ARTICULOS

TEOREMA DE DEDUCCION

ANTONIO GONZALEZ CARLOMAN
Oviedo

Introducción

El teorema de deducción que sigue fue expuesto en un trabajo, pendiente de publicación, sobre una axiomatización de lógica de primer orden con identidad, en que se toman como axiomas los siguientes:

$A_1 \quad P \rightarrow QVP$
$A_2 \quad PVQ \rightarrow QVP$
$A_3 \quad PV(Q \rightarrow R) \rightarrow (PVQ \rightarrow PVR)$
$A_4 \quad \forall xP \rightarrow P$
$A_5 \quad P \rightarrow \forall xP$ (Si «x» no está libre en «P»)

En este trabajo se define la derivación de la siguiente manera:

Dado un conjunto de fórmulas α_1, y otros conjuntos de fórmulas $\alpha_2,...\alpha_n$, llamamos derivación a la sucesión $\alpha_1, \alpha_2...\alpha_n$ si las fórmulas del conjunto $\alpha i + 1$ (i = 1, 2,..., n-1) se obtienen aplicando las siguientes reglas:

R_1 Si «P» y «$P \rightarrow Q$» pertenecen a αi, «Q» pertenece a $\alpha i + 1$

R_2 Si «$P \rightarrow Q$» pertenece a αi y «x» es una variable cualquiera, «$\forall xP \rightarrow \forall xQ$» pertenece a $\alpha i + 1$

R_3 Si «P» pertenece a αi y «x» es una variable libre en «P», cualquier cierre por sustitución de «x» pertenece a $\alpha i + 1$

R_4 SI «x» es una variable libre en «P» y cualquier cierre por sustitución de «x» en «P» pertenece a αi, «P» pertenece a $\alpha i + 1$

R_5 Si «P» pertenece a αi, «P» pertenece a $\alpha i + 1$

R_6 Si «P» es un axioma, «P» pertenece a $\alpha i + 1$

También convenimos en abreviar la expresión «β se deriva de α» mediante «$\alpha \models \beta$», y «$P \rightarrow Q$ es tautología» mediante «$P \Longrightarrow Q$»

En la demostración de lo que sigue citamos las siguientes propiedades demostradas en el trabajo:

III — 2 $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \models P \rightarrow R$
III — 5 $P \Longrightarrow P$
III — 16 $P, Q \models P \wedge Q$
III — 25 $P \Leftrightarrow Q \models P \rightarrow Q$

III — 37 $P \wedge (P \rightarrow Q) \Longrightarrow Q$

III — 69 $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \Longleftrightarrow P \rightarrow Q \wedge R$

III — 85 $Q \Longrightarrow P \rightarrow Q$

IV — 6 $P \rightarrow Q \models P \rightarrow \forall x Q$ (Si «x» no está libre en «P»

IV — 26 $\forall x (P \rightarrow Q) \Longrightarrow \forall x P \rightarrow \forall x Q$

Teorema de deducción

Si α es un conjunto de fórmulas cerradas y «P» es una fórmula también cerrada, y representamos por «α, P» al conjunto resultante de agregar «P» a α, se cumple: $\alpha, P \models Q$ si y sólo si $\alpha \models P \rightarrow Q$

De izquierda a derecha

Si suponemos se cumple $\alpha, P \models Q$, entonces tendremos una derivación $\alpha, P \models \alpha_2 \models \alpha_3 \models \ldots \models \alpha m$, en que «Q» pertenece a αm, y vamos a demostrar que si «T» es una fórmula perteneciente a cualquiera de los conjuntos posteriores a «α, P» en la derivación, se verificaría: $\alpha \models P \rightarrow T$. Con esto quedaría demostrado que $\alpha \models P \rightarrow Q$, ya que Q pertenece a αm que es posterior en la derivación a «α, P». Haremos esta demostración por inducción sobre el número de orden de los conjuntos posteriores a «α, P» en la derivación, y para ello demostraremos:

1 — Si «T» pertenece a α_2, se cumple: $\alpha \models P \rightarrow T$

2 — Si se cumple, para cualquier fórmula «T» de αn, que $\alpha \models P \rightarrow T$; entonces se cumpliría que, siendo «T» cualquier fórmula de $\alpha n + 1$, $\alpha \models P \rightarrow T$

Demostración de 1:

Si «T» pertenece a α_2, es obtenida a partir de «α, P» aplicando alguna de las reglas de derivación, y puede ocurrir:

A — Que apliquemos R_6
En este caso «T» es un axioma y entonces:
$\alpha \overset{1}{\models} T \overset{2}{\models} P \rightarrow T$

1. Por R_6
2. Por III - 85

B — Que apliquemos R_5

En este caso «T» pertenece a «α, P»; y puede ocurrir que «T» sea «P», en cuyo caso tendremos:

$\alpha \overset{1}{\models} P \rightarrow T$

1. Por III-5 y ser «T» y «P» la misma fórmula. Puede ocurrir también que «T» pertenezca a α, en cuyo caso tendremos:

$\alpha \overset{1}{\models} T \overset{2}{\models} P \rightarrow T$

1. Por R_5
2. Por III-85

C — Que apliquemos R_4

En este caso «T» sería abierta en una variable «x», y todos los cierres por sustitución de «x» en «T» pertenecerían a «α, P», y tendremos:

$\alpha \overset{1}{\models}$ todos los cierres por sustitución de «x» en $P \rightarrow T \overset{2}{\models} P \rightarrow T$

1. Por ser los cierres por sustitución de «x» en «T» pertenecientes a «α, P» y ser «P» fórmula cerrada

2. Por R_4

D — Que apliquemos R_3

Este caso no puede presentarse por ser «α, P» un conjunto de fórmulas cerradas.

E — Que apliquemos R_2

En este caso «T» sería de la forma $\forall xR \rightarrow \forall xS$, siendo $R \rightarrow S$ perteneciente a «α, P», y entonces:

$\alpha \overset{1}{\models} P \rightarrow (R \rightarrow S) \overset{2}{\models} P \rightarrow \forall x\ (R \rightarrow S),\ \forall x\ (R \rightarrow S) \rightarrow (\forall xR \rightarrow \forall xS) \overset{3}{\models} P\ /\ (\forall xR \rightarrow \forall xS)$

1. Por pertenecer $R \rightarrow S$ a «α, P»

2. Por IV - 6 y IV - 26

3. Por III - 2

F — Que apliquemos R_1

En este caso «T» se obtiene a partir de dos fórmulas de «α, P» del tipo «R» y «$R \rightarrow T$», y entonces:

$\alpha \overset{1}{\models} P \rightarrow R,\quad P \rightarrow (R \rightarrow T) \overset{2}{\models} (P \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow (R \rightarrow T)) \overset{3}{\models} P\ /\ R \wedge (R \rightarrow T),\ R \wedge (R \rightarrow T) \rightarrow T \overset{4}{\models} P \rightarrow T$

1. Por pertenecer a «α, P», «R» y «$R \rightarrow T$»

2. Por III-16

3. Por III-69, III-25 y III-37

4. Por III-2

Demostración de 2:

Si «T» pertenece a $\alpha n + 1$, es obtenida a partir de «αn» aplicando alguna de las reglas de derivación, y puede ocurrir:

A — Que apliquemos R_6

En este caso «T» sería un axioma y se razona como en 1-A

B — Que apliquemos R_5

En este caso «T» ya se supone cumple la condición.

C — Que apliquemos R_4

En este caso «T» sería abierta en una variable «x», y todos los cierres por sustitución de «x» en «T» pertenecerían a αn y se razona como en 1 — C.

D — Que apliquemos R_3

En este caso «T» sería obtenido mediante un cierre por sustitución de una variable «x» en una fórmula «R» perteneciente a αn, y entonces:

$\alpha \overset{1}{\models} P \rightarrow R \overset{2}{\models} P \rightarrow T$

1. Por cumplirse la propiedad por hipótesis, por pertenecer «R» a αn

2. Por R_3

E — Que apliquemos R_2

En este caso «T» sería de la forma $\forall xR \rightarrow \forall xS$, siendo $R \rightarrow S$ perteneciente a αn, y se razona como en 1 — E

F — Que apliquemos R_1

En este caso «T» se obtiene a partir de dos formulas de αn del tipo R y $R \rightarrow T$, y se razona como en 1 — F.

De derecha a izquierda:

Si suponemos que se cumple $\alpha \models P \rightarrow Q$, entonces:

$\alpha, P \overset{1}{\models} P,\ P \rightarrow Q \overset{2}{\models} Q$

1. Por R_5 y lo supuesto

2. Por R_1