# ¿EXISTE CAMBIO ESTRUCTURAL EN PRESENCIA DE CRECIMIENTO EXÓGENO?

**Leonardo Raffo***

**Resumen**

**Raffo, Leonardo. "¿Existe cambio estructural en presencia de crecimiento exógeno?", *Cuadernos de Economía*, v. XXIV, n. 42, Bogotá, 2005, páginas 49-88**

*En este artículo se propone un modelo de crecimiento exógeno de tres sectores basado en una estructura sencilla de equilibrio general que replica los patrones de cambio estructural por los que han atravesado muchos países. El modelo demuestra que en el caso de economías relativamente cerradas, sin sectores dinámicos y en las que buena parte de la población no ahorra por sus bajos niveles de ingreso, el cambio estructural puede ser explicado por la acumulación de capital per cápita suponiendo preferencias no homotéticas de los consumidores. En esas condiciones, la acumulación de capital per cápita es una condición suficiente para el cambio estructural, porque actúa como mecanismo activador de la ley de Engel.*

**Palabras clave:** cambio estructural, ley de Engel, mecanismo activador, crecimiento exógeno. **JEL:** E21, O41, O14.

* Profesor Asistente del Departamento de Economía de la Universidad del Valle, Cali, Colombia. Este artículo hace parte de una investigación sobre los procesos de cambio estructural en latinoamérica que adelanta el grupo de Crecimiento y Desarrollo Económico de la Universidad del Valle. Enviar los comentarios al correo: leoraff@yahoo.es. Artículo recibido el 19 de enero de 2005, aprobada su publicación el 1 de junio del mismo año.

**Abstract**

**Raffo, Leonardo. "Can structural change accompany exogenous growth?",** ***Cuadernos de Economía*****, v. XXIV, n. 42, Bogotá, 2005, pages 49-88**

*This article proposes an exogenous growth model for three sectors based on a simple general equilibrium structure replicating the patterns of structural change which have affected many countries. The model shows that structural change can be explained by per capita capital being accumulating by supposing consumers' non-homotetic preferences in the case of relatively closed economies having no dynamic sectors and where a good part of the population cannot accrue savings due to their low income levels. In these particular conditions, accumulating per capita capital represents a sufficient condition for structural change, because it acts as an activating mechanism as described in Engel's law.*

**Key words:** structural change, Engel's law, activating mechanism, exogenous growth. **JEL:** E21, O41, O14.

**Résumé**

**Raffo López, Leonardo. "Existe-t-il un changement structurel en présence d´une croissance exogène ?",** ***Cuadernos de Economía*****, v. XXIV, n. 42, Bogotá, 2005, pages 49-88**

*Nous proposons dans cet article un modèle de croissance exogène de trois secteurs basé sur une structure simple d´équilibre général qui reproduit les patrons de changements structurels que de nombreux pays ont traversé. Le modèle démontre que dans le cas d´économie relativement fermées, sans secteurs dynamiques et où une grande partie de la population n´économise pas du fait de ses bas niveaux de revenus, le changement structurel peut être expliqué par l´accumulation de capital par habitant en supposant des préférences non homothétiques des consommateurs. Dans ces conditions, l´accumulation de capital par habitant est une condition suffisante pour le changement structurel, parce qu´il agit comme un mécanisme activateur de la loi de Engel.*

**Mots clés :** changement structurel, loi de Engel, mécanisme activateur, croissance exogène. **JEL:** E21, O41, O14.

Los procesos de desindustrialización en Estados Unidos, en varios países europeos y en Japón, así como la vertiginosa terciarización de casi todas las economías del mundo, incluida la mayor parte de los países en desarrollo, revelan que aún queda mucho por entender de la dinámica de cambio estructural. La teoría neoclásica del crecimiento, quizá por haberse concentrado en el análisis de las trayectorias de crecimiento balanceado bajo el influjo de los "hechos de Kaldor", aún no ha avanzado mucho a este respecto.

En un brillante artículo que da las pautas de lo que conjeturo es un programa de investigación promisorio, Kongsamut *et al.* (2001) se preguntan: ¿existe un modelo de crecimiento consistente con los hechos de Kaldor y con la reasignación masiva y paulatina de trabajo del sector agrícola al sector terciario?[1] Su respuesta es afirmativa. ¡Existe ese modelo, siempre que se cumplan ciertas restricciones cruzadas de los parámetros del modelo![2] Y la trayectoria resultante se denomina trayectoria de crecimiento balanceado generalizada (*generalized balanced growth path*): una trayectoria que capta los hechos claves del crecimiento balanceado y es consistente con la dinámica de cambio estructural. El problema de esta respuesta, como bien señalan Ngai y Pisarides (2004) es que impone una restricción que ata los parámetros de las preferencias (a la Stone-Geary) –que dan origen a la no homoteticidad de las preferencias– a los parámetros de las funciones de producción, y viola una de las convenciones más arraigadas de la macroeconomía moderna: la plena independencia de las preferencias y la tecnología (Ngai y Pisarides 2004). Pero no podemos negar la pertinencia de su pregunta, que lleva a otra de igual envergadura en

---

1 En particular, estos autores se plantean así la pregunta para el caso de Estados Unidos: "¿existe un modelo de crecimiento consistente con los hechos de Kaldor y con las reasignaciones masivas que se han experimentado en Estados Unidos durante el último siglo?" (Kogsamut *et al.* 2001).

2 Restricciones sobre las preferencias y la tecnología, por ejemplo.

el plano empírico. ¿Cómo conciliar los hechos de Kaldor con los hechos de Kuznets? (Clark 1940, Kuznets 1957, Chenery 1960).

Es posible que muchos de los modelos posteriores en este campo apunten en esta dirección. Por ello, la pregunta relevante para la investigación es: ¿cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de trayectorias de crecimiento balanceado generalizado? Para responderla con claridad debemos emprender una investigación exhaustiva sobre la naturaleza y los determinantes de los procesos dinámicos de cambio estructural. ¿Cuáles son los fenómenos económicos que gobiernan los procesos de cambio estructural? ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de cambio estructural? Para avanzar en este camino es necesario construir un entramado teórico a partir de análisis transversales cuidadosos de los modelos teóricos que han tratado el problema, no sólo los que están inscritos claramente en el programa neoclásico de investigación del crecimiento[3], sino que también hay que releer –desde la perspectiva heurística de la teoría económica contemporánea– los análisis heterodoxos del cambio estructural que parten de premisas opuestas a las del mundo del crecimiento balanceado, como los trabajos de Baumol (1967), Fuchs (1965) y Pasinetti (1981), y elaborar nuevos modelos que respondan interrogantes específicos que nos acerquen a la solución de los enigmas que aún subsisten en esta materia.

En este artículo propongo un modelo que da un primer paso en la construcción de dicho entramado teórico pues resuelve un problema clave para responder las dos últimas preguntas formuladas: ¿existe cambio estructural en presencia de crecimiento exógeno? Mi hipótesis general acerca de la existencia de procesos de cambio estructural es que el cumplimiento de la ley de Engel junto con la presencia de mecanismos activadores de esa ley son condiciones necesarias y suficientes para la existencia de cambio estructural[4].

3 Ver Matsuyama (1992), Cornwall y Cornwall (1994), Park (1995), Quibria y Harrigan (1996), Rowthorn y Ramaswany (1997), Echevarría (1997), De Groot (1998), Kongsamut *et al.* (2001), Laitner (2000), Föllmi y Zweimüller (2002), Ngai y Pissarides (2004).

4 Donde los procesos de cambio estructural son todas las dinámicas que modifican la estructura del empleo o la producción en el largo plazo. En este trabajo me concentro en los sectores que producen bienes finales. En esta etapa de la investigación no se ha abordado aún el análisis de los procesos de cambio estructural que afectan a las actividades intermedias, porque si bien juegan un papel esencial en las transformaciones estructurales de cualquier economía, su estudio es más complejo y exige haber llegado a conclusiones definitivas en la investigación de los procesos de cambio estructural por el lado de la demanda y la producción de bienes finales.

Entiendo por mecanismos activadores de dicha ley todos aquellos procesos de acumulación de stocks que afectan en forma directa o indirecta los niveles de ingreso per cápita y, así, permiten que se modifique la estructura de la demanda derivada de preferencias no homotéticas. Estos mecanismos pueden ser de dos tipos: primero, los que inciden en el crecimiento de la productividad, como la experiencia (en cuanto parámetro tecnológico), los que determinan el crecimiento de los niveles de consumo de subsistencia[5], y segundo, los que determinan de manera directa los niveles de ingreso de los consumidores, como el capital y el trabajo. En este artículo considero únicamente los del segundo tipo en el análisis de la acumulación de capital per cápita como condición suficiente (en presencia de la ley de Engel) para la existencia de cambio estructural, sin desconocer la importancia de los del primer tipo y su estrecha relación con los del segundo. Mi punto de vista coincide con la hipótesis inicial de De Groot (1998), que indica que para explicar los procesos de cambio estructural del empleo, se deben tener en cuenta factores de demanda y de oferta, aunque este autor no parece mantener esta hipótesis en toda su amplitud, pues acepta que cuando cada sector se caracteriza por la ausencia de crecimiento de la productividad o por la ausencia de requerimientos de subsistencia o de ambos, la asignación de trabajo es constante en el tiempo, es decir, sostiene que, en general, una condición necesaria y suficiente para que la asignación de empleo no se mantenga constante en el tiempo en el caso de preferencias de elasticidad de sustitución unitaria es que haya al menos un sector con requerimientos de subsistencia y con crecimiento (más específicamente, con productividad creciente).

> En los casos más generales en los que existe al menos un sector con requerimientos de subsistencia y crecimiento, la asignación del trabajo deja de ser constante (De Groot 1998, 14).

En mi opinión, ésta sólo es una condición suficiente porque aun sin sectores dinámicos, es decir, sin sectores cuya productividad se mantenga al menos constante en el tiempo, y de buenos bienes sustitutos, pueden surgir los

5 Es lógico suponer que los requerimientos de consumo de subsistencia, más que un flujo, son un stock acumulable, en tanto su expansión es un proceso histórico e irreversible que los consumidores podrían controlar –al menos hasta cierto punto– decidiendo qué consumen en un momento determinado y en qué medida. Esto no se contrapone a la presencia de procesos de consumo adictivo, que son relevantes en las decisiones de consumo.

patrones de cambio estructural mencionados, siempre que la estructura de consumo se modifique a medida que prospere la acumulación de capital per cápita, y la producción se caracterice por un determinado ordenamiento de los niveles de productividad de los sectores. Y esto se puede demostrar –como se verá en el modelo que propongo– siempre que se suponga que hay acumulación de capital y que todos los sectores involucrados utilizan capital, puesto que la acumulación, al inducir aumentos constantes de los salarios (y de estos con respecto a la tasa de interés o rendimiento del capital), activa el efecto de la ley de Engel sobre la estructura de consumo y el crecimiento. Ésta es, de hecho, una de las razones por las que un modelo como el de Matsuyama (1992) predice una estructura del empleo constante en una economía cerrada: así se obvia la acumulación de capital. Ahora bien, el origen de la verdadera hipótesis de De Groot y de la mía es el siguiente planteamiento de Pasinetti (1981) acerca de los patrones de cambio estructural:

> Pretender discutir el progreso técnico sin considerar la evolución de la demanda haría imposible evaluar la verdadera relevancia del progreso técnico y llevaría a que la investigación careciera de significado. Los incrementos de la productividad y los incrementos del ingreso son dos caras del mismo fenómeno. *Puesto que los primeros implican los segundos*, y la composición de los primeros determina la relevancia de los segundos, no se puede considerar a los unos si se ignora a los otros (Pasinetti 1981, cursivas mías).

Con el modelo que presento en este artículo intento probar que dados ciertos supuestos sobre la tecnología y la demanda, que en parte corresponden a los de los modelos de crecimiento exógeno, la acumulación de capital per cápita es una condición suficiente para la existencia de cambio estructural. El modelo se basa en una estructura sencilla de equilibrio general y se emplea para demostrar que el crecimiento persistente del empleo y la producción en los sectores secundario y terciario, y su reducción igualmente persistente en el sector primario, fenómenos que han experimentado muchas economías del planeta en el último siglo, no se explican, en el caso de economías relativamente cerradas, únicamente por el crecimiento no balanceado de las productividades de los sectores (Baumol 1967), ni por la incidencia conjunta del crecimiento de las productividades y las modificaciones de la estructura de la demanda, como habrían demostrado los trabajos seminales de Pasinetti (1981) y Cornwall y Cornwall (1994), y, después, los de Rowthorn y Ramaswany (1997), Echevarría (1997) y De Groot (1998), ni por la existencia de una elasticidad de sustitución no unitaria en el consumo, como indican los trabajos de Quibria y Harrigan (1996) y De Groot (1998).

Procuro demostrar que, aun en ausencia de sectores dinámicos, es decir, de sectores cuya productividad crece en forma sostenida a lo largo del tiempo, y de elasticidad de sustitución no unitaria –en el consumo–, pueden surgir los patrones de cambio estructural señalados siempre que la estructura de consumo se modifique a medida que prospera la acumulación de capital, y la producción se caracterice por un determinado ordenamiento de los niveles de productividad marginal del capital de los sectores o, lo que es lo mismo, por un determinado ordenamiento de la intensidad en el uso del capital o del trabajo por sectores[6]. Ese es el caso de la mayoría de los países en desarrollo, en los que desde las primeras décadas del siglo XX comienzan a apreciarse esas tendencias seculares, pese a su atraso productivo, y, en algunos casos, pese a la ausencia evidente de sectores dinámicos. Por tal razón, la existencia de sectores dinámicos en conjunción con estructuras de demanda que cambian por variaciones del ingreso –lo que se cumple en presencia de preferencias no homotéticas– sólo es una condición suficiente para la existencia de cambio estructural en el tiempo. El modelo es un esquema de crecimiento económico exógeno de tres sectores: un sector de bienes primarios, un sector de bienes secundarios, que cumplen el papel de bienes de inversión (acumulables) y un sector de bienes terciarios; inspirado en los modelos bisectoriales de equilibrio general desarrollados por Usawa (1961, 1962)[7] en el que, siguiendo a Matsuyama (1992) y a otros autores, se introducen preferencias no homotéticas en su esqueleto básico, las cuales garantizan el cumplimiento de la ley de Engel. De ese modo se retoma un atributo esencial de los primeros modelos de crecimiento en equilibrio general, del que se han alejado buena parte de los trabajos sobre la materia: el equilibrio económico no se determina en ausencia del determinante fundamental del crecimiento y la acumulación –el capital–.

Por otra parte, pruebo que estas transformaciones estructurales inducidas por la acumulación –a las que denomino *transformaciones endógenas*, porque a medida que la economía se aproxima al estado estacionario son engendradas por el incremento paulatino de los salarios, tanto en términos absolutos

---

6 El hecho de que sea posible ordenar las intensidades del uso de los factores y que ese orden se mantenga independientemente del nivel de precios de los factores significa que las funciones de producción se caracterizan por la no reversibilidad en el uso de los factores, supuesto que juega un papel muy importante en la demostración de los teoremas fundamentales de la teoría neoclásica del comercio internacional.

7 Que en su ingenioso artículo de 1961, Solow denomina "modelos de equilibrio general en miniatura".

como con respecto a la tasa de interés– disminuye la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario. Así se corrobora una suerte de *efecto de neutralización* que la ley de Engel ejerce en el proceso de convergencia hacia el estado estacionario y que se explica por las diferencias de productividad entre los sectores. También pruebo que todas las transformaciones de la estructura de consumo que no son inducidas por la acumulación de capital per cápita –a las que llamo *transformaciones exógenas*– causadas por procesos de expansión de las necesidades básicas no ligados a la acumulación[8], o por cambios sociodemográficos plasmados en variaciones del tamaño promedio de los hogares que modifican los requerimientos de consumo de subsistencia, si se supone que la unidad de análisis en el lado del consumo son las familias y no los individuos[9], limitan la capacidad de ahorro e inciden en los niveles de largo plazo de las variables per cápita. Estas ideas respaldan una de las hipótesis que Nurkse sugirió en 1953 con respecto a los efectos de la expansión de los requerimientos de consumo de subsistencia, a saber, que ésta puede deteriorar la capacidad de ahorro de la economía y, además, que la expansión de este tipo de consumo puede originar procesos dinámicos en el consumo, que aumentan el tamaño del mercado y fomentan la inversión. Ortiz (1995) probó esta última en el caso de una economía cuya producción agregada se expresa a través de una función de producción lineal a la Rebelo (Kongsamut *et al.* 2001) que genera rendimientos constantes a escala.

En la siguiente sección presento el modelo. En la tercera resuelvo el equilibrio competitivo. Y luego analizo el crecimiento y el cambio estructural. Las proposiciones y pruebas matemáticas pertinentes se resumen en el anexo que aparece al final del artículo.

---

8 Ver Ortiz (1995) donde *a priori* y en el contexto de un modelo agregado de equilibrio general intertemporal, se supone que los requerimientos de consumo de subsistencia, modelados mediante una función de utilidad intertemporal logarítmica crecen exponencialmente. La expansión de necesidades básicas también se podría modelar como un proceso endógeno a la acumulación, en cuyo caso la transformación de la estructura del gasto sería endógena según mi conceptualización.

9 Los cambios en los requerimientos mínimos de consumo, que en este caso se pueden entender como cambios en los niveles de consumo de subsistencia familiar, se explican por modificaciones graduales o súbitas de diversos factores sociodemográficos, como el tamaño del hogar, su estructura por edad y género, y las características ocupacionales de sus miembros. Entonces, la estructura de consumo no depende únicamente de los precios y del ingreso de la unidad de gasto, sino también de factores sociodemográficos, que se pueden sintetizar en la variable tamaño de los hogares para modelarlos con la misma estructura analítica, sin gran esfuerzo adicional. En este caso, el tamaño de los hogares estaría ligado intrínsecamente a las preferencias de las familias.

## EL MODELO

Este modelo analiza los efectos de la modificación de la estructura de consumo sobre la producción, el empleo y el crecimiento en una economía donde se producen tres tipos de bienes: manufacturas, que cumplen el papel de bienes de inversión acumulables[10], y dos bienes de consumo: bienes primarios y servicios o bienes terciarios. La estructura de consumo se expresa mediante las participaciones de bienes primarios y de servicios en el consumo total. Puesto que se supone que la elasticidad de sustitución de bienes agrícolas por manufacturas es unitaria (en el consumo), dichas participaciones, expresadas en términos monetarios, no se alteran debido a cambios (transitorios o permanentes) de los precios relativos[11]. Por ello, la modificación de la estructura de consumo depende del nivel de ingreso y de los requerimientos de consumo de subsistencia –que se suponen constantes– y en la solución del modelo se puede prescindir de los precios relativos de los dos tipos de bienes de consumo, concentrándonos en la participación de cada bien en el gasto total. Las relaciones de Engel o relaciones ingreso-gasto son claves en el análisis porque a partir de ellas se encuentra la expresión reducida de la participación en el consumo, la cual capta la estructura de consumo de la economía.

---

10 La razón para suponer que las manufacturas son acumulables y representan bienes de inversión es que las partidas de gasto más representativas de la formación interna bruta de capital, como maquinaria y equipos en general, pertenecen al sector secundario. Esto implica que el concepto de capital es ortodoxo, pues no incluye capital humano ni capital social. De no ser así, sería más pertinente suponer que los bienes de capital corresponden en parte, a bienes del sector secundario y, en parte, a bienes del sector terciario, que no se consumen en el presente. Pero esto implicaría condiciones diferentes a las que se proponen en este trabajo. Para un modelo riguroso, que considera, además de un sector exclusivamente de bienes de inversión y otro de bienes de consumo, un tercer sector de materias primas consumibles e invertibles, ver el trabajo de Weitzman (1971). Por razones similares, Kogsamut *et al.* consideran que los bienes acumulables pertenecen al sector de manufacturas. “El supuesto de que sólo se puede invertir el producto manufacturero es consistente con las tablas de insumo producto de Estados Unidos. Según éstas, los sectores manufacturas y construcción produjeron entre el 90% y el 93% de la inversión durante el período 1958-1978” (Kongsamut *et al.* 2001, 6).

11 Las preferencias Cobb-Douglas –sean o no homotéticas– permiten descartar el efecto de los cambios sostenidos en los precios relativos de los bienes de consumo en la estructura del gasto y el empleo. Este efecto es, en cambio, fundamental en otros trabajos, como los de Quibria y Harrigan (1996) o De Groot (1998), donde el cambio sostenido de precios se debe al crecimiento sostenido de la productividad de los sectores. En su modelo de crecimiento desbalanceado, Baumol (1967) supone implícitamente preferencias de elasticidad de sustitución unitaria, lo que implica una elasticidad precio de la demanda unitaria.

Además, se supone que los asalariados tienen fuertes restricciones de ingreso, pues carecen de riqueza, y no pueden ahorrar. Los capitalistas ahorran la totalidad de sus rentas, así que en el modelo no hay lugar para la optimización intertemporal del consumo y se hace hincapié en los bajos niveles de ingreso de la mayor parte de la población. Es sorprendente que a pesar de la prosperidad y la rápida acumulación de riqueza en los países industrializados durante las últimas décadas, en gran parte de los países en desarrollo haya sucedido todo lo contrario.

Se supone que la oferta de trabajo es inelástica con respecto al salario para evitar las complicaciones de los fenómenos migratorios y de las variaciones en el esfuerzo de los trabajadores, es decir, de la elección entre trabajo y ocio. Así, el crecimiento de la mano de obra es exógeno. Para facilitar el análisis de las modificaciones de la estructura de consumo ocasionadas por cambios sociodemográficos, más exactamente, por cambios en el tamaño promedio de los hogares, suponemos que el número de hogares en un momento dado equivale a la mano de obra total en ese momento. Esto tiene sentido si se considera que en cada hogar hay un solo preceptor de ingresos: el 'cabeza de familia' o 'jefe del hogar'. Se supone, además, que hay competencia perfecta y que no hay desempleo, es decir, que toda la población económicamente activa está empleada. Esto no significa que toda la población esté empleada, sino que cada empleado puede tener más de una persona inactiva a su cargo, según el tamaño del hogar[12].

Los tres sectores tienen funciones de producción Cobb-Douglas con derivadas primeras y segundas de los factores definidas, cóncavas, con rendimientos constantes a escala y productividades marginales decrecientes de los factores, que satisfacen las condiciones de Inada. Sean:

$$Y_i = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}, \qquad i = 1,2,3... \qquad [1]$$

las funciones de producción de bienes primarios (1), servicios (2) y manufacturas o bienes de inversión (3), respectivamente, donde $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$. Instantáneamente, las dotaciones de factores están dadas y se reparten entre los tres sectores de acuerdo con sus precios de equilibrio. Se tiene, entonces, que:

$$\overline{K} = K_1 + K_2 + K_3 \qquad [2]$$

$$\overline{L} = L_1 + L_2 + L_3 \qquad [3]$$

12 El modelo permite analizar las consecuencias indirectas de posibles migraciones a través de cambios en el tamaño promedio de los hogares, *ceteris paribus* el número de hogares.

La tasa de crecimiento de la mano de obra, $n$, es exógena. Es decir, $n = \dot{L}(t)/L(t)$. Se supone una función de ahorro 'clásica' que implica que el ahorro depende totalmente de los beneficios, que se ahorran en su totalidad (la propensión marginal a consumir de los capitalistas es nula). Los asalariados consumen todos sus salarios (su propensión marginal a ahorrar es nula). Puesto que el ahorro debe ser igual a la inversión, *ex ante* y ex *post*, se debe cumplir:

$$rK = p_3 Y_3 \qquad [4]$$

donde la inversión corresponde a la producción de máquinas multiplicada por su precio en términos de los bienes agrícolas ($p_3$). El capital se deprecia a una tasa constante $\delta$.

Se supone que los hogares tienen preferencias Stone-Geary, que son no homotéticas[13]:

$$u(c_1, c_2) = \varepsilon \log(c_1 - \bar{c}_1) + \log c_2 \qquad [5]$$

donde los argumentos de la función de utilidad representan el consumo de bienes primarios (1) y de servicios (2), respectivamente; $\bar{c}_1$ debe ser positivo y representa los requerimientos de consumo de subsistencia por unidad de consumo, y $\varepsilon$ representa el sesgo de consumo hacia los bienes primarios[14]. Como ya se dijo, existe competencia perfecta en las tres industrias. Las dos ecuaciones siguientes garantizan el equilibrio en cada uno de los mercados de bienes de consumo. El precio de los bienes agrícolas se normaliza a uno, pues es el numerario:

$$Y_1 = c_1 L \qquad [6]$$

$$p_2 Y_2 = p_2 c_2 L \qquad [7]$$

donde $p_2$ es el precio de las manufacturas en términos de bienes agrícolas.

---

13 Ver Matsuyama (1992) y De Groot (1998). Debemos tener presente que la función de utilidad a la Stone-Geary para $n$ bienes distintos se puede tratar como un caso especial de una función CES con requerimientos de consumo de subsistencia del tipo $c = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i\,(c_i - \bar{c}_i)^{\rho}\right]^{1/\rho}$, donde $\rho$ tiende a cero. Con esta notación, la función general a la Stone-Geary sería: $c = \prod_{i=1}^{n}(c_i - \bar{c}_i)^{a_i}$, que expresada en logaritmos, para $n = 2$ y $\bar{c}_2 = 0$, se puede escribir tal como aparece en [5], utilizando $\varepsilon$, el sesgo hacia el consumo de los bienes primarios, en vez de $a_1$ y $a_2$, que se interpretan como parámetros distributivos del consumo. Ver Deaton y Mullbauer (1983).

14 Si se quieren analizar los fenómenos demográficos a través de cambios en el tamaño promedio de los hogares, se puede suponer que $\bar{c} = \gamma\tau$ es el consumo de subsistencia de la familia, donde $\tau$ corresponde al tamaño promedio de los hogares, es decir, el tamaño del hogar de la familia representativa, y $\gamma$ corresponde a los requerimientos de subsistencia de cada miembro.

## EQUILIBRIO COMPETITIVO

El equilibrio competitivo funciona de la siguiente manera: dadas unas dotaciones de capital y de trabajo determinadas históricamente, las industrias demandan por separado una proporción de ambos factores de acuerdo con la tasa de precios prevaleciente en el mercado $(w/r)$ que maximiza sus beneficios, pero inmediatamente hacen ajustes que afectan los precios de los factores hasta lograr la eficiencia productiva: una situación en la que no es posible aumentar la producción de un bien sin disminuir la de otro, es decir, cuando se alcanza la frontera de posibilidades de producción. Para cada tasa de $(w/r)$ se determina un conjunto de costos marginales y un vector de precios de mercado. Por su parte, las familias eligen sus propias canastas óptimas de consumo de acuerdo con su restricción presupuestaria (sus salarios, pues los capitalistas no consumen) y la tasa de precios $(p_1/p_2)$. La eficiencia del consumo se logra cuando las tasas marginales de sustitución de todas las familias se igualan, y se reparten las existencias de cada bien de la manera más eficiente posible. Las proporciones de los bienes producidos óptimamente se deben ajustar a la demanda relativa de cada bien, hasta que las relaciones marginales de sustitución entre los dos bienes de consumo se igualan a su tasa de transformación respectiva, garantizando la elección de la canasta óptima y un vector de precios de equilibrio, de cumplirse la ley de Walras. Quizá el lector desprevenido se sorprenda porque este modelo no se resuelve como otros modelos de equilibrio general de crecimiento económico –como el de Matsuyama (1992)– reemplazando en la línea de expansión del consumo las funciones de producción, las condiciones de eficiencia de la producción y los precios de equilibrio, sino que se explora un método alternativo basado en el planteamiento explícito de las participaciones del gasto de los bienes que se consumen, que se expresan como funciones de la razón salario-tasa de interés. Este método se basa en otro que permite obtener la solución de equilibrio general, no a partir de la línea de expansión de los bienes, sino del equilibrio de los mercados de la economía, teniendo en cuenta la ley de Walras. Su gran ventaja –que, en mi opinión, es un aporte a la heurística de este programa de investigación– es que permite dilucidar claramente las características del proceso dinámico de cambio estructural. De hecho, el modelo de Matsuyama se puede resolver utilizando este método, y se llegaría exactamente a su mismo resultado. Si los lectores más escépticos abrigan dudas, el modelo se puede representar matricialmente, diferenciando totalmente sus nueve ecuaciones básicas, para obtener un sistema de nueve ecuaciones con nueve incógnitas, cuyo jacobiano (el determinante de su matriz estructural) es distinto de cero, de modo que el modelo es causal.

## Producción

Las condiciones de primer orden del problema de maximización de los beneficios en cada una de las industrias garantizan que:

$$p_i A_i \alpha_i \left(\frac{K_i}{L_i}\right)^{\alpha_i - 1} = r$$

$$p_i A_i (1-\alpha_i)\left(\frac{K_i}{L_i}\right)^{\alpha_i} = w \qquad \text{Sea } i = 1, 2, 3...$$

De modo que:

$$\omega = \frac{(1-\alpha_i)}{\alpha_i}\left(K_i / L_i\right) \qquad \text{donde} \qquad \omega = \frac{w}{r}$$

o, en términos intensivos:

$$r = p_i A_i \alpha_i k_i^{\alpha_i - 1} \qquad \text{donde} \qquad k_i = K_i / L_i \quad \text{e} \quad y_i = Y_i / L_i \qquad [8]$$

$$w = p_i A_i (1-\alpha_i) k_i^{\alpha_i} \qquad [9]$$

que, dividiendo por [8] da:

$$w = \left(\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}\right) k_i \Rightarrow k_i = \left(\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}\right)\omega \qquad [10]$$

Por otra parte, se dividen entre sí las expresiones de [8], y con [10] se llega a las expresiones reducidas de los precios relativos:

$$p_2 = \frac{\beta_2}{\beta_1}\omega^{\alpha_1 - \alpha_2} \qquad [11]$$

$$p_3 = \frac{\beta_3}{\beta_1}\omega^{\alpha_1 - \alpha_3} \qquad [11']$$

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{\beta_2}{\beta_3}\omega^{\alpha_3 - \alpha_2} \qquad [11'']$$

donde $\beta_i = \frac{1}{A_1 \alpha_i^{\alpha_i} (1-\alpha_i)^{1-\alpha_i}} \qquad i = 1, 2, 3...$[15]

15 A estas expresiones de los precios también llegamos obteniendo las funciones de costos de las firmas y derivándolas por $y_i$ respectivamente. Estas expresiones son funciones uno a uno de las tasas de precios de los factores en los precios de las mercancías, lo que está íntimamente ligado al hecho de que en las funciones de producción Cobb-Douglas no hay reversibilidad en la intensidad de los factores.

Derivando estas expresiones con respecto a $\omega$, se observa que si $\omega$ aumenta los dos primeros precios disminuyen, y aumenta el tercero. Esto implica que a medida que aumenta $\omega$, $p_3$ baja más que $p_2$. Sustituyendo las expresiones reducidas de los dos primeros precios en [9] se obtiene:

$$w = \frac{\beta_i}{\beta_1}\omega^{\alpha_1 - \alpha_i} k_i^{\alpha_i} \tag{9'}$$

Sustituyendo en esta última expresión [10] se obtiene:

$$w = 1/\beta_1 \omega^{\alpha_1} \tag{9''}$$

una expresión reducida de $w$ en términos de $\omega$.

Derivando las expresiones reducidas de $w$ y $k_i$ con respecto a $\omega$ se obtiene:

$$\frac{\partial w}{\partial \omega} = \alpha_1 \beta_1 \omega^{\alpha_1 - 1} > 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial \omega} = \left(\frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}\right) > 0 \tag{13}$$

que constatan que los niveles de capital por trabajador empleado en cada sector y el salario nominal son funciones crecientes de la razón de precios de los dos factores en competencia perfecta. En el anexo aparece la proposición que establece formalmente que el salario y la tasa de interés, así como el capital por trabajador de cada sector son funciones de $\omega$. La gráfica 1 en la que $\overline{\omega}$ es la razón salario-tasa de interés de equilibrio, ilustra el equilibrio de las tres industrias. Los ángulos formados en el segundo cuadrante entre el eje $\omega$ y las líneas rectas con origen en $\overline{\omega}$ representan las pendientes de las funciones de producción respectivas, y con esa estructura productiva se utiliza más capital per cápita en los sectores más intensivos en capital.

Por comodidad, las ecuaciones de las dotaciones de factores se reescriben como:

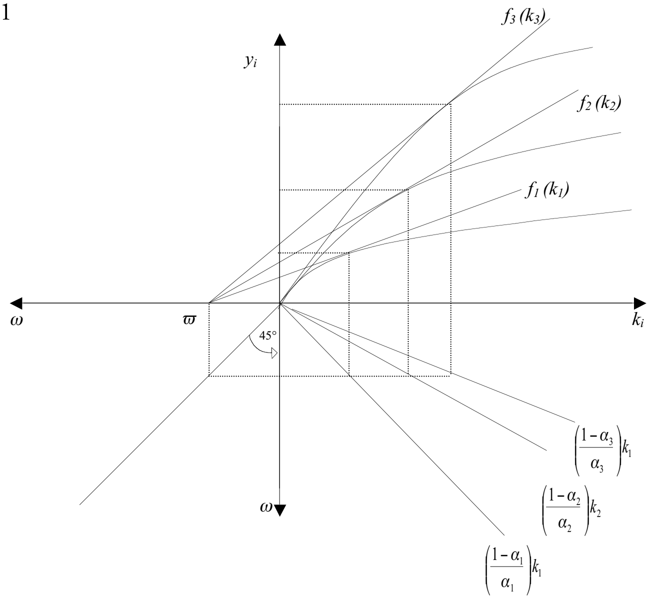
$$\rho_1 k_1 + \rho_2 k_2 + \rho_3 k_3 = k \tag{2'}$$

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 1, \text{ donde } \rho_i = L_i / L, \qquad i = 1, 2, 3... \tag{3'}$$

Definiendo $r$ de [8] en términos de los bienes de inversión, sustituyendo en [4], dividiendo a ambos lados por $L$, simplificando, dividiendo y multiplicando el miembro derecho por $L_3$, se tiene:

$$\alpha_3 k = k_3 \rho_3 \tag{4'}$$

GRÁFICA 1




Combinando esta ecuación con [8'] para los bienes de inversión, la asignación del trabajo en este sector se puede escribir como:

$$\rho_3 = (1 - \alpha_3)\frac{k}{\omega} \qquad [14]$$

## Consumo

Cada familia maximiza:

$$u(c_1, c_2) = \varepsilon \log(c_1 - \bar{c}_1) + \log c_2 \qquad \text{sujeto a} \qquad c_1 + p_2 c_2 = w$$

Se debe cumplir, además, que si todo el capital per cápita se asigna al sector de bienes necesarios se logra producir más de los requerimientos mínimos de subsistencia por persona, para que las funciones de utilidad de las familias estén bien definidas y sea posible la existencia de agentes racionales, es decir[16]:

16 La ecuación [15] no sólo se puede establecer en términos del consumo de un agente representativo, también se puede establecer en términos de los agregados relevantes, como $(L_1 f_1(k) = A_i k^{\alpha_1} L_i (= c_1 L) > \bar{c}_1 L) \Longleftrightarrow F_1(K,L) > \bar{c}_1 L$. Matsuyama (1992) emplea una condición similar, la ecuación [6] de su modelo establece que, de asignarse toda la mano de obra al sector agrícola, éste puede producir un nivel de bienes estrictamente mayor que el que satisface los requerimientos de consumo de subsistencia. "[La primera desigualdad establece que] el sector agrícola es suficientemente productivo para proporcionar el nivel de alimentos de subsistencia para todos los consumidores" (Matsuyama 1992, 6).

$$f_1(k)p_1 = A_i k^{\alpha_1} p_1 \, (= c_1) > \bar{c}_1 \qquad [15]$$

Las condiciones de primer orden de este problema de maximización restringida implican que:

$$p_2 = \frac{c_2 \varepsilon}{c_1 - \bar{c}_1} \qquad [16]$$

Las funciones de demanda marshallianas se deducen despejando el multiplicador de Lagrange ($\lambda$) a partir de las ecuaciones de primer orden y reemplazando:

$$c_1 = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} w + \frac{1}{1+\varepsilon} \bar{c}_1 \qquad [17]$$

$$c_2 = \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{1}{p_2} w - \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{1}{p_2} \bar{c}_1 \qquad [18]$$

donde se aprecia que el consumo de ambos bienes depende positivamente del salario, mientras que el consumo de bienes agrícolas depende positivamente de los requerimientos de consumo de subsistencia, y el de manufacturas inversamente[17]. Las siguientes expresiones definen la proporción del gasto en cada uno de los bienes consumidos. Es claro que la proporción del consumo en alimentos con respecto al total es mayor que la de servicios:

$$\frac{p_1 c_1}{w} = \frac{1}{1+\varepsilon}\left[\varepsilon + \frac{\bar{c}_1}{w}\right] \qquad [19]$$

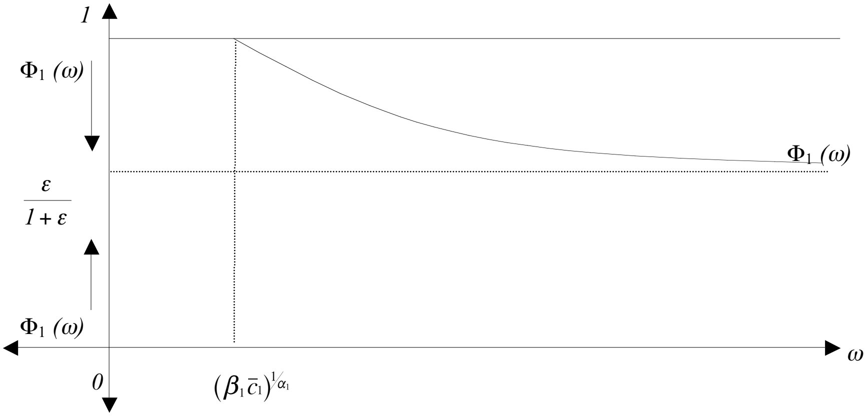
$$\frac{p_2 c_2}{w} = \frac{1}{1+\varepsilon}\left[1 - \frac{\bar{c}_1}{w}\right] \qquad [20]$$

donde $\frac{c_1}{w}$ y $\frac{p_2 c_2}{w}$ sintetizan la estructura de consumo de esta economía. Como $w$ depende de $\omega$ es pertinente considerar que las proporciones del gasto son funciones de $\omega$ y se pueden definir las funciones $\Phi_1(\omega) = \frac{c_1}{w}$ y $\Phi_2(\omega) = \frac{p_2 c_2}{w}$. Esto permite redefinir las funciones $r(\omega)$, $w(\omega)$ y $k_i(\omega)$, puesto que son dominios, y sus rangos cambian al actuar la ecuación que determina los requerimientos de consumo de subsistencia (ver el anexo).

17 La ley de Engel se cumple, ya que $\frac{\partial c_1}{\partial w}\frac{w}{c_1} = \frac{w}{w + \frac{\bar{c}_1}{\varepsilon}} < 1$ y $\frac{\partial c_2}{\partial w}\frac{w}{c_2} = \frac{w}{w - \bar{c}_1} > 1$, lo que prueba que, en términos porcentuales, un aumento del salario lleva a un aumento menos que proporcional del consumo de bienes agrícolas, pero a un aumento más que proporcional del consumo de manufacturas.

La gráfica 2 ilustra el comportamiento de la estructura del gasto de la economía. Se verifica la existencia de cambio estructural por el lado del consumo en función de la razón salario-tasa de interés.

GRÁFICA 2




## Ley de Walras

En términos agregados se tiene:

$$rK = p_3 Y_3 \qquad [4]$$

y además:

$$Y_1 = c_1 L \qquad [6]$$

$$p_2 Y_2 = p_2 c_2 L \qquad [7]$$

Dividiendo las dos últimas ecuaciones por $wL$, multiplicando y dividiendo sus miembros izquierdos por $L_i$, y reordenando se obtiene:

$$\rho_i = \frac{\Phi_i w / p_i}{A_i k_i^{\alpha_i}}, \qquad i = 1, 2... \qquad [21]$$

Utilizando [8] y [9],

$$\rho_1 = \Phi_1 (\omega)(1 - \alpha_1) \qquad [22]$$

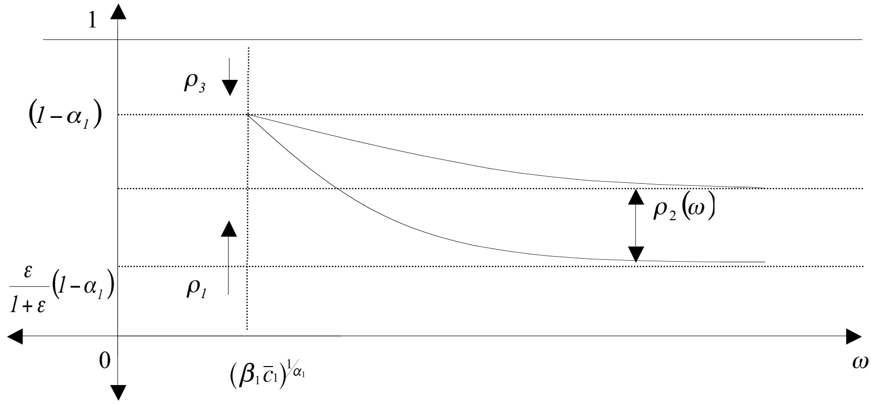
$$\rho_2 = \Phi_2(\omega)(1-\alpha_2) \qquad [23]$$

Estos resultados muestran que las proporciones de mano de obra en los dos sectores consumibles dependen de sus proporciones de consumo (que dependen de la razón salario-tasa de interés) multiplicadas por la intensidad del trabajo en esos mismos sectores. Teniendo en cuenta [3'] se obtiene:

$$\rho_3 = \Phi_1(\omega)\alpha_1 + \Phi_2(\omega)\alpha_2 \qquad [24]$$

expresión que aclara que la proporción de mano de obra en el sector de bienes de capital (manufacturas) corresponde a las proporciones de gasto de los bienes consumibles ponderadas por la participación del capital de esos sectores. Las últimas tres ecuaciones permiten definir las proporciones de la mano de obra en cada sector como funciones de $\omega$ (ver el anexo). La gráfica 3 ilustra la existencia de cambio estructural para la mano obra en los tres sectores en función de la razón salario-tasa de interés, para la economía en su conjunto[18]. Es claro entonces que existe cambio estructural siempre que $\omega$ se modifique. Y, como veremos, puesto que esta variable cambia a través del tiempo a medida que prospera la acumulación de capital per cápita habrá cambio estructural en presencia de crecimiento exógeno.

GRÁFICA 3




18 Las asíntotas de la gráfica se confirman cuando se calculan las segundas derivadas de las tres últimas funciones definidas con respecto a la razón salario-tasa de interés.

## Solución del equilibrio instantáneo

Sustituyendo $\rho_1$ y $\rho_3$ en [2'], utilizando [3'] y despejando $k$ se obtiene una expresión, únicamente en función de $\omega$, que completa el análisis del equilibrio general instantáneo:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{1-\alpha_3}[\Phi_1(\omega)\alpha_1 + \Phi_2(\omega)\alpha_2], \quad \forall\omega \in (\omega_{minef}, \omega_{max}) \qquad [25]$$

Así se prueba que el capital por trabajador de cada sector y la tasa de capital-trabajo total son funciones de la razón de precios de factores, en condiciones de competencia perfecta y rendimientos constantes a escala. Derivando con respecto a $\omega$, y teniendo presente que $\Phi_1'(\omega) = -\Phi_2'(\omega) < 0$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{1-\alpha_3}[\Phi_1(\omega)\alpha_1 + \Phi_2(\omega)\alpha_2 + \omega(\Phi_1'(\omega)(\alpha_1 - \alpha_2))] > 0, \quad \forall\omega \in (\omega_{minef}, \omega_{max}) \qquad [26]$$

En el anexo se muestra que este último resultado es crucial para garantizar que el modelo es causal, es decir, que en un momento dado todas las variables endógenas $(y_1, y_2, y_3, k_1, k_2, k_3, \omega, \rho_2 \text{ y } \rho_3)$ dependen de la tasa de capital per cápita agregada. Se puede plantear el siguiente teorema:

**Teorema 1:** el modelo estático conformado por [1] a [7] está determinado de manera única por $k$, es decir, es causal si y sólo si la función $k(\omega)$ tiene inversa.

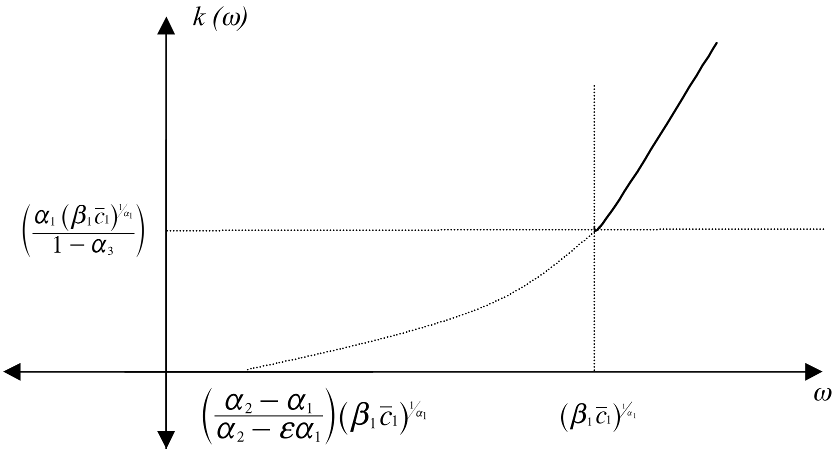
**Prueba:** por la proposición 5 (ver anexo).

La implicación de la última proposición es esencial: como la economía en su conjunto depende del capital per cápita total –en un momento dado, existe una dotación de capital a partir del proceso de acumulación–, a medida que éste se modifica, también lo hace la razón salario-tasa de interés y, en consecuencia, existe cambio estructural: un incremento suave y sostenido en la proporción de mano obra empleada en los sectores secundario y terciario (y también en las proporciones de gasto de los mismos sectores), así como una disminución suave y sostenida en el sector agrícola (y en la proporción de consumo de este tipo de bienes)[19]. Por tanto, en este modelo la existencia de la ley de Engel y la presencia de incrementos sostenidos en la razón salario-tasa de interés son condiciones necesarias y suficientes para la dinámica de cambio estructural, y

19 No obstante, aún falta presentar la dinámica de crecimiento para aclarar cómo y en qué medida crece el capital per cápita.

los incrementos actúan como un mecanismo activador de la ley de Engel. Pero si se relajara el supuesto de un ordenamiento particular de las intensidades de capital de los sectores $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ (y, en consecuencia, el de las productividades marginales del capital), es posible que a pesar de cumplirse las condiciones anteriores no hubiese cambio estructural si la intensidad del capital en el sector de bienes agrícolas fuera más alta que la del sector de servicios, pues impediría el incremento de la razón salario-tasa de interés al incrementarse el capital per cápita. Puesto que en ese caso un incremento dado del capital per cápita no necesariamente induciría incrementos en la razón salario-tasa de interés $(\omega)$. De acuerdo con [26] se deduce, entonces, que una condición suficiente para la existencia de cambio estructural en presencia de crecimiento exógeno es la existencia de preferencias no homotéticas y acumulación de capita per cápita, en conjunción con un sector de consumibles de demanda elástica (con respecto al ingreso) más intensivo en capital, que el sector que, en cambio, se enfrenta a una demanda inelástica. El mecanismo que activa la ley de Engel es, pues, la acumulación de capital per cápita, ya que incrementa el ingreso de las familias y así, modifica la estructura del consumo y del empleo. La gráfica 4 ilustra la relación de causalidad entre el capital per cápita total y la razón tasa salario-tasa de interés, que cierra el modelo en su parte estática[20].

GRÁFICA 4




20 Como se puede ver, la curva es convexa. Esto se verifica calculando la segunda derivada de $k(\omega)$ con respecto a $\omega$.

Por otra parte, la existencia de cambio estructural bajo la acción de la ley de Engel, que se activa a través de la acumulación de capital per cápita y se expresa, por el lado del consumo mediante la derivada de las proporciones del gasto con respecto a la razón capital-trabajo ($\Phi_1'(\omega) = -\Phi_2'(\omega)$), implica que la elasticidad de sustitución de factores del conjunto de la economía, $\sigma = \frac{dk}{d\omega} \cdot \frac{\omega}{k}$, es mayor que 1, a pesar de que la elasticidad de sustitución de factores de cada sector por separado es 1. En efecto, a partir de [25] y [26] se puede probar que la elasticidad de sustitución es:

$$\sigma = 1 + \left(\frac{\Phi_1'(\omega)(\alpha_1 - \alpha_2)}{\Phi_1(\omega)\alpha_1 + \Phi_2(\omega)\alpha_2}\right) > 1 \qquad [27]$$

donde el segundo término de la expresión es mayor que cero. Para este resultado no sólo es imprescindible el ordenamiento específico de las intensidades del capital por sectores que hemos supuesto, sino que la intensidad del primer sector debe ser estrictamente menor que la del segundo. Es interesante observar que en ausencia de la ley de Engel ($\bar{c} = 0$ y, por ende, $\Phi_1'(\omega) = -\Phi_2'(\omega) = 0$) no hay cambio estructural y la solución del modelo se simplifica notablemente. En tal caso, las preferencias serían de tipo Cobb-Douglas, es decir, $u(c_1, c_2) = c_1^a c_2^{1-a}$, y [22], [23] y [24] se reducirían a:

$$\rho_1 = a(1 - \alpha_1) \qquad [22^*]$$

$$\rho_2 = (1 - a)(1 - \alpha_2) \qquad [23^*]$$

$$\rho_3 = a\alpha_1 + (1 - a)\alpha_2 \qquad [24^*]$$

Así, [25] se convierte en:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{1 - \alpha_3}[a\alpha_1 + (1 - a)\alpha_2] \qquad [25^*]$$

con una derivada positiva con respecto a la razón salario-tasa de interés:

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{1 - \alpha_3} > 0 \qquad [26^*]$$

que garantiza la causalidad de este modelo alternativo. Aunque en este caso es posible calcular explícitamente la inversa de $k(\omega)$:

$$\omega(k) = \frac{(1 - \alpha_3)k}{[a\alpha_1 + (1 - a)\alpha_2]}$$

Además, a partir de [26*] se puede probar que en tales circunstancias la elasticidad de sustitución del conjunto de la economía es unitaria.

## Consumo y ahorro agregados

El consumo agregado de la economía equivale al consumo per cápita multiplicado por $L$. Puesto que el primero no es otra cosa que el salario nominal, el consumo agregado se puede expresar como:

$$C = \frac{1}{\beta_1} \omega^{\alpha_1} \cdot L \tag{28}$$

El ahorro agregado de la economía se puede expresar como:

$$S = P_3 k_3^{\alpha_3} \rho_3 \cdot L \tag{29}$$

utilizando [10], [11] y [14] con algunas operaciones algebraicas se llega a:

$$S = \beta_1^{-1} \omega^{\alpha_1 - 1} (1 - \alpha_3) k(\omega) \cdot L \tag{30}$$

La producción agregada de la economía se encuentra a partir del equilibrio macroeconómico, dado por:

$$Y = Y_1 + P_2 Y_2 + P_3 Y_3 \tag{31}$$

expresándolo como el producto per cápita multiplicado por $L$, se procede a sustituir las expresiones reducidas de los precios y de las proporciones del gasto que aparecen en el miembro derecho de la identidad macroeconómica, así como los niveles de producto por trabajador de los tres sectores en términos de las funciones respectivas, expresando los niveles de capital correspondientes en función de la razón salario-tasa de interés, se llega a una expresión reducida en función de $\omega$, que representa la producción agregada:

$$Y = L\left[(1 - \alpha_3)\beta_1^{-1} \omega^{\alpha_1 - 1} \cdot k(\omega) + \beta^{-1} \omega^{\alpha_1}\right] \tag{32}$$

Con las ecuaciones anteriores se pueden encontrar las tasas de ahorro y de consumo o propensiones medias al ahorro y al consumo de la economía. De [28] y [31], simplificando y utilizando [25], se obtiene:

$$pmec(\omega) = \frac{c}{y}(\omega) = \frac{1}{1 + \Phi_1(\omega)\alpha_1 + \Phi_2(\omega)\alpha_2} \tag{33}$$

que, como era de esperar está entre 0 y 1, y depende inversamente de $\omega$. Es decir, a medida que se incrementa la cantidad de capital existente y, en consecuencia también $\omega$, disminuye la propensión media al consumo. Este resultado corrobora la existencia de cambio estructural y la participación creciente de las manufacturas (bienes de inversión) en el producto total. Además, se puede probar que este comportamiento depende de la acción de la ley de Engel en conjunción con el ordenamiento de las intensidades de capital por sectores que hemos supuesto. Se tiene que:

$$pmec'(\omega) = \frac{-\Phi_1'(\omega)(\alpha_1 - \alpha_2)}{1 + \Phi_1(\omega)\alpha_1 + \Phi_2(\omega)\alpha_2} < 0 \qquad [34]$$

De manera análoga, utilizando [29] y [30], simplificando y usando [25] se obtiene una expresión reducida de la tasa de ahorro de la economía, que depende positivamente de $\omega$, efecto determinado por la acción de la ley de Engel:

$$pms(\omega) = \frac{s}{y}(\omega) = \frac{\Phi_1(\omega)\alpha_1 + \Phi_2(\omega)\alpha_2}{1 + \Phi_1(\omega)\alpha_1 + \Phi_2(\omega)\alpha_2} \qquad [35]$$

$$pmes'(\omega) = \frac{\Phi_1'(\omega)(\alpha_1 - \alpha_2)}{1 + \Phi_1(\omega)\alpha_1 + \Phi_2(\omega)\alpha_2} > 0 \qquad [36]$$

Mediante un procedimiento similar se puede probar que en el modelo sencillo con preferencias de tipo Cobb-Douglas, en ausencia de la ley de Engel y de cambio estructural, la tasa de ahorro de la economía y la propensión media al consumo, representadas por las siguientes ecuaciones, son constantes:

$$pmec(\omega) = \frac{1}{1 + a\alpha_1 + (1-a)\alpha_2} \qquad [33^*]$$

$$pms(\omega) = \frac{a\alpha_1 + (1-a)\alpha_2}{1 + a\alpha_1 + (1-a)\alpha_2} \qquad [35^*]$$

## CRECIMIENTO ECONÓMICO

En este modelo la acumulación depende de la inversión –la que a su vez depende del ahorro– y de la tasa de depreciación, que se supone constante; la inversión se transforma en nuevo capital físico que crece paulatinamente a una tasa menor, mientras que el ahorro disponible depende de la tasa de interés real (deflactada por el precio de los bienes de inversión), que disminuye progresivamente ligada a la productividad marginal decreciente del sector productor de bienes de inversión a medida que prospera la acumulación. La tasa de crecimiento se comporta de modo similar que en un modelo tipo Solow. Inicialmente es mayor que la tasa de crecimiento de la población, pero luego, cuando alcanza el estado estacionario, se vuelve igual a esta última y la economía alcanza una senda de crecimiento balanceado. En la primera fase de crecimiento –denominada transición al estado estacionario– hay cambio estructural, porque se activa la ley de Engel, mientras que en la fase posterior hay estabilidad estructural, ya que el crecimiento balanceado genera un crecimiento proporcional del valor de las remuneraciones factoriales y los ingresos per cápita de los agentes se mantienen constantes, en particular, la razón salario-tasa de interés, el salario nominal y la tasa de interés[21]. En la primera fase de crecimiento, la acumulación de capital per cápita *activa* la ley de Engel al permitir un crecimiento paulatino y decreciente de las dotaciones de las familias consumidoras. Cabe advertir que en la fase de transición, la remuneración por la utilización del capital (tasa de interés) disminuye paulatinamente a una tasa decreciente, pero el ahorro total crece, porque el stock de capital crece en mayor proporción que la reducción de la remuneración. Esta última fuerza lleva a que en la primera fase de crecimiento se modifique la distribución del ingreso en favor de la clase capitalista. Por ello el proceso de cambio estructural implica, como ya se mostró, que la proporción de la inversión y del ahorro con respecto al producto total, así como la proporción de la mano de obra empleada en ese sector, crecen inicialmente. Esto se puede verificar en la ecuación [36] donde se muestra que la tasa de ahorro crece en el estado estacionario. Como el ahorro total $rK$ de [4] equivale a la inversión total y corresponde a la clase capitalista (por hipótesis), demostrar que la tasa de ahorro es creciente equivale a demostrar que la distribución del producto (o del ingreso) cambia progresivamente en favor de la clase capitalista. Análogamente, como el consumo total $WL$ corresponde en su totalidad a la clase asalariada, demostrar –la ecuación [34]– que la propensión media al consumo es decreciente equivale a demostrar que su participación en el producto total disminuye en la fase de transición. Así se prueba que este rasgo del cambio estructural (la participación creciente del ahorro y la inversión en el producto total) se explica por el rápido crecimiento del stock de capital físico durante la fase de transición al estado estacionario, que modifica progresivamente la distribución del ingreso. Este efecto es otra condición suficiente para la existencia de cambio estructural: si las clases sociales tienen patrones de demanda diferentes, las modificaciones de la distribución del ingreso entre ellas engendran cambio estructural. Este fenómeno es consistente con la teoría, puesto que el mecanismo activador de ese proceso es la acumulación de capital per cápita durante la primera fase de crecimiento económico. Además, es consistente con la hipótesis de Kuznets de que hay una relación directa entre crecimiento y desigualdad durante las primeras etapas de desarrollo de las economías.

---

21 Se puede probar que los precios relativos también se mantienen constantes en la fase de estado estacionario. Esto se verifica más adelante al demostrar que, en el equilibrio de largo plazo, la razón salario-tasa de interés no crece, y se mantiene en un nivel fijo.

## La ecuación fundamental

La tasa de variación del stock de capital está dada por:

$$\dot{K} = Y_3 - \delta K \qquad [37]$$

donde $Y_3$ corresponde a la inversión real. De [4]:

$\dot{K} = \dfrac{rK}{p_3} - \delta K$, y dividiendo a ambos lados por $K$:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{r}{p_3} - \delta$$

En la que se sustituye a $r$ por su equivalente en términos de productividad de las 'máquinas':

$\dfrac{\dot{K}}{K} = \alpha_3 k_3^{\alpha_3 - 1} - \delta$ que, en términos per cápita queda:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \alpha_3 k_3^{\alpha_3 - 1} - (n + \delta) \qquad [38]$$

donde la tasa de crecimiento del capital per cápita depende directamente de la productividad marginal del capital del sector bienes de inversión e inversamente de la suma de la tasa de depreciación y la tasa de crecimiento de la mano de obra. Utilizando [11] en [38] y simplificando se obtiene:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \beta_3^{-1} \omega^{\alpha_3 - 1} - (n + \delta)$$

que sólo es función de $k$, teniendo en cuenta el teorema 1 (ver el anexo). Así, la dinámica del modelo se representa mediante la siguiente expresión:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \beta_3^{-1} \omega(k)^{\alpha_3 - 1} - (n + \delta) \qquad [39]$$

La trayectoria del capital se encuentra solucionando esta ecuación diferencial no lineal de $k$ expresada en forma general. Aquí no lo hacemos, ya que no se obtuvo la expresión explícita de $\omega(k)$ al ser $k(\omega)$ una función racional de $\omega$. No obstante, en la siguiente sección se encuentra la expresión paramétrica de $k$, que representa el equilibrio de largo plazo. Se pueden plantear los siguientes teoremas:

**Teorema 2:** $\forall n, \delta \in R^*$ que satisfacen $0 < \beta_3^{-1} \left(\beta_1 \bar{c}_1\right)^{\frac{\alpha_3 - 1}{\alpha_1}} < n + \delta$ existe un valor único $k = k^* \, n$ tal que $h(k^*) = 0$.

**Prueba:** ver el anexo.

**Teorema 3:** estabilidad local, $k^*$ es localmente estable.

**Prueba:** ver el anexo.

**Teorema 4:** estabilidad global (Arrow-Block-Hurwicz)[22], el sistema dinámico definido por la proposición 6 es globalmente estable.

**Prueba:** ver el anexo.

## Solución numérica

Con rendimientos constantes a escala la economía tiende necesariamente a un equilibrio de largo plazo o estado estacionario, en el que la tasa de crecimiento del stock de capital es igual a la tasa de crecimiento de la mano de obra, es decir, la tasa crecimiento del capital per cápita se anula. En el estado estacionario:

$$\frac{\dot{k}}{k} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{L}}{L} \Longleftrightarrow \alpha_3 k_3^{*\alpha_3 - 1} = n + \delta \qquad [40]$$

El nivel de capital por trabajador en el sector de bienes de inversión del estado estacionario es determinado en esta última ecuación, para un valor específico del capital per cápita en este sector, dados unos valores de $n$ y $\delta$, por la productividad marginal del capital en el sector, independientemente de la demanda de consumo. Por [10], se deduce que en el equilibrio de largo plazo $\omega = \omega^*$ se mantiene constante, y se puede especificar en conjunción con [40], lo que a su vez, también por [10], permite determinar los niveles de capital por trabajador de estado estacionario para los otros dos sectores. La razón capital-trabajo total de equilibrio se deduce de [25] con el valor de $\omega = \omega^*$, y ésta sí depende de las condiciones de la demanda de consumo, más exactamente, de la estructura de consumo, ya que esta cumple un papel relevante en la distribución del la mano de obra de la economía. Entonces, de [40]:

$$k_3^* = \left(\frac{n + d}{\alpha_3}\right)^{\frac{1}{\alpha_3 - 1}} \qquad [41]$$

que reemplazando en [10] se obtiene:

$$\omega^* = \left(\frac{1 - \alpha_3}{\alpha_3}\right)\left(\frac{n + d}{\alpha_3}\right)^{\frac{1}{\alpha_3 - 1}} \qquad [42]$$

Sustituyendo esta expresión en [25], y expresando $\Phi_1$ y $\Phi_2$ en términos de $\omega$, se llega a una expresión paramétrica de $k^*$:

---

22 Ver Arrow y Hurwicz (1959).

$$k^{*}(\omega^{*}) = \left(\frac{(n+\delta)^{\frac{1}{\alpha_3-1}}\alpha_3^{\frac{-\alpha}{\alpha_3-1}}}{1+\varepsilon}\right)\left[(\alpha_1\varepsilon+\alpha_2) - \beta_1(1-\alpha_3)^{-\alpha_1}\alpha_3^{\alpha_1\alpha_3}(n+\delta)^{1-\alpha_1}\bar{c}_1(\alpha_2-\alpha_1)\right] \quad [43]$$

## CAMBIO ESTRUCTURAL

Sabiendo cómo se modifica la acumulación de capital a través del tiempo es posible retomar el análisis del cambio estructural. La estructura de consumo y, por ende, la de producción y del empleo se pueden modificar por dos razones diferentes.

Por una parte, los aumentos endógenos de los salarios y de la razón salario-tasa de interés fruto de la acumulación de capital per cápita dan lugar a aumentos del consumo de servicios mayores que los del consumo de alimentos, que inciden en la estructura de la producción y el empleo. Además, este *mecanismo activador* de la ley de Engel (el incremento del salario y de la razón salario-tasa de interés) induce un incremento de la demanda de bienes de inversión al activar un proceso de cambio en la distribución del ingreso basado en el rápido incremento del capital físico[23]. Este mecanismo se tiende a debilitar a medida que prospera la acumulación de capital, por cuanto de [39] la tasa de crecimiento del capital per cápita tiende a ser cada vez menor (teniendo presente que $h(k) < 0$), y se extingue justo en el momento en el que se llega al estado estacionario, y los niveles de $k$ y $\omega$ se tornan constantes, tal como indican [42] y [43].

También pueden ocurrir transformaciones exógenas si se modifica el parámetro de requerimientos de consumo de subsistencia, por ejemplo, mediante procesos de expansión de las necesidades básicas no ligados a la acumulación o cambios sociodemográficos, plasmados en variaciones del tamaño promedio de los hogares, que modifican los requerimientos de consumo de subsistencia.

### Transformaciones endógenas

Este tipo de transformaciones estructurales no altera los niveles de capital per cápita, ingreso per cápita y consumo per cápita de crecimiento balanceado, porque en el estado estacionario la razón de precios de factores es constante;

---

23 Para esto último falta mostrar cómo se traduce esta transformación estructural de la demanda y la producción en una transformación del empleo –lo cual veremos más adelante–.

el capital y la mano de obra crecen a la misma tasa. Sin embargo, los niveles per cápita sí se afectan durante la transición al estado estacionario. Se trata de un efecto de neutralización entre la ley de Engel y el ritmo de acumulación de capital per cápita: a medida que avanza la acumulación de capital per cápita disminuye el peso de los alimentos en el consumo. Y a medida que disminuye el peso de los alimentos, baja la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario.

Esto obedece a que el sector de bienes agrícolas es menos capital intensivo que los de servicios y bienes de inversión; al aumentar $\omega$ disminuye la parte de la mano de obra asignada al sector de bienes agrícolas como respuesta de la oferta a los cambios en la demanda de consumo (se demuestra observando los cambios en [6] y [7] teniendo en cuenta que la oferta es infinitamente elástica en ambos sectores, y derivando [21] con respecto a $\omega$ para $\rho_1$) mientras que aumenta la parte de la mano de obra asignada al sector de servicios –lo que a su vez se demuestra derivando [23], es decir, $\rho_2$ con respecto a $\omega$ –. Como el sector de bienes agrícolas es más intensivo en trabajo (o menos intensivo en capital) que el sector de servicios, la disminución de la asignación del trabajo en el primer sector es mayor que su aumento en el segundo. Por [3'] debe aumentar la parte de la mano de obra asignada al sector de bienes de inversión. ¡He aquí una explicación de por qué hay cambio estructural en el empleo que afecta al sector productor de bienes de inversión! La derivada de $\rho_1$ con respecto a $\omega$ es $-\Phi_2'(\omega)(1-\alpha_1)$, mientras que la derivada de $\rho_2$ con respecto a $\omega$ es $\Phi_2'(\omega)(1-\alpha_2)$; teniendo en cuenta que $\Phi_2'(\omega) = -\Phi_1'(\omega)$. Se puede observar que la primera es mayor en términos absolutos. Además, sustituyendo [23] en [14], la derivada de $\rho_3$ con respecto a $\omega$ es $\Phi_2'(\omega)(\alpha_2-\alpha_1)$, que es necesariamente negativa. Es claro que $|-\Phi_2(\omega)(1-\alpha_1)| > |\Phi_2(\omega)(1-\alpha_2)| > |\Phi_2(\omega)(\alpha_2-\alpha_1)|$.

A pesar del efecto anterior de las intensidades de capital, cuando aumenta $\omega$ aumenta el capital per cápita en los tres sectores, aunque más en el de bienes de inversión que en los otros dos, y más en el de servicios que en el bienes agrícolas (por [10]). Por tanto, el efecto de neutralización de la ley de Engel cuando se modifica $\omega$ no impide que caiga la productividad marginal del capital en el sector de bienes de inversión, pero sí retarda la llegada al estado estacionario, ya que al aumentar $\rho_3$ se produce una *reasignación interindustrial* de factores que atenúa la utilización de capital per cápita en el sector de inversión (en relación con la de los otros dos, por lo que el trabajo aumenta más en este sector que en el de servicios, mientras que en el de mano de obra disminuye). Así, este proceso libera mano de obra hacia los sectores dos y tres. Cabe recalcar que si no se cumple la ley de Engel ($\Phi_2'(\omega) = -\Phi_1'(\omega) = 0$), la participación de la mano de obra no se modifica en ningún sector cuando aumenta $\omega$.

Este comportamiento muestra también que dadas estas características tecnológicas, la industrialización consiste en el incremento de la proporción de capital per cápita asignada al sector de bienes de inversión, o en el incremento paulatino de la proporción de mano obra asignada al mismo sector. Aunque en este modelo el proceso de acumulación lleva a que la proporción de mano de obra total empleada aumente en dos sectores y disminuya en el sector agrícola, el menos productivo. Y predice que los aumentos graduales en la participación de la mano obra en el sector industrial son directamente proporcionales al aumento de la proporción del capital agregado y per cápita empleada en este sector.

**Teorema 5:** hay cambio estructural en presencia de crecimiento exógeno.

**Prueba:** derivando con respecto a la razón salario-tasa de interés [22], [23] y [24] se obtienen respectivamente:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega} = -\Phi_2'(\omega)(1-\alpha_1) < 0,$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial \omega} = \Phi_2'(\omega)(1-\alpha_2) > 0,$$

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial \omega} = \Phi_2'(\omega)(\alpha_2-\alpha_1) > 0,$$

por lo que, teniendo en cuenta el crecimiento de la economía, se verifica el cambio estructural siempre que tenga sentido la modificación de la razón salario-tasa de interés. Como por la proposición 6 ésta depende de *k*, y éste sólo cambia hasta que se alcanza el estado estacionario de [39], (teoremas 1, 2 y 3), sólo hasta ese momento existe cambio estructural en presencia de crecimiento exógeno.

**Corolario:** las transformaciones endógenas en la estructura de la demanda causadas por la ley de Engel disminuyen la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario.

**Prueba:** en presencia de la ley de Engel la velocidad de convergencia es:

$\dfrac{d\left(\dot{k}/k\right)}{dk} = 1/\beta_3\,(\alpha_3-1)\omega(k)^{\alpha_3-1}\dfrac{d\omega}{dk} < 0$ , mientras que en su ausencia es:

$$\left.\frac{d\left(\dot{k}/k\right)}{dk}\right|_{\Phi_2'(\omega)=0} = 1/\beta_3\,(\alpha_3-1)\omega(k)^{\alpha_3-1}\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{\Phi_2'(\omega)=0} < 0$$

Como de [24] $\frac{d\omega}{dk} = -(\alpha_3 - 1)[\Phi_1(\omega)\alpha_1 + \Phi_2(\omega)\alpha_2 + \omega\Phi_1'(\omega)(\alpha_1 - \alpha_2)]$, mientras que:

$$\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{\Phi_2'(\omega)=0} = -(\alpha_3 - 1)[\Phi_1(\omega)\alpha_1 + \Phi_2(\omega)\alpha_2]$$

Se deduce que:

$\frac{d\omega}{dk} > \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{\Phi_2'(\omega)=0}$, y en este segundo caso la velocidad de convergencia es menor en términos absolutos.

## Transformaciones exógenas

Los cambios exógenos en los requerimientos de consumo de subsistencia pueden modificar los niveles de capital-trabajo ($k^*(\omega^*)$) de crecimiento balanceado –aparte de los cambios en la tasa de depreciación o en la tasa de crecimiento de la mano de obra, que aquí no se consideran–.

**Teorema 6:** las posibles transformaciones exógenas de la estructura de la demanda ocasionadas por aumentos (disminuciones) de los requerimientos de consumo de subsistencia incrementan (disminuyen), y modifican negativamente (positivamente) los niveles de capital per cápita de largo plazo *ceteris paribus* $\omega^*$.

**Prueba:** se puede comprobar que la derivada de [25], es decir, de ($k^*(\omega^*)$) con respecto a $\bar{c}$ es siempre negativa:

$$\frac{dk^*(\omega^*)}{d\bar{c}} = -\frac{\beta_1\omega^{1-\alpha_4}(\alpha_2 - \alpha_1)}{(1-\alpha_3)(1+\varepsilon)} < 0.$$

La derivada de la expresión paramétrica de ($k^*(\omega^*)$), [43], es también negativa.

La explicación económica es la siguiente: al incrementarse el consumo agregado de bienes agrícolas y disminuir el de servicios como consecuencia de un aumento de los requerimientos mínimos de subsistencia, se produce una reasignación instantánea del capital per cápita $(K/L)$, que lleva a una disminución de la productividad marginal del capital en el sector de bienes de inversión, porque aumenta la parte del capital per cápita asignada a este sector. Esto hace que $\dot{k}/k$ sea temporalmente negativo hasta alcanzar otro estado estacionario para un nivel $k^{**}(\omega^*)$ menor. La razón para ello es que ha aumentado la demanda del bien de consumo menos intensivo en capital (en consecuencia su producción), y ha disminuido la demanda del bien de consumo más intensivo en capital (y en consecuencia su producción). Como resultado, la asignación de trabajo aumenta en el sector de bienes agrícolas, más de lo que disminuye en el de servicios (esto se puede constatar derivando $\rho_1$ y $\rho_2$ de [22] y [23] con respecto a $\bar{c}$), por lo que la asignación de trabajo en el sector productor de bienes de inversión ($\rho_3$) debe caer necesariamente. Se puede observar que $\frac{\partial \rho_1}{\partial \bar{c}} = \frac{\beta_1 \omega^{-\alpha_1}}{1+\varepsilon}(1-\alpha_1)$ y que $\frac{\partial \rho_2}{\partial \bar{c}} = \frac{\beta_1 \omega^{-\alpha_1}}{1+\varepsilon}(1-\alpha_2)$, donde el valor absoluto de la primera expresión es mayor que el de la segunda. Además, utilizando [24], y derivando con respecto a $\bar{c}$ se tiene que $\frac{\partial \rho_3}{\partial \bar{c}} = \frac{-\beta \omega^{-\alpha_1}}{1+\varepsilon}(\alpha_2-\alpha_1) < 0$. Se observa de nuevo que el valor absoluto de esta expresión es menor que el de las otras dos.

Finalmente, el aumento del capital per cápita asignado instantáneamente al sector de bienes de inversión deteriora la capacidad de ahorro e impulsa la economía hacia otro estado estacionario con un nivel de capital per cápita $k^{**}(\omega^*)$, menor que el anterior. Sustituyendo [8] en [4] para los bienes de inversión y simplificando, se obtiene $\alpha_3 k_3^{\alpha_3-1} K^*(\omega^*) = Y_3 = I$. Aquí se ve claramente que siendo constante el capital en un primer momento, disminuye la productividad marginal del capital en el sector de bienes de inversión, lo que disminuye la capacidad de ahorro y la inversión real. Inicialmente, el aumento del consumo mínimo de subsistencia, aumenta el consumo agregado a costa de la inversión.

Los cambios exógenos en los requerimientos de consumo de subsistencia inciden también en la dinámica de transición de manera similar a los cambios endógenos en $\omega$, pero en sentido contrario, siempre que se presenten durante esta etapa del crecimiento.

**Proposición 7:** las posibles disminuciones exógenas de los requerimientos de consumo de subsistencia refuerzan el efecto de neutralización causado por la ley de Engel.

**Prueba:** esto se corrobora comprobando que $\frac{d\left(d\left(\dot{k}/k\right)/dk\right)}{d\bar{c}} < 0$.

## COMENTARIO FINAL

En economías medianamente industrializadas caracterizadas por la ausencia de crecimiento sostenido debido a la inexistencia de sectores productivos dinámicos, y por sectores agrícolas intensivos en mano de obra, hay cambio estructural siempre que las preferencias de las familias sean no homotéticas y haya acumulación de capital per cápita. En ese caso, la acumulación de capital per cápita, que sobreviene hasta que se alcanza el estado estacionario, es un *mecanismo activador* de la ley de Engel que actúa de dos formas. En primer lugar, incrementa progresivamente los salarios y el ingreso per cápita de los consumidores, lo que afecta en forma directa la estructura del consumo, y de ahí la de toda la demanda, la de la producción y la del empleo. En particular, tiende a estimular directamente el empleo y la producción del sector de servicios (cuya demanda es elástica con respecto al ingreso), y a desalentar el empleo y la producción del sector primario (cuya demanda es inelástica con respecto al ingreso). También tiende, indirectamente, a propiciar incrementos del empleo y la producción en el sector de bienes de inversión. En segundo lugar, desata un proceso de transformaciones en la distribución del ingreso (o el producto) en favor de la clase capitalista, estimulando el ahorro, y por tanto la producción y el empleo en las ramas de bienes de inversión, el cual es consistente con la hipótesis de Kuznets de que durante las primeras etapas del desarrollo existe una relación directamente proporcional entre el crecimiento económico y el aumento de la desigualdad en favor de la clase capitalista.

De lo anterior se deduce que, en presencia de la ley de Engel, la acumulación de capital per cápita es una condición suficiente para la existencia de crecimiento estructural. En el análisis de los procesos de cambio estructural de economías caracterizadas por crecimiento exógeno es claro que existe cambio estructural si y sólo si se cumple la ley de Engel y existen mecanismos que activen dicha ley, afectando las corrientes de ingresos. Y que esto último es un resultado de la acumulación de un stock que altera el ingreso per cápita y activa la ley de Engel: el stock de capital físico.

## ANEXO

**Proposición 1:** $\forall \omega \in \mathbf{R}^{+}$ existen por el lado de la producción las funciones:

$$k_i(\omega) = \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i} \cdot \omega : \mathbf{R}^{+} \rightarrow \mathbf{R}^{+}$$

$$w(\omega) : 1/\beta_1 \omega^{\alpha_1} : \mathbf{R}^{+} \rightarrow \mathbf{R}^{+}$$

$$r(\omega) : 1/\beta_1 \omega^{1-\alpha_1} : \mathbf{R}^{+} \rightarrow \mathbf{R}^{+}$$

continuas, con derivadas parciales positivas $\forall \omega$ para las dos primeras funciones y negativa para la segunda.

**Prueba:** en general, para cualquier función de producción del sector i se cumple:

$$\omega = \frac{f_i(k_i)}{f_i'(k_i)} - k_i, \text{ con}$$
$$\omega_{min} = \max_{i=1,2,3.}\left\{\lim_{k_i\to 0}\left[\frac{f_i(k_i)}{f_i'(k_i)} - k_i\right]\right\},$$
$$\omega_{\max} = \min_{i=1,2,3.}\left\{\lim_{k_i\to \infty}\left[\frac{f_i(k_i)}{f_i'(k_i)} - k_i\right]\right\}.$$

Como en este caso se cumplen las condiciones de Inada, se tiene que:

$$\lim_{k_i\to 0}\left[\frac{f_i(k_i)}{f_i'(k_i)} - k_i\right] = 0, \text{ así como } \lim_{k_i\to \infty}\left[\frac{f_i(k_i)}{f_i'(k_i)} - k_i\right] = \infty, \quad i = 1,2,3.$$

Por lo que $\omega_{min} = 0$ y $\omega_{max} = \infty$, lo que garantiza que el dominio de las tres funciones es $\mathbf{R}^+$.

**Proposición 2:** definiendo $\Phi_1 = \frac{c_1}{w}$ y $\Phi_2 = \frac{p_2 c_2}{w}$ se tiene que:

$$\Phi_1 : \left((\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}, \infty\right) \to \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, 1\right), \Phi_1'(\omega) < 0$$
$$\Phi_2 : \left((\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}, \infty\right) \to \left(0, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right), \Phi_2'(\omega) > 0$$

**Prueba**: se puede ver que $\forall\omega_0 \in \left((\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}, \infty\right)\left(\exists!\Phi_{10} \in \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, 1\right)\right)[(\omega_0, \Phi_{10}) \in \Phi_1]$ siendo $\omega_0$ *y* $\Phi_{10}$ valores arbitrarios de la tasa de precios de los factores y las participaciones del consumo en los dos sectores. Así mismo:

$$\forall\omega_0 \in \left((\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}, \infty\right)\left(\exists!\Phi_{20} \in \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, 1\right)\right)[(\omega_0, \Phi_{20}) \in \Phi_{12}]$$

Sustituyendo $w$ de [9”] en [18] y [19], teniendo en cuenta la proposición 1 se obtienen:

$\frac{c_1}{w} = \frac{1}{1+\varepsilon}[\varepsilon + \beta_1\omega^{-\alpha_i}\bar{c}_1]$ y $\frac{p_2 c_2}{w} = \frac{1}{1+\varepsilon}[1 - \beta_1\omega^{-\alpha_i}\bar{c}_1]$ que se pueden escribir como:

$\Phi_1(\omega) = \frac{1}{1+\varepsilon}[\varepsilon + \beta_1\omega^{-\alpha_i}\bar{c}_1]$ y $\Phi_2(\omega) = \frac{1}{1+\varepsilon}[1 - \beta_1\omega^{-\alpha_i}\bar{c}_1]$ con:

$\Phi_1'(\omega) = \frac{-\alpha_1}{1+\varepsilon}\beta_1\omega^{-\alpha_1-1}\bar{c}_1 < 0$ y $\Phi_2'(\omega) = \frac{\alpha_1}{1+\varepsilon}\beta_1\omega^{-\alpha_1-1}\bar{c}_1 > 0$ lo que implica que:

$\Phi_1'(\omega) = -\Phi_2'(\omega)$.

De la proposición 1 se tiene que, $dom\, \Phi_i \subseteq \mathrm{R}^+$. Además, [15] implica que, $\omega > (\beta_1 \bar{c}_1)^{1/\alpha_1}$[24]. Se deduce que $dom\, \Phi_i = \left((\beta_1 \bar{c}_1)^{1/\alpha_1}, \infty\right) \subseteq R^+, i = 1,2$. Por otra parte, se tiene que:

$\forall \omega \in \left((\beta_1 \bar{c}_1)^{1/\alpha_1}, \infty\right), \Phi_1(\omega) + \Phi_2(\omega) = 1$, donde: $\lim\limits_{\omega \to (\beta_1 \bar{c}_1)^{1/\alpha_1}} \Phi_1(\omega) = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, $\lim\limits_{\omega \to (\beta_1 \bar{c}_1)^{1/\alpha_1}} \Phi_2(\omega) = \dfrac{1}{1+\varepsilon}$

$\lim\limits_{\omega \to \infty} \Phi_1(\omega) = 1, \quad \lim\limits_{\omega \to \infty} \Phi_2(\omega) = 0.$

**Definición 1:** llámese a $(\beta_1 \bar{c}_1)^{1/\alpha_1}$ al límite inferior efectivo de $\omega(\omega_{minef})$, teniendo en cuenta el funcionamiento de la demanda.

**Proposición 3:** $\forall \omega \in (\omega_{minef}, \infty)$ existen:

$$k_i : \left((\beta_1 \bar{c}_1)^{1/\alpha_1}, \infty\right) \to R^+$$
$$w : \left((\beta_1 \bar{c}_1)^{1/\alpha_1}, \infty\right) \to R^+$$
$$r : \left((\beta_1 \bar{c}_1)^{1/\alpha_1}, \infty\right) \to R^+$$

continuas, con derivadas parciales positivas $\forall \omega \in (\omega_{minef}, \infty)$ para las dos primeras funciones y negativa para la segunda.

**Prueba:** por las proposiciones 1 y 2 (ver el anexo).

**Proposición 4:** existen las funciones:

$$\rho_1 : \left((\beta_1 \bar{c}_1)^{1/\alpha_1}, \infty\right) \to \left(1-\alpha_1, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(1-\alpha_1)\right), \rho_1'(\omega) < 0$$
$$\rho_2 : \left((\beta_1 \bar{c}_1)^{1/\alpha_1}, \infty\right) \to \left(0, \frac{1}{1+\varepsilon}(1-\alpha_2)\right), \rho_2'(\omega) > 0$$
$$\rho_3 : \left((\beta_1 \bar{c}_1)^{1/\alpha_1}, \infty\right) \to \left(\alpha_1, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\alpha_1 + \frac{1}{1+\varepsilon}\alpha_2\right), \rho_3'(\omega) > 0$$

**Prueba:** se tiene que $(\forall \omega_0 \in (\omega_{minef}, \infty))\left(\exists! \rho_{10} \in \left(1-\alpha_1, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(1-\alpha_1)\right)\right) \left[(\omega_0, \rho_{10}) \in \rho_1\right]$.

Asímismo, $(\forall \omega_0 \in (\omega_{minef}, \infty))\left(\exists! \rho_{20} \in \left(0, \frac{1}{1+\varepsilon}(1-\alpha_2)\right)\right)\left[(\omega_0, \rho_{20}) \in \rho_2\right]$

y $(\forall \omega_0 \in (\omega_{minef}, \infty))\left(\exists! \rho_{30} \in \left(0, \frac{1}{1+\varepsilon}(1-\alpha_2)\right)\right)\left[(\omega_0, \rho_{30}) \in \rho_3\right]$.

---

24 Esto se puede probar sustituyendo [17] en [15], expresando el salario nominal en términos de [9"] y haciendo algunas operaciones algebraicas. Esta inferencia también se puede expresar como $1/\beta_1 \omega^{\alpha_1} > \bar{c}_1$, de nuevo con [9"], y el salario nominal debe ser estrictamente mayor que el valor de los requerimientos mínimos de consumo de la familia: $w > \bar{c}_1$.

Por la proposición 3, utilizando Def1, queda claro el dominio de las tres funciones. Para los rangos respectivos se tiene que $\lim_{\omega\to\infty} \rho_1(\omega) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(1-\alpha_1)$, $\lim_{\omega\to\infty} \rho_2(\omega) = \frac{1}{1+\varepsilon}(1-\alpha_2)$, y $\lim_{\omega\to\infty} \rho_3(\omega) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\alpha_1 + \frac{1}{1+\varepsilon}\alpha_2$.

**Proposición 5:** $\forall k \in \left(\frac{\alpha_1(\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}}{1-\alpha_3}, \infty\right)$, existe $k^{-1}(k) = \omega$ tal que:

$k^{-1}: \left(\frac{\alpha_1(\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}}{1-\alpha_3}, \infty\right) \to \left((\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}, \infty\right)$.

**Prueba:** el rango de $k(\omega)$ (el dominio de su inversa) se obtiene calculando los límites en función de $\omega$. $\forall \omega \in (\omega_{minef}, \infty)$ se tiene $\frac{dk}{d\omega} > 0$ por [26], es decir, se trata de una función monótona creciente, que es una condición suficiente para la existencia de inversa[25].

**Teorema 1:** el modelo estático compuesto por las ecuaciones [1] a [7] está determinado de manera única por $k$, es decir es causal si y sólo si la función $k(\omega)$tiene inversa.

**Prueba:** por la proposición 5.

**Proposición 6:** $\forall k \in \left(\frac{\alpha_1(\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}}{1-\alpha_3}, \infty\right)$, existe $h(k) = \frac{\dot{k}}{k}$ tal que:

$$h: \left(\frac{\alpha_1(\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}}{1-\alpha_3}, \infty\right) \to \left(\beta_3^{-1}(\beta_1\bar{c}_1)^{\frac{\alpha_3-1}{\alpha_1}} - n + \delta, -(n-\delta)\right),$$

de modo que la dinámica de crecimiento es causal y depende del stock de capital físico existente.

**Prueba:** por la proposición 5, el sistema estático es causal y existe $\omega(k) = k^{-1}(k)$, tal que:

$$k^{-1}: \left(\frac{\alpha_1(\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}}{1-\alpha_3}, \infty\right) \to \left((\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}, \infty\right) \text{, por lo que:}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \beta_3^{-1}\omega(k)^{\alpha_3-1} - (n+\delta) = h(k)$$

---

25 Se puede expresar matricialmente una condición equivalente, es decir, con un sistema matricial de nueve ecuaciones y nueve incógnitas: $y_1, y_2, y_3, k_1, k_2, k_3, \omega, \rho_2$ y $\rho_3$. Para un análisis didáctico de la causalidad del modelo de crecimiento bisectorial de Usawa (1962, 1963), ver Burmeister y Dobell (1970, 113-120).

Además, $h\left(\frac{\alpha_1(\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}}{1-\alpha_3}\right)=\beta_3^{-1}(\beta_1\bar{c}_1)^{\frac{\alpha_3-1}{\alpha_1}}-(n+\delta)$ y como, $\lim_{k\to\infty}\omega(k)=\infty$, se tiene:

$$\lim_{k\to\infty}h(k)=-(n+\delta).$$

**Teorema 2:** $\forall n,\delta\in R^{+}$ que satisfacen $0<\beta_3^{-1}(\beta_1\bar{c}_1)^{\frac{\alpha_3-1}{\alpha_1}}<n+\delta$ existe un valor único $k=k^{*}$ n, tal que h($k^{*}$) = 0.

**Prueba:** como $\forall k\geq 0$, $h(k)$ es una función decreciente de $k$ (por la concavidad de la función de producción en el sector de bienes de inversión), si hay un valor de $k\in R^{+}$ que satisface $h(k^{*})=0$, éste es único. En efecto, se tiene que $h'(k)=(\alpha_3-1)\beta_3^{-1}\omega(k)^{\alpha_3-2}<0$. Ahora bien, como $\lim_{k\to\infty}h(k)=-(n+\delta)$, para cualquier $(n+\delta)>0$, existe un $k$ máximo, $\bar{k}$ tal que $\beta_3^{-1}\omega(k)^{\alpha_3-1}>n+\delta,\forall k>\bar{k}$, lo que significa que $h(k)<0,\forall k>\bar{k}$. Por otra parte, como $h\left(\frac{\alpha_1(\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}}{1-\alpha_3}\right)=\beta_3^{-1}(\beta_1\bar{c}_1)^{\frac{\alpha_3-1}{\alpha_1}}$ $-(n+\delta)$, $\beta_3^{-1}(\beta_1\bar{c}_1)^{\frac{\alpha_3-1}{\alpha_1}}>(n+\delta)$ existe un $k$ mínimo $\underline{k}>0$, tal que $\beta_3^{-1}\omega(k)^{\alpha_3-1}>n+\delta$ y por ende $h(k)>0$, para $\left(\frac{\alpha_1(\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}}{1-\alpha_3}\right)<n+\delta<\underline{k}$. Como $h(k)$ es continua, por el teorema del valor intermedio de Weierstrass se garantiza que existe al menos un punto $k^{*}$ tal que $h(k^{*})=0$[26].

**Definición 2:** un punto $k^{*}$ es un punto de equilibrio para el sistema descrito por la proposición 6 si $h(k^{*})=0$.

**Definición 3:** $k^{*}$ es localmente estable si la secuencia $\{k_t\}_{t\in N}$ converge a $k^{*}$, es decir, si: $(\forall\varepsilon>0)(\exists T\in N)\left[t>T\to|k_t-k^{*}|<\varepsilon\right]$.

**Teorema 3:** estabilidad local, $k^{*}$ es localmente estable.

**Prueba:** $\forall k\in\left(\frac{\alpha_1(\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}}{1-\alpha_3},\infty\right)$, $h'(k)<0$, lo que garantiza la proposición anterior.

**Teorema 4:** estabilidad global (Arrow-Block-Hurwicz)[27], el sistema dinámico definido por la proposición 6 es globalmente estable.

---

26 Ver Koopmans (1965).
27 Ver Arrow y Hurwicz (1959).

**Prueba:** en la prueba de T1 se mostró que existe $\underline{k}$, tal que $\beta_3^{-1}\omega(k)^{\alpha_3-1} > n+\delta$ para $\left(\frac{\alpha_1\,(\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}}{1-\alpha_3}\right) < n+\delta < \underline{k}$ y que $\lim_{k\to\infty} h(k) < 0$. Además $h(k)$ es continua. Sea un punto inicial $k_0 \in \left(\frac{\alpha_1\,(\beta_1\bar{c}_1)^{1/\alpha_1}}{1-\alpha_3}, \infty\right)$ si $h(k_0) > 0$, entonces, por el teorema del valor intermedio de Weierstrass, existe un punto de equilibrio $k^* > k_0$. Definiendo $k^* = \inf\{k/h(k) = 0, k > k_0\}$ (dado que $h$ es continua) y $\lim_{t\to\infty} \Psi(t,k_0) = k^*$ dado que $\dot{k} > 0$ para $k_0 \leq k \leq k^*$. Si $h(k_0) < 0$, se aplica un procedimiento similar y si $h(k_0) = 0$, se tiene directamente que $\lim_{t\to\infty} \Psi(t,k_0) = k^*$.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Arrow, K. J. and Hurwicz, L. (1959) On the stability of competitive equilibrium, II. *Econometrica*, XXVII(1): 82-109.

Barro, R. J. and Sala-i-Martin, X. (1995) *Economic Growth.* McGraw-Hill International Editions.

Baumol, W. (1967) Macroeconomics of unbalanced growth: the anatomy of urban crises. *The American Economic Review*, 57: 415-426.

Burmeister, E. and Dobell, R. (1970) *Mathematical theories of economic growth.* London: Macmillan.

Chenery, H. B. (1960) Patterns of economic growth. *American Economic Review*, 50: 624-654.

Clark, Colin (1940) *The Conditions of Economic Progress.* London: Macmillan.

Cornwall, J. and Cornwall, W. (1994) Growth theory and economic structure. *Economica*, 61: 237-251.

De Groot, H. L. F. (1998) The determination of sectoral structure. Paper based on his Ph.D Research performed at the Department of Economics and Center for Economic Research, Tilburg University.

Drandakis, E. M. (1963) Factor substitution in the two-sector growth model. *Review of Economic Studies*, XXX(92): 195-203.

Echevarría, C. (1997) Changes in sectoral composition associated with economic growth. *International Economic Review*, 38: 431-452.

Föllmi and Zweimüller (2002) Structural change and the Kaldor facts of economic growth. *Working Paper Series*. Zurich University.

Fuchs, V. R. (1965) The growing importance of the service industries. *Nat. Bur. Econ. Research, Occas. Paper* 96, New York.

Harris, R. and Todaro, M. P. (1970) Migration, unemployment and development: a two sector analysis. *American Economic Review*, 60(1): 126-142.

Intriligator, M. D. (1973) *Optimization and Economic Theory.* New York: Prentice Hall.

Kongsamut, P., Rebelo, S. and Xie, D. (2001) Beyond balance growth. *IMF Working Paper and Review of Economic Studies*, 68: 869-882.

Kuznets, S. (1957) Quantitative aspects of the economic growth of nations: II. *Economic Development and Cultural Change*. Supplement to V(4): 3-11.

Laitner, J. (2000) Structural change and economic growth. *Review of Economic Studies*, 67: 545-561.

Matsuyama, K. (1992) Agricultural productivity, comparative advantage and economic growth. *Journal of Economic Theory*, 58: 317-334.

Ngai, L. and Pissarides, Ch. (2004) Balanced growth with structural change. *CEP Discussion Paper.* London School of Economics and Political Science. (April).

Nikaido, H. (1970) *Introduction to sets and mappings in modern economics*. Holland: North Holland Publishing Company.

Nurkse (1953) *Problems of Capital Formation in Underdeveloped Countries*. New York, Oxford: Basil Blackwell.

Ortiz, C. H. (1995) Expansión de necesidades básicas y crecimiento económico. *El Trimestre Económico*, LXII(246): 159-170. México.

Park, S. (1995) Transitional dynamics of structural changes. *University of Rochester.* Mimeo.

Pasinetti, L. (1981) *Structural Change and Economic Growth.* Cambridge University Press.

Quibria and Harrigan (1996) Demand bias and structural change. *Kyklos*, 49: 205-213.

Rowthorn, R., and Ramaswany, R. (1997) Growth, trade and deindustrialization. *IMF Staff papers*. Working Paper 42. Washington, DC.

Solow, R. M. (1961) Note on Usawa's two-sector model of economic growth. *Review of Economic Studies*, 29: 48-50.

Steger, T. M. (2001) Stylised facts of economic growth in developing countries. *Discussion Paper Ernst-Moritz-Arndt University of Greifswald*. Discussion Paper 08, 2001.

Usawa, H. (1961) On a two sector model of economic growth. *Review of Economic Studies*, XXIX(78): 40-47.

Usawa, H. (1962) On a two sector model of economic growth II. *Review of Economic Studies*, XXX(83): 105-118.

Varian, H. R. (1992) *Análisis microeconómico*. 3ª edición. Madrid: Ed. Antoni Bosch.

Weitzman, M. (1971) Shiftable versus non-shiftable capital: a synthesis. *Econometrica*, 39(3): 511-529.