ANALISIS METAMATEMATICO DE LA AXIOMATICA DE LOS NUMEROS NATURALES

NORBERTO CUESTA DUTARI
Salamanca

1. La cuestión fundamental sobre la existencia del conjunto N de todos los números naturales

Sin definiciones ω-asintóticas parece imposible construir el Análisis matemático.

En efecto: consiste la definición ω-asintótica de un número real en dar por existente y unívocamente determinada a la ω-sucesión de sus cifras respecto a un alfabeto decimal, el diádico por ejemplo, cuando hayamos enunciado, en forma finita, la construcción de la cifra a_{n+1} partiendo de la cifra a_n.

Mediante una definición ω-asintótica damos por exsistente, y satisfactoriamente determinada, a la expresión ω-decimal diádica $a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$ que satisface a la igualdad $a^2 = 2$, que nos parece bien y definidamente planteada.

Igualmente, mediante una definición ω-asintótica, hemos admitido, en el curso de estas líneas, queda determinado unívocamente un número real del que demostramos es el elemento frontera de una bipartición ordenada que haya sido previamente definida sobre el léxico de los números reales.

En lo esencial, consiste la definición ω-asintótica en dar por existente a la sucesión completa cuyos elementos son los signos de los números naturales; a saber, la sugerida por estos términos

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000, ...

que son los signos finitos, en el alfabeto decimal diádico, de los números naturales.

Y si damos por definida perfectamente a esa sucesión infinita, es porque es finito el enunciado de la regla que seguimos para construir la palabra numérica inmediatamente siguiente a la que designa al número natural n.

Empero, es un hecho que nos consta segurísimamente, que no podemos escribir jamás todas las palabras numéricas que integrarían al conjunto N.

Es claro, por tanto, que el conjunto N no tiene una existencia física y real, sino una existencia ideal y casi teológica.

Y es que los números naturales los pensamos como los cardinales de los conjuntos finitos, y estos cardinales se nos presentan como ex-sistentes antes e independientemente de nuestra operación física de nombrarlos.

Y eso es lo que alegaría un matemático, idealista y platónico, en favor de la ex-sistencia del conjunto N de todos los números naturales.

Más, porque no podemos físicamente nombrarlos a todos individualmente, es por lo que Zenón negó fuera posible que Aquiles alcanzara a la tortuga. Y eso que lo contrario nos consta en la observación sensible de los dos móviles con-currentes.

2. La axiomática de Dedekind - Peano en su versión por Landau (*)

Es necesaria una fe teológica (1) para dar por resuelta, con los axiomas llamados de Peano, la cuestión sobre el infinito de los numerales finitos propuesta en el § precedente.

Esperamos demostrarle al lector, con el análisis que vamos a hacer de los axiomas de Peano, que con los axiomas de éste nada se resuelve, pues dichos axiomas postulan, un poco camufladamente, que «existe, ontológica e idealmente, el conjunto N de todos los números naturales» y que podemos, en consecuencia, razonar sobre el conjunto N sin temor a dar con la contradicción.

He aquí los axiomas de Peano en la versión de Landau:

Axioma 0. Hay un conjunto Z, no vacío, a cuyos elementos llama números naturales.

Axioma 1. A uno de los elementos de Z lo llama el número 1.

Axioma 2. Hay una representación funcional uniforme σ, que asocia, a cada número natural n, otro número natural $n\sigma$, al que llama el inmediato siguiente al n.

Axioma 3.1 (de infinitud). Cualquiera que sea $n \varepsilon Z$, $n\sigma \neq 1$. Es decir, el número 1 no es el inmediato siguiente de otro número natural.

Axioma 3.2 (de infinitud). Jamás son idénticos los inmediatos siguientes de dos números diferentes.

Axioma 4 (de inducción). Que un conjunto numérico M es inductivo, quiere decir que está cerrado respecto al operador secuencial; es decir, que $n \varepsilon M$ implica que también $n \varepsilon M$. Se postula ahora que si un conjunto inductivo contiene al 1, contiene a todos los números naturales.

3. Los axiomas 0 y 2 presuponen infinitos signos, más no la infinitud del conjunto Z

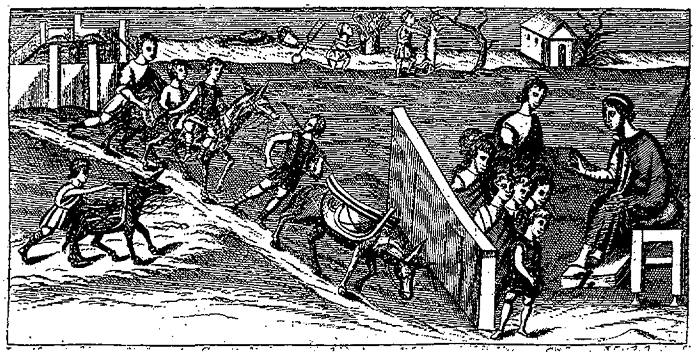
En efecto: si a designa a un elemento de Z, son signos diferentes

$$a,\ a\sigma,\ a\sigma^2,\ a\sigma^3,\ a\sigma^4,\ \text{etc.}$$

Se entiende obviamente

(*) Dedekind, R., *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888). Peano, G., *Arithmetices principia nova methodo exposita* (1889). Landau, E., *Grundlagen der Analysis* (1930).

(1) Que es axiomática la concepción de la Teología en Santo Tomás, está claro en los Art° 7° y 8° de la Q. 1ª de la 1ª Parte de su *Suma Teológica.* Escribe en el Art° 7°: «Principiis huius scientiae sunt articuli fidei». Y en el Art° 8°: «Si adversarius nihil credat eorum quae divinitus revelantur, non remanet amplius via ad probandum articulos fidei». Ver también los Artículos 2° y 8°. En éste nos dice de dónde se toman los axiomas teológicos, enlazando con lo que bellísimamente escribió en su última obra, la hermosísima *Brevis summa fidei* (ed. bilingüe 1880): «Fides autem praelibatio quaedam est illius cognitionis quae nos in futuro beatos facit» (cap. 1°).



$$a\sigma^{n+1} = (a\sigma\ )\sigma$$

Claro es que no se exige que todos estos diferentes signos representan elementos diferentes de Z. Por ejemplo, el conjunto

$$Z = \{a, b, c\}$$

con la tabla funcional

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

nos daría

$$\begin{array}{ccccc} a & " & a\sigma = b & " & a\sigma^2 = c \\ a\sigma^3 = a & " & a\sigma^4 = b & " & a\sigma^5 = c \\ & & \text{etc.} & & \end{array}$$

Como se ve, el proceso de reiteración de σ exige el conocimiento de la numeración.

4. Los axiomas 3.1 y 3.2, que obviamente presuponen el 0, el 1 y el 2, exigen la infinitud del conjunto numérico Z

En efecto: el conjunto Zσ es un subconjunto estricto del Z. Pero es biunívoca la co-rrespondencia que define σ entre Z y Zσ; luego Z cumple la definición de infinito dada por Dedekind en su *Was sind und was sollen die Zahlen?*.

He aquí por qué calificamos como axiomas de infinitud al par conjugado 3.1 y 3.2, que co-responden al 3 y 4 del librito de Landau.

Resulta, por tanto, que los axiomas de Peano no explican la infinitud de N: la introducen dogmáticamente.

Y la demostración que da Dedekind, en el § 66, de que existen conjuntos infinitos, es una demostración teológica, y que recuerda enormemente al argumento ontológico de San Anselmo.

Se ve fácilmente que cualquier conjunto infinito permite definir una tabla funcional σ, de modo que se cumplan los axiomas 0, 1, 2, (3.1), (3.2). Por tanto, de estos axiomas se deduce únicamente, para el cardinal de Z, $|Z| \geq \aleph_0$.

5. No exige la infinitud el axioma de inducción, ni aún acompañado del (3.2)

El conjunto

$$Z = \{1, a, b, c, d, e, f\}$$

con la tabla funcional

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c & d & e & f \\ a & b & c & d & e & f & 1 \end{pmatrix}$$

ofrece un ejemplo que cumple los axiomas 0, 1, 2, (3.2), 4. Es claro que sólo tiene un conjunto inductivo.

Pero el mismo conjunto, con la tabla funcional

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c & d & e & f \\ a & b & 1 & d & e & f & c \end{pmatrix}$$

tiene dos conjuntos inductivos, y verifica a los axiomas 0, 1, 2, (3.2). No verifica, en cambio, al axioma de inducción.

6. Los axiomas de Peano exigen $|ZH| = \aleph_0$

Se ve fácilmente, en efecto, que son «números» distintos los $n\sigma^k$, pues, en cuanto coincidieran dos diferentees, habría un valor de k para el cual $n\sigma^k = 1$, lo que contradiría al (3.1).

Una vez visto eso, que, como decimos, es fácil, como el conjunto

$$\{1\sigma^k\}_{0 \leq k < \omega}$$

es inductivo y contiene al 1, es un superconjunto del Z. esto nos da

$$|Z| \leq \aleph_0$$

Y esto, junto con lo demostrado en el § 4, nos da

$$|Z| = \aleph_0$$

7. Escolio final

Es claro que, siendo finitamente inconsistentes los axiomas de Peano, quien niegue la consistencia del infinito, negará la consistencia de los axiomas de Peano. Para convencerle de dichos axiomas, no queda más que el recurso teológico a la poética *praelibatio*.