

Hemos visto cómo al aumentar el número de elementos pertenecientes al conjunto β aumenta también considerablemente el número de funciones. Ello hace que resulte prácticamente imposible la consideración de todas ellas. Los investigadores de lógica polivalente han estudiado algunas de ellas en sus respectivos sistemas de n valores.

Post, que comienza su artículo por el examen del sistema de los *Principia Mathematica* en el que se tenían como primitivas las funciones ~ (negación) y V (disyunción no excluyente), presenta su sistema polivalente sirviéndose de otras funciones correspondientes a las primeras, que él representa mediante los signos ~m y V m. Lo mismo que el sistema de los *Principia* es un sistema completo generado a partir de las dos funciones primitivas, así también las funciones ~m y Vm generan un sistema completo. Las tablas de ambas funciones son:

P	~mP	P	q	PVmq	
V^1	V_2	V_1	V_1	V_1	
V_2	V_3	V_{i1}	V_{j1}	V_{i1}	$i_1 \leq j_1$
Vm	V_1	V_{i2}	V_{j2}	V_{j2}	$i_2 \geq j_2$
		Vm	Vm	Vm	

es decir, ~m p es un funtor que permuta los valores de verdad cíclicamente, de ahí que reciba el nombre «negación cíclica de Post».

El funtor Vm realiza una operación consistente en aplicar a p Vm q el más alto de los valores de verdad que poseen p y q.

El inconveniente más serio con que el que tropiezan los sistemas m-valentes de Post hace referencia a su

(13) Ibidem, p. 279.

interpretación semántica. Post procede en términos de conjuntos de proposiciones pero ofrece una interpretación proposicional. Sugiere al final de su artículo la posibilidad de traducir toda su argumentación al lenguaje de un sistema polivalente, pero de hecho no explicita la forma de llevar a cabo tal traducción y, según W. y M. Kneale (14), resulta difícil, si no imposible, asignar algún significado concreto a su sugerencia.

Las investigaciones de Lukasiewicz en torno a la lógica polivalente datan de alrededor de los años 20. En 1918 hace referencia a ellos en la lección de despedida pronunciada en la Universidad de Varsovia. Su famoso artículo antes citado se basa en el ensayo leído en la Sociedad Filosófica Polaca en Lwów el 5 de Junio de 1920. Lukasiewicz concibió la idea de recurrir a un sistema de lógica trivalente como medio para resolver el problema aristotélico de los futuros contingentes. El cálculo de proposiciones ordinario es bivalente y admite implicitamente la ley de bivalencia según la cual toda proposición o bien es verdadera o bien es falsa. Ahora bien, según Lukasiewicz, esta ley, la más fundamental de nuestra lógica no aparece completamente evidente. La proposición «Estaré en Varsovia a mediodía del 21 de diciembre del año próximo» no puede ser ahora ni verdadera ni falsa, debe, pues, poseer un tercer valor distinto de «1» y «0», este valor se puede designar por «$\frac{1}{2}$» y representa «lo posible».

Desde el punto de vista puramente formal tenemos ahora un sistema en el que el conjunto β (el conjunto de los valores) consta de tres elementos. $\beta = \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ obtendremos pues 3^{3^1} funciones monádicas y 3^{3^2} funciones diádicas. De las primeras, la más importante y estudiada por Lukasiewicz es la negación representada por el signo «N»; su tabla es la siguiente:

p	Np
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

Como puede comprobarse, la función negación queda definida: $\sim p = 1\text{-}p$.

Similarmente se hace necesario introducir los correspondientes complicaciones en las funciones diádicas. De ellas Lukasiewicz da las tablas de las siguientes:

	p	&	q	p	v	q	p	→	q	p	↔	q
	k	p	q	A	p	q	C	p	q	E	p	q
p\q	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0	1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	1	1	0	$\frac{1}{2}$	1

Los principios que guian la construcción de estas tablas son los siguientes:

(14) *El desarrollo de la lógica*, ed. cit. p. 529.

a) Para la conjunción Kpq su valor de verdad es el más bajo de los valores de verdad de sus componentes, a saber $K11 = 1$; $K1\frac{1}{2} = K\frac{1}{2}1 = K\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $K10 = K\frac{1}{2}0$ $K01 = K0\frac{1}{2} = K00 = 0$.

b) Para la disyunción alternativa Apq. Su valor de verdad es el más alto de los valores de verdad de sus componentes, a saber: $A11 = A1\frac{1}{2} = A10 = A\frac{1}{2}1 = A01 = 1$; $A\frac{1}{2}\frac{1}{2} = A\frac{1}{2}0 = A0\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $A00 = 0$.

c) Para que la implicación Cpq: (1) Si el valor de p es igual o menor que el valor de q entonces el valor de Cpq es «1»: si $[p] \leq [q]$ ent. $[p \rightarrow q] = 1$ a saber: $C11 = C\frac{1}{2}1 = C\frac{1}{2}\frac{1}{2} = C01 = C0\frac{1}{2} = C00 = 1$.

(2) Si el valor de p es mayor que el valor de q entonces el valor de Cpq es igual al valor de q menos el valor de p más 1; si $[P] > [q]$, ent. $[p \rightarrow q] = [q] - [p] + 1$, a saber: $C1, \frac{1}{2} = C\frac{1}{2}0 = \frac{1}{2}$; $C1,0 = 0$.

d) Para la coimplicación Epq (1) si el valor de p no es igual que el valor de q entonces Epq vale el módulo de: 1 menos el módulo de: el valor de p más el valor de q. Si $[p] \neq [p]$, entonces, $[p \leftrightarrow q] = |\, 1 - |\,[p] + [q]\,||$. A saber: $E\,1\frac{1}{2} = E\frac{1}{2}1 = E\frac{1}{2}0 = E0\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $E10 = E01 = 0$. (2) Si es igual el valor de p y el q, entonces Epq vale 1: si $[p] = [q]$ ent. $[p \leftrightarrow q] = 1$ a saber: $E11 = E\frac{1}{2}\frac{1}{2} = E00 = 1$. (15).

Con vistas a ofrecer una interpretación de los futuros contingentes introduce Lukasiewicz el funtor posibilidad y el funtor necesidad.

El funtor posibilidad representado por M es definido en términos de los primitivos. La definición en cuestión se debe a su discípulo Tarski y es la siguiente:

$$Mp = CNpp$$

Esto es, «es posible que p» significa «si no p entonces p»; su tabla de verdad es la siguiente:

P	MP
1	1
$\frac{1}{2}$	1
0	0

Consiguientemente el funtor necesidad que representamos por «□» queda definido en términos de M de la siguiente manera: $\Box\, p = NMNp$ y, por tanto, en términos de los funtores primitivos así: $\Box p = NCpNp$; su tabla de verdad es, pues:

P	□P
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	0

(15) De todos los juntores aquí presentados, Lukasiewicz emplea en su sistema dos de ellos, N y C, como primitivos y define los demás en términos de éstos. Así, en lógica trivalente se cumplen las siguientes definiciones: (1) $Apq = CCpqq$; (2) $Kpq = NANpNq$; (3) $Epq = KCpqCqp$.

5. Consecuencias que se derivan del sistema trivalente de Lukasiewicz

a) Todos los teoremas tradicionales sobre proposiciones modales y algunos de los cuales resultaban incompatibles en el sistema bivalente normal, son ahora establecidos libres de contradicción. Con ello queda superado el problema del determinismo: Preocupación filosófica de Lukasiewicz.

b) Las tablas de verdad del sistema trivalente de Lukasiewicz coinciden con las tablas de verdad del sistema bivalente ordinario cuando se toman en cuenta solamente los valores «1» y «0». Se sigue de aquí que cualquier taulogía en las tablas del sistema trivalente lo es asimismo en las tablas del sistema bivalente. En consecuencia:

c) El sistema trivalente es una parte propia del bivalente: Todos los teoremas del sistema trivalente son válidos en el sistema bivalente pero no recíprocamente. Los teoremas más importantes del sistema bivalente que no conservan su validez en los sistemas polivalentes son aquellos relacionados con el tipo de argumentación denominado *reductio ad absurdum* como por ejemplo:

CCNppp CCpNpNp CKCpqNqNp

d) Los funtores no pueden conservar en el sistema trivalente las mismas relaciones que guardaban entre sí en el sistema bivalente. En su sistema define Lukasiewicz la disyunción como Apq = CCpqq mientras que el cálculo bivalente tenemos $pvq \equiv -p \leftrightarrow q$. Ahora bien, si aplicamos la definición a $pv \sim p$, no obtendremos una tautología y en consecuencia el principio llamado de tercio excluso deja de ser válido, consecuencia que Aristóteles deseaba explícitamente evitar, pero que en contrapartida se conforma con el uso intuicionista de la negación.

Por otra parte la «ley de contradicción» también falla en el sistema trivalente de Lukasiewicz, aunque no en la lógica proposicional intuicionista. Así tenemos que NKpNp no es una tautología puesto que $NK\frac{1}{2}N\frac{1}{2} = NK\frac{1}{2}\frac{1}{2} = N\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ Este resultado es intuitivamente chocante ya que ante dos proposiciones sobre un futuro indeterminado con posibilidades conflictivas como en el caso de p y Np uno se inclina intuitivamente a dar a $K\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ el valor «0».

e) Como habrá podido observarse, resulta fácil, desde el punto de vista puramente formal, construir múltiples sistemas n-valentes definiendo los valores de las funciones de modo más o menos arbitrario. Pero inmediatamente se plantean problemas de dos tipos:

—El problema de la interpretación, ya señalado cuando hablamos de Post. Lukasiewicz proveyó a su sistema de una interpretación. Pero el uso del término «posible» que está a la base de toda la discusión, no es uniforme a lo largo de sus investigaciones.

Aceptado «lo posible» como tercer valor con el objeto de superar el determinismo filosófico que él pensaba era consecuencia de la ley de bivalencia, fué con posterioridad modificado hasta el punto de no ver incompatibilidad entre el determinismo y la lógica bivalente.

—El problema de encontrar un sistema de axiomas que atribuyan a los símbolos las propiedades que se desprenden de sus funciones. Es decir, el problema de construir un sistema deductivo basado sobre axiomas. Un importante resultado fué el conseguido por M. Wajsberg (18) en 1931 quién axiomatizó el sistema trivalente de Lukasiewicz tomando los cuatro axiomas siguientes:

I) Cp Cqp
II) CCpqCCqrCpr
III) CCNpNqCqp
IV) CCCpNppp

En este sistema se toman como funciones primitivas «C» y «N» definiendo las demás en términos de éstas. Pero entonces surge otro problema. Es posible construir una función en el sistema trivalente no definible en el sistema axiomático de Wajsberg. Tal es la función «T» (función de J. Slupecki) (19) cuya tabla de verdad es la siguiente:

p	Tp
1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$

La introducción de esta función convierte al sistema de Lukasiewicz en funcionalmente incompleto dado que dicha función no puede ser definida en términos de C y N. No obstante el mismo Slupecki demostró que añadiendo:

V) CTp NTp
VI) CNTpTp

a los axiomas de Wajsberg, obtendremos un sistema trivalente funcionalmente completo. En 1958 A. Rose y JB Rosser (20) demostraron la completud del sistema denumerablemente n-valente de Lukasiewicz a partir de los tres primeros axiomas de Wajsberg más los dos siguientes:

I) CCCpqqCCqpp
II CCCpqCqpCqp

(18) «Axiomatization of the 3-Valuedpropositional calcul» Trad. inglesa en S. McColl, *Polish logic: 1920-1939*. Oxford 196‾, pp. 264-284.

(19) «The Full Tree-Valued Propositional Calculus» Trad. inglesa en S. McCall *Polish Logic: 1920-1939*. ed. cit. pp 335-337.

(20) A. Rose y J.B. Rosser «Fragments of Many-Volued Statement Calculi» en *Transactions of the American Mathematical Society*, vol 87, 1958, pp. 1-53.

—EL SISTEMA TRIVALENTE DE KLEENE

En 1938 S.C. Kleene (21) presenta un nuevo sistema de lógica trivalente en el marco de las funciones recursivas. Construye sus tablas de verdad en términos de una aplicación matemática. Una función proposicional P es considerada como predicado de una variable x cuyo rango es el dominio D y en donde P (x) queda definido para una parte de ese dominio. Así P (x) será:

—a) Verdadero, cuando x pertenece al rango de ½ a 1.

—b) Indefinido, cuando x = 0.

—c) Falso, en los demás casos, es decir: [(x ≠ 0) & (x<½)] v (1<x). Kleene construye las tablas de verdad para los funtores: «~» «v» «&» «→» y «≡» de acuerdo con los siguientes principios:

1º «Al objeto de que las conectivas proposicionales sean operaciones recursivas parciales (o al menos produzcan predicados recursivos parciales), hemos de elegir para ellas tablas que sean *regulares* en el siguiente sentido: Una columna (fila) dada contiene «l» en la fila (columna) de la «½», solamente si la columna (fila) consta enteramente de asos de «1»; y similarmente en lo que respecta a «0».

2º El valor de «½» significa «lo no conocido» (lo indefinido) Aquí «no conocido» es una categoría dentro de la cual podemos considerar que cae cualquier proposición, cuyo valor o bien no nos es conocido, o bien preferimos, de momento, no considerarlo; sin que ello excluya entonces las otras posibilidades, verdadero y falso. (22).

3º Las tablas fuertes están determinadas de modo único como las extensiones regulares de mayor fuerza posible de las tablas clásicas, bivalentes, es decir, son regulares y tienen «1» ó «0» en cada posición donde cualquier extensión regular de las tablas bivalentes pueda tener un «1» o un «0» (si «1» ó «0» están determinados de modo único) (23).

Además de las tablas «fuertes» Kleene introdujo también una familia de conectivas proposicionales «débiles». Las tablas para estas conectivas se obtienen de las tablas clásicas introduciendo en ellas el valor «½» a lo largo de la fila y la columna encabezada por «½». El sistema resultante es entonces el que sigue:

P	~P

	p & q			p v q			p → q			p ≡ q		
P \ q	1	½	0	1	½	0	1	½	0	1	½	0
1	1	½	0	1	1	1	1	½	0	1	0	½
½	½	½	0	1	½	½	1	½	½	0	1	½
0	0	0	0	1	½	0	1	1	1	½	½	½

El sentido de estas tablas respondería al de un mecanismo incapaz de decidir el valor de una fórmula en la que aparece el valor «½».

Un tal sistema es el mismo que el de Bochvar (24). Las conectivas «débiles» de Kleene se corresponden con las conectivas «internas» de Bochvar. Ambos constituyen un fragmento isomórfico con el sistema bivalente clásico, y en ambos también el concepto usual de «tautología» resulta inoperante, dado que si el valor «½» funciona como input en una fórmula, esa fórmula recibe automáticamente el valor «½» . De ahí la necesidad de ampliar el concepto de «tautología» o la introducción del concepto de «quasi-tautología» en el sentido de que el resultado final de la formula no obtiene nunca el valor «0».

6 Aplicaciones de la lógica polivalente.

Una de las primeras aplicaciones de los sistemas polivalentes tuvo lugar en el campo de la matemática; especialmente está a la base del intuicionismo. Los primeros intentos en este sentido se deben a L.E.J.

TABLAS *FUERTES* DE LAS CONECTIVAS PROPOSICIONALES

P	~P
1	0
½	½
0	1

	p & q			p v q			p → q			p ≡ q		
P \ q	1	½	0	1	½	0	1	½	0	1	½	0
1	1	½	0	1	½	1	1	½	0	1	½	0
½	½	½	½	½	½	½	½	½	½	½	½	½
0	0	½	0	1	½	0	1	½	1	0	½	1

(21) Confert, *Introducción a la meta matemática*. Trad. cast. M. Garrido. Tecnos Madrid 1974, pp. 301-308. Este sistema fué presentado por primera vez en Kleene «On a Notation for Ordinal Numbers» en *The Journal of Symbolic Logic*. vol. 3, 1938, pp. 150-155.

(22) *Introducción a la meta matemática*. ed. cit. p. 304.

(23) Ibidem, 303.

(24) «Sobre un calculo lógico trivalente y su aplicación al análisis de las contradicciones» en *Matématicheskij Sbornik*. vol. 4, 1939, pp. 287-308 (en ruso) Recensión de A. Church en *The journal of symbolic logic*. vol. 4, 1939, pp. 98-99.

Brouwer (25). Pero la nueva rama de la lógica ha sido fecunda en los campos de las diversas disciplinas. Nos referimos a la fecundidad si no en resultados definitivos, sí en planteamientos de nuevas cuestiones. Cabe citar a título de ejemplo: en el campo del álgebra los trabajos de Bernstein (26) y Moisil (27). En el de las matemáticas los de Mazurkiewicz (28) y Tarski (29). En el de la física los de Birkhoff y von Neuman (30), Reichenbach (31) y el polémico libro de Destouches-Fevrier (32). En el de la electrónica Shestakov (33) y Moisil (34).

Finalmente cabe señalar la significación de la lógica polivalente dentro de la lógica. También aquí los sistemas polivalentes han sido fecundos en su aplicación a cuestiones lógicas esenciales. A nivel general tenemos la obra de Zinoviev (35) en el contexto de las discusiones sobre las relaciones entre la lógica formal y la lógica dialéctica. Discute Zinoviev la importancia filosófica de la lógica polivalente y las relaciones con la lógica clásica.

Una de las aportaciones de los sistemas polivalentes a cuestiones específicas de la lógica es la del lógico chino Moh Shaw-Kwei (36). Mientras que en el campo del cálculo normal bivalente la formalización de la teoría de conjuntos puede conducir a paradojas, a no ser que introduzcan restricciones (teoría de los tipos), Moh Skaw-Kwei señala que pueden ser eliminadas las paradojas mediante la introducción de un cálculo polivalente. En concreto propone considerar el valor de verdad intermedio «$^1/_2$» del sistema de Bochvar como «paradójico» y en cuanto tal se asignaría a proposiciones del tipo siguiente «este enunciado es falso», que será falso si se considera como verdadero y verdadero si se considera como falso. Según esto, la negación de una proposición paradójica, la disyunción de una proposición paradójica con otra paradójica o falsa, la conjunción de una proposición paradójica con otra paradójica o verdadera y la implicación de una proposición falsa por una paradójica o de una paradójica por una falsa, todas ellas son paradójicas; resultados estos que son los que arrojan las tablas de Bochvar.

Pero, sin duda alguna, la mayor significación que cabe atribuir a la lógica polivalente consiste en su mismo descubrimiento: las leyes de la lógica han sido frecuentamente hipostasiadas y consideradas como leyes apriorísticas, analíticas en el sentido de evidentes por sí mismas y en cuanto tales eran intocables. El descubrimiento de la lógica polivalente demostró que eran posibles estas otras leyes alternativas y con ello se abrían amplios horizontes en las investigaciones de lógica.

(25) Véase por ej. «Intuitionistische Zerlengung mathematischen Grundbegriffe» en *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*. vol. 33, 1925, pp. 251-256 Trad. ingl. en J. van Heijenoort (comp), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*. ed. cit. pp. 334-341.

(26) B. A. Bernstein, «Modular Representations of Finite Algebras» en *Proceedings of the International Mathematical Congress Held in Toronto*. Vol. 1, 1928, pp. 207-216.

(27) G. C. Moisil, «L'algebra e la logica» en *Atti del Congresso Matematico. tenuto in Roma. 8-12 November 1942*. Reale Instituto Nazionale di Alta Matematica, Roma, 1945, pp. 143-152.

(28) S. Mazurkiewicz, «Uber die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung» en *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 41, 1934, pp. 343-352.

(29) A. Tarski, «Wahrscheinlichkeitslehre und mehrwertige Logik» en *Erkenntnis* vol. 5, 1935-36, pp. 174-75.

(30) Carrett Birkhoff y J. von Neumann, «The logic of Quantum Mechanics» en *Annals of Mathematics*, vol. 37, 1936, pp. 823-843.

(31) H. Reichenbach, «Les fondaments loguiques de la théorie des quanta: Utilisation d'une logique à trois valeurs» en *Applications scientifiques de la logique mathématique* Gauthier-Villars, Paris, 1954, pp. 103-114.

(32) P. Destouches-Février. *La structure des théories physiques*. PUF, Paris 1951.

(33) V. I. Shestakov, «A dual Arithmetic Interpretation of the 3-valued Propositional Calculus Utilized in the Simulation of This Calculus by Relay-Contact Networks» en *American Mathematical Society Translations*. Vol. 48, 1965, pp. 45-72.

(34) G. C. Moisil, «Sur l'application des logiques à trois valeurs à l'étude des schémas à contacts et relais» en *Actes-Proceedings du Congrès International de L'Automatique*, Paris, 1956, p. 48.

(35) A. A. Zinoviev, *Philosophical Problems of Many-Valued Logic*. Trad. inglesa de G. Küng y D. Comey. Reidel, Dordrecht 1963.

(36) «Logical Paradoxes for Many-Valued Systems» en *The Journal of Symbolic Logic*. vol. 19, 1954, pp. 37-40.

BIBLIOGRAFIA

Ackermann, R., *An Introduction to many-valued logics*, Routledge & Kegan Paul Ltd., Londres 1967.

Aristóteles, *De Interpretatione*. Trad. A. García Suárez y J. Velarde. Cuadernos Teorema. Valencia, 1977.

Carvallo, M., *Logique à trois valeurs, Logique à seuil*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.

Lukasiewicz, J., Observaciones filosóficas sobre los sistemas polivalentes de lógica proposicional» (1930), en *Estudios de lógica y filosofía*. Trad. de A. Deaño. Rev. Occidente, Madrid, 1975, pp. 61-86.

Post, G., «Introduction to a General Theory of Elementary Propositions» en *American Journal of Mathematics*, vol. 43, 1921, pp. 163-85.

Rasiowa, H., *An Algebraic Approach to Non - Classical Logics*, North-Holland, Amsterdam, 1974.

Rescher, N., *Many-Valued Logic*, McGraw-Hill, New York, 1969.

Rosser J. B. y Turquette A.R. *Many-Valued Logic* (1952). North-Holland. Amsterdam, 1958.

Zinoviev, A. *Philosiphical Problems of many-valued Logic*, Trad. inglesa, G. Küng y A. Camey. Reidel, Dordrecht, 1963.