ARTICULOS

ANALISIS METAMATEMATICO DE LOS NUMEROS REALES

NORBERTO CUESTA DUTARI
Salamanca

1. Postulada la consistencia lógica del conjunto N, ¿se infiere la del conjunto $\{0, 1\}^N$?

Postulemos la existencia ideal del conjunto N de todos los números naturales, y, consiguientemente, postulemos que razonar sobre el conjunto N no nos lleva a la contradicción; es fundamental la cuestión siguiente:

¿Se infiere de esa hipótesis la existencia ideal del conjunto potencial $\{0, 1\}^N$, y, por consiguiente, su consistencia lógica?.

Sería muy arriesgado, y dejarse engañar por el signo, contestar afirmativamente. Reiterando, en efecto, el paso, o sea, poniendo

$$N,\ N_1 = \{0, 1\}^N,\ N_2 = \{0, 1\}^{N_1},\ N_3 = \{0, 1\}^{N_2},\ \ldots,$$
$$N_\omega = \bigcup_{0 \le j < \omega} N_j,\ N_{\omega+1} = \{0, 1\}^{N_\omega}, \text{ etc.}$$

es claro que nos daríamos de bruces con una paradoja similar a la de Burali - Forti, la más impresionante.

Y ya nos presagia el riesgo, que no sepamos enunciar una regla finita para las etapas de una buena ordenación del conjunto potencial N_1.

Puesto que los elementos del conjunto $\{0, 1\}^N$ son las representaciones uniformes del conjunto N sobre el $\{0, 1\}$, parece que supuesta consistentencia del N, nos obliga a admitir la consistencia del conjunto N_1^* de todas las funciones $N \xrightarrow{\varphi} \{0, 1\}$ ω-asintóticamente definidas por una regla recurrente finita.

Y así parece estar bien definida la función que toma el valor 0 para los números pares y el 1 para los impares. Asimismo, parece estar bien definida la expresión decimal diádica del número real que verifica $z^2 = 2$, pues los pasos de la radicación están definidos con una regla cuyo enunciado es finito. En consecuencia, z está definido asintóticamente.

Pero ¿cuántas son las representaciones de N en $\{0, 1\}$, es decir, los números reales definibles mediante una regla recurrente finita?. Podría sospecharse sean o; es decir, $|N_1^*| = \aleph_0$. Es claro que, en tal caso, las de $N_1 - N_1^*$, es decir, las no definibles mediante una regla recurrente finita serían $2^{\aleph_0}$.

Estas cuestiones exhiben la enorme diferencia entre lo significado por N y lo significado por $\{0, 1\}^N$.

En efecto: todos los signos de los elementos de N tienen una construcción finita. Los de N_1, ninguna; en el mejor de los casos, la tendrían ω-asintótica. Y es probable los haya que ni ésta tengan.

2. Axiomática de los números reales según Hilbert

En su artículo, muy circunstancial, «Über den Zahlbegriff» (1), propuso, y opuso al método genético, el axiomático de la Geometría.

Aparte de haber solamente sugerido los problemas lógicos de sus axiomas, lo que nos hace calificar su artículo de circunstancial es que se le escapó que esos axiomas prejuzgaban la respuesta a las dos cuestiones que plantea el infinito del Análisis matemático, que son:

—¿Es consistente el cardinal $\aleph$ o?

—¿Se sigue, de la consistencia del cardinal o, la del cardinal $2^{\aleph_0}$?.

Tras un primer axioma, al que asignamos el 0, pues él no lo incluye, distribuye los que enuncia en cuatro capítulos.

Axioma 0: Hay un conjunto no vacío R, a cuyos elementos llama «números reales».

I. *Axiomas de conexión:* Enuncia tres para la suma de dos números reales. Asimismo otros tres para la multiplicación de dos números reales.

II. *Axioma de cálculo:* Son las dos asociativas; las dos conmutativas; la distributiva del producto respecto a la suma (2).

Los 13 axiomas o leyes mencionadas imponen al conjunto R la estructura de cuerpo algebráico.

Y como existen cuerpos finitos, cosa ya conocida por Gauss, esos 13 axiomas son finitamente consistentes. Y como los hay de tipo estructural diferente, esos 13 axiomas no son categóricos, sino que son multívocos.

III. *Axiomas de orden total:* Los dos primeros enuncian las leyes del orden total no reflexivo. Es claro que son finitamente consistentes y no categóricos.

Los dos siguientes axiomas de este capítulo enuncian las dos monotonías, que son leyes de enlace de las estructuras, aditiva y multiplicativa, con la de orden total. Y aquí es donde se cuela el $\aleph$ o, sin que Hilbert se dé cuenta, y eso que es hombre muy atento.

En efecto: Partiendo de la desigualdad $0 < 1$, sumando la unidad a los dos miembros, resulta $1 < 2$. Y de ambas se sigue

$$0 \neq 1,\ 1 \neq 2,\ 0 \neq 2.$$

Reiterando la suma de la unidad, resulta $2 < 3$. Y se añaden

$$0 \neq 3,\ 1 \neq 3,\ 2 \neq 3.$$

En general, resulta

$$0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < n < \ldots$$

y, por la transitiva, resulta

$$\widehat{k \varepsilon N} \quad \widehat{n \varepsilon N} \; ((n \neq 0) \rightarrow (k \neq k + n))$$

En consecuencia: el cardinal del conjunto R de los «números reales» es $\aleph$ o.

Resulta, según esto, que los 17 primeros axiomas de Hilbert son finitamente inconsistentes. Y postulan a la chita callando, que el cardinal $\aleph_0$ es consistente. Y aquí tiene aplicación la cuchufleta de Bertrand Russell: «Postular lo que se necesita tiene muchas ventajas: las mismas que la adquisición fraudulenta frente al trabajo honrado» (3).

IV. *Axiomas de continuidad:* En este capítulo, propone Hilbert dos axiomas. Uno es el mal-llamado lema de Arquímedes, que algunos atribuyen a Eudoxo (4). El otro es el de la continuidad para la ordenación aritmética del conjunto R de los números reales.

El lema de Eudoxo es superfluo. En estas líneas hemos probado, en efecto, que el único cuerpo ordenado y contínuo es el real.

Pero la continuidad, según un gran descubrimiento de Cantor, exige $|R| \geqslant 2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Podemos asegurar, en consecuencia:

La axiomática propuesta por Hilbert para los números reales no sólo es finitamente inconsistente, sino $\aleph_0$ inconsistente. Y Hilbert ha prejuzgado las dos cuestiones fundamentales sobre el infinito del Análisis matemático: La de la consistencia del $\aleph_0$ y la del $2^{\aleph_0}$ (5).

3. Evidencia geométrica de la continuidad de la punteada rectilínea según Enriques

Tres son las exigencias de una axiomática de los números reales:

a) No contradicción.

b) Unicidad de la estructura.

c) Individuación de cada número real.

La primera, cuestión de ser o no ser, es obvia exigencia lógico-deductiva.

(1) *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 8, 1900, 180-184. Forman el anexo VI a la edición de 1930 de los *Grundlagen der Geometrie*.

(2) Pone dos distributivas: una para $(a + b).c$ y otra para $c.(a + b)$.

(3) La leí hace años en el mismo Russell. Desgraciadamente no tomé nota del pasaje. Por otra parte, en *Le Monde*, 29-VIII-1978, Escarpit, sin precisar la cita, atribuye a Chesterton (1874-1936) el descubrimiento de la 4ª virtud teologal: «Es el sentido del humor».

(4) El mismo Arquímedes, en la carta a Dositeo, que prologa su monografía sobre la cuadratura de la parábola escribe: «Los geómetras que nos han precedido han usado este lema». Uno de ellos, Euclides; es la definición 4ª del Libro 5º de los *Elementos*. La atribución a Eudoxo, la hace Lasserre, en la página 169 de su libro *Die Fragmente des Eudoxos von Knidos* (1966).

(5) Si Homero alguna vez dormitaba, también Hilbert tenía derecho a un sueñecillo, y más en un artículo circunstancial.

La segunda, la exige el sentido unívoco con que hablamos de los números reales: Todas las axiomáticas han de coincidir en definir el mismo tipo de estructura. De los grupos, en cambio, hablamos multívocamente; como de estructuras con ejemplares muy diferentes y heteromorfos. Y lo mismo acontece cuando hablamos de ordenaciones, de espacios topológicos y de otras muchas estructuras.

La tercera es la que hizo genial al invento de las coordenadas cartesianas. Los puntos de la Geometría gráfica eran una multitud confusa. Los de la Geometría cartesiana eran individuales, cada uno diferente de todos los demás. Y esta individuación es el fundamento de la ficha perforada.

Se le alcanza al sentido crítico más elemental que, cuando los axiomas implican consecuencias muy fuertes, es imprescindible justificar los axiomas. Los artículos de una axiomática se dirigen a la inteligencia, no a la voluntad: no son los artículos de un bando que declara el estado de guerra, que se intiman con pena de muerte bajo el seco «ordeno y mando».

Y es manifiestamente muy fuerte la exigencia de ser $2^{\aleph_0}$ (que es mucho mayor que el cuestionado $\aleph_0$) los números reales que nos impone el principio de continuidad para creer que está todo arreglado llamándolo axioma, esto es, «preciosidad». Tiene aquí bastante que decir la intuición intelectual, que es la evidencia.

He aquí los hechos, patentes en la intuición espacial, alegados por Enriques, en sus bellas *Lezioni de Geometria Proiettiva* (1926) § 18, pp. 69-72, y que exigen la continuidad de la recta y de la circunferencia:

a) Encuentro de los móviles, que marchan en direcciones opuestas, sobre la misma pista rectilínea.

b) Encuentro de los móviles con-currentes si el más veloz está detrás del menos veloz al comenzar la carrera. El finísimo análisis de la carrera hecho por Zenón es impotente para destruir el hecho físico del encuentro de Aquiles con la tortuga.

c) Existencia del punto común a la circunferencia y al segmento rectilíneo cuyos extremos pertenecen, uno al círculo, y el otro no.

Si la punteada rectilínea no fuera continua en el sentido de Dedekind, los tres hechos podrían no darse. Es, pues, dato de nuestra intuición geométrica la continuidad de la punteada rectilínea.

4. La construcción genética de Landau.

Alude Hilbert en su «Über den Zahlbegriff» a la construcción genética de los números reales. Y solamente le reconoce su valor pedagógico y heurístico. Vamos a demostrarle al lector su valor lógico.

Landau, en efecto, en su bien construído *Buchlein,* que parece un papiro egipcio —¡tan desconocido es de los matemáticos «modernos»!—, demostró que los números reales se fundaban directamente sobre los números naturales.

Por eso, en su condensado librito, cuyo título hilbertiano es *Grundlagen der Analysis,* no hay más axiomas que los de Peano. Si estos fueran consistentes, lo serían también los números reales. Y, de la no contradicción del cardinal $\aleph_0$, se seguiría la no contradicción del $2^{\aleph_0}$.

He aquí la marcha de Landau:

a) Supuesto consistente el sistema de axiomas de Peano, del que, como hemos visto, se sigue $|N| = \aleph_0$, o sea, que tenemos que admitir la no contradicción del conjunto N de todos los números naturales, también se podrá pensar sin contradicción en el conjunto $N \times N = N^2$ de todos los números fraccionarios.

b) La equi-valencia y desigualdad entre los números fraccionarios se definen finitamente mediante la multiplicación, identidad y desigualdad de números naturales. Esto permite asignar como valor de cada número fraccionario el de la fracción irreducible correspondiente, que se construye mediante un proceso operativo finito. Por tanto, de la consistencia de N^2 se sigue la consistencia del subconjunto Q de las fracciones irreducibles, que queda automáticamente ordenado. También es consistente, por tanto, la estructura ordinal ($Q <$), físicamente realizado por la ordenación anti-horaria de las semi-rectas que proyectan, desde el punto (0, 0), los puntos del conjunto plano N^2.

c) Y, una vez que tenemos delante de nosotros la estructura ordinal ($Q <$), ya nada tenemos que construir, como nada tiene que pintar quien mira una pintura ya terminada, ni tiene que hacer nada, salvo mirar, quien observa un insecto. Nosotros no tenemos que crear los semi-rayos iniciales abiertos de ($Q <$) (6): están ahí, de-

(6) Los *Schnitte* del capítulo 3º, p. 43, del librito de Landau, definición 28, son precisamente los semi-rayos iniciales de ($Q <$).

lante de nosotros. Nosotros no tenemos que crear la relación de inclusión entre los dichos semi-rayos iniciales abiertos de (Q<): están ahí, delante de nosotros. Y, como la reunión de un sistema de semi-rayos iniciales abiertos de (Q<): están ahí, delante de nosotros. Y, como la reunión de un sistema de semi-rayos iniciales abiertos de (Q<) es un semi-rayo inicial abierto de (Q<) hay en éste un semi-rayo inicial mínimo de los que lo contienen. La estructura de inclusión de los semi-rayos iniciales abiertos de (Q<), que está delante de nosotros, es una ordenación total continua. La consistencia de la ordenación racional (Q<) implica la del sistema de sus semi-rayos iniciales ordenados por inclusión. Mediante el desarollo decimal diádico se demuestra que son 2 los semi-rayos iniciales abiertos de (Q<). Así, la consistencia del $\aleph_0$ implica la del 2 .

5. La axiomatización de la Teología según Santo Tomás

Las creaciones culturales se han influído unas a otras. Y la influencia del Euclides es bastante patente en la magnífica Cuestión 1ª de la 1ª Parte de la *Suma Teológica.* Se titula «Cuál es la doctrina sagrada y a qué se refiere».

El lector debe tener en cuenta que la 1ª Parte la escribió los años 1266 y 1267, según el P. Santiago Ramírez.

He aquí una antología del prólogo general y de la dicha Cuestión primera.

Prólogo. Quienes se inician en estos estudios encuentran dificultades debidas, en parte, a la variedad de cuestiones, y, en parte, a que no se escribe según exige el buen método y la graduación de las diversas disciplinas.

Artículo 2º. La Ciencia se funda en principios evidentes. Más los principios de la doctrina sagrada son los artículos de la fe, que no son evidentes. De ello se sigue que no es Ciencia la doctrina sagrada. Es la primera dificultad, a la cual responde:

Hay dos géneros de Ciencias: Unas fundadas en principios conocidos por la luz natural del entendimiento. Tales son la Aritmética y la Geometría. Otras se fundan en principios demostrados por una Ciencia superior. Tales son la Perspectiva, cuyos principios se toman de la Geometría, y asimismo la Música, cuyos principios se demuestran en la Aritmética.

De la misma manera, la Doctrina sagrada cree los principios que Dios ha revelado.

Artículo 4º. La Doctrina sagrada es ciencia práctica, pues en el perfecto conocimiento de Dios consiste la felicidad eterna del hombre.

Artículo 5º. La certeza pertenece a la dignidad de la Ciencia. Pero las dudas que ocurren sobre los artículos de la fe no se deben a que les falte la certeza; se deben a la debilidad de la inteligencia humana. Ello no obstante, y según enseña Aristóteles, es más apetecible el menor conocimiento que puede adquirirse de las cosas sublimes, que el conocimiento cierto de las cosas inferiores.

Artículo 6º. La Doctrina sagrada es sabiduría, en cuanto que, con ella, se adquiere la noticia de lo que la suma Inteligencia conoce de su mismo Ser.

Artículo 7º. Es imposible decir qué es Dios.

Los principios de esta Ciencia, cuyo objeto es Dios, son los artículos de la fe.

Toda ciencia (demostrativa) está contenida germinalmente en sus principios.

Artículo 8º. Si el adversario no cree algo de lo revelado por Dios, no queda medio alguno para demostrar racionalmente los artículos de la fe. Pero es imposible demostrar lo que se oponga a la verdad.

Artículo 9º. Nuestra fe (en los artículos de la fe) se funda en la revelación hecha a los apóstoles y profetas que escribieron los libros canónicos. No se funda en revelaciones que hayan podido recibir otros doctores.

Con más facilidad sabemos lo que no es Dios que lo que es.

Creemos está muy clara su concepción axiomática de la Teología. He aquí unas conclusiones que resumen su escueto pensamiento tan preciso:

a) La Teología es una ciencia racional-deductiva.

b) Los axiomas, no evidentes, ni demostrables, son los artículos de la fe. Se sobre-entiende se aplica a esos axiomas la deducción natural a nuestra razón, la «logische Schlüsse», que es como la llamaba Hilbert.

c) Los axiomas teológicos no son proposiciones que se anteponen arbitrariamente para hacer una construcción deductiva. Son proposiciones conocidas por una inteligencia que es la suprema inteligencia. Pero sólo se incluye, en la tabla de axiomas, lo comunicado a muy contados hombres: los apóstoles y profetas.

d) Por corresponder los axiomas teológicos a realidades ónticas, son consistentes; la «logische Schlüsse», aplicada a ellos, no puede conducir a la contradicción. La deducción correcta, aplicada a hechos que nos consten, no puede conducir a la negación de los axiomas teológicos.

e) La admisión de los axiomas teológicos no se hace por imperarlo así la nuda voluntad. La aceptación del testimonio es objeto de un examen crítico. Y es en esta crítica donde interviene el método científico positivo para asegurar hechos históricos.

f) Tomar los axiomas, a los que se aplica la deducción, de la ciencia de un maestro, nos hace participar en la ciencia del maestro. Y este es el sentido de la bellísima definición de la fe con que comienza Santo Tomás su *Compendio de Teología:* «Fides autem praelibatio quaedam est illius cognitionis quae nos in futuro beatos facit».