LA PARADOJA LIBERAL CON RELACIONES DE PREFERENCIA BORROSAS

Jaime Villamil*
Arcenio Pecha*

Resumen

Villamil, J. y Pecha, A., "La paradoja liberal con relaciones de preferencia borrosas", *Cuadernos de Economía*, v. XXIII, n. 40, Bogotá, 2004, páginas 55-77

Varios autores han estudiado El Teorema de Imposibilidad de Arrow [1951] con preferencias borrosas, pero pocos han estudiado La Imposibilidad de un Liberal Paretiano de Sen [1970a] con preferencias borrosas. En este artículo mostramos los desarrollos con preferencias borrosas que se han hecho de La Paradoja Liberal después de Subramanian [1987], y esbozamos un posible camino para entender las Loterías en la Elección Social también con preferencias borrosas.

Palabras clave: preferencias borrosas, decisión bajo incertidumbre, elección social, liberalismo. **JEL:** B41, D71, D81.

* Profesores de la Universidad Nacional de Colombia. Enviar los comentarios a los correos: jaime_villamil@yahoo.com, apechac@unal.edu.co. Los autores agradecen los comentarios de Jorge Iván González, José Fernando Isaza, Boris Salazar y Jaime Gil Aluja. Artículo recibido el 2 de febrero de 2004 y aprobado el 11 de junio del mismo año.

Abstract

Villamil, J. and Pecha, A. "The liberal paradox with fuzzy preference relationships", *Cuadernos de Economía*, v. XXIII, n. 40, Bogotá, 2004, pages 55-77

Several authors have studied Arrow's Impossibility Theory [1951] with fuzzy preferences; however, only a few of them have studied Sen's Liberal Paretian Impossibility [1970a] with unclear preferences. This article traces developments which have been made from the Liberal Paradox with fuzzy preferences after Subramanian [1987] and outlines possible way forward for understanding Lotteries in Social Choice also with fuzzy preferences.

Key words: fuzzy preferences, decision-making in conditions of uncertainty, social choice, liberalism. **JEL:** B41, D71, D81.

Résumé

Villamil J. et Pecha, A. "Le paradoxe libéral sous les rapports de préférences non-pertinentes", *Cuadernos de Economía*, v. XXIII, n. 40, Bogotá, 2004, pages 55-77

Plusieurs auteurs ont analysé le Théorème d´Impossibilité d´Arrow [1951] avec des préférences non-pertinentes, mais peu ont analysé l´Impossibilité d´un Libéral Parétien de Sen [1970] avec des préférences non-pertinentes. Dans cet article nous présentons les développements avec préférences non-pertinentes qui ont été faites du Paradoxe Libéral après Subramanian [1987], et nous esquissons une voie possible pour comprendre les Loteries dans le Choix Social avec également des préférences non-pertinentes.

Mots clés: préférences non-pertinentes, décision sous incertitude, élection sociale, libéralisme. **JEL:** B41, D71, D81.

Para eliminar las neurosis de las masas y el irracionalismo de la vida social, en otras palabras, para cumplir una auténtica higiene mental, necesitamos un marco social que permita, antes que nada, eliminar las necesidades materiales y garantizar un desarrollo sin obstáculos de las fuerzas vitales de cada individuo. Tal marco no puede ser otro que una auténtica democracia.

Wilhelm Reich

INTRODUCCIÓN

Arrow mostró, en una arquitectura axiomática, la imposibilidad de encontrar un mecanismo que satisficiera simultáneamente unas condiciones mínimas de inclusión, de equidad y de imparcialidad en un proceso de elección social. Arrow [1951], en su obra *Elección social y valores individuales*, no incluyó ninguna definición de los derechos individuales a tener en cuenta en la elección social.

Uno de los valores fundamentales que es propio de toda sociedad moderna es la concepción de libertad. Sen [1998] plantea que la libertad puede ser vista de dos formas: la libertad como "oportunidad" que consiste en que los individuos sean decisivos entre los estados del mundo que conciernen a su 'esfera privada'[1] con fines de mejorar aspectos de su vida personal, o, sólo como la capacidad de los individuos para realizar elecciones dentro de sus 'esferas privadas' sin importar la finalidad que persiga cada elección. Sen denomina esta última interpretación como el "aspecto procesal" de la libertad.

1 El término 'esfera privada' es original de Hayek [1960].

La teoría de la elección social está preocupada por el aspecto de "oportunidad" que tiene la libertad más que por su "aspecto procesal". Dentro de esta última visión se puede incluir el principio de libertad de John Stuart Mill, según el cual debe existir una limitación del alcance de intervención que tenga el Estado en las esferas individuales, y dicha intervención sólo se puede presentar cuando las preferencias de un individuo o grupo (libertad de credo, de pensamiento, etc.) perjudican a otros.

Sen [1970a], tras intentar flexibilizar los resultados de la imposibilidad de Arrow, expuestos en *Elección colectiva y bienestar social*, es el primero en incorporar, mediante las condiciones de *libertarismo débil* (L) y de *libertarismo mínimo* (L*)[2], una noción de los derechos individuales. Por esta vía llegó a otro resultado de imposibilidad en el que demuestra que un mecanismo de elección social puede cumplir con la *Condición de Pareto* (P) pero, a su vez, no satisfacer las condiciones de libertarismo que él propone.

El resultado de la imposibilidad inicial de Arrow, que aún no incluía aspectos del liberalismo, ha sido llevado por muchos autores a un esquema teórico distinto al de las relaciones de preferencia con lógica binaria. Dichos autores han replanteado la noción de relación de preferencia utilizando la lógica borrosa con la cual se puede cuestionar la definición tradicional de racionalidad económica, así como también se puede ampliar la discusión de cómo se hacen las elecciones individuales en circunstancias de conocimiento impreciso, vago o ambiguo [Pecha y Villamil 2002]. De la misma manera, sólo tres autores se han interesado por llevar la "paradoja liberal" de Sen a una estructura con preferencias borrosas, ellos son Subramanian [1987], Dimitrov [2001] y Alcalde-Unzu [2002].

En este artículo se pretende esbozar la paradoja liberal en términos de preferencias borrosas tal como lo planteó originariamente Subramanian [1987] y, además, mostrar los avances más recientes en el camino abierto por este autor: la propuesta de Dimitrov [2001] de aplicar conjuntos borrosos intuicionistas y la exposición que hace Alcalde-Unzu [2002] acerca de unas condiciones más fuertes de liberalismo que las de Sen. Por último, se muestran otros posibles caminos en la línea de introducir la elección bajo *riesgo* (que se trabaja con teoría de probabilidad, una herramienta objetiva) sin dejar a un lado la elección que se realiza bajo *incertidumbre* que se entiende como una elección sujeta a un conocimiento imperfecto, vago o ambiguo de

2 En principio, Sen [1970a] las llama condiciones de liberalismo y liberalismo mínimo, respectivamente, pero posteriormente Sen [1976] decide llamarlas condiciones de libertarismo.

las alternativas a elegir (la cual se trabaja con lógica borrosa, una herramienta subjetiva).

PLANTEAMIENTO DE SEN DE LA IMPOSIBILIDAD DE UN LIBERAL PARETIANO

Enseguida se presentan tanto las definiciones esenciales para plantear el problema de la elección social[3], como las condiciones libertarias de Sen.

La sociedad y sus individuos. Se considera un conjunto N que está conformado por n individuos, es decir, $N=\{1, 2, \ldots, n\}$. Este conjunto se denomina sociedad.

Cada individuo en la sociedad tiene la posibilidad de realizar elecciones sobre un conjunto X que contiene las alternativas o los estados del mundo concebibles. De este conjunto sólo interesa un subconjunto propio S de X que está conformado sólo por los estados del mundo que son alcanzables.

El aspecto de "oportunidad" que tiene la libertad se incluye mediante un conjunto D_i que se llama la esfera privada del individuo i, y que está compuesto por parejas de estados del mundo (x, y) que son alternativas distintas ($x \neq y$) relevantes en su vida individual.

Las preferencias de los individuos. Se define la *relación binaria de preferencia* R en S al subconjunto propio de $S \times S$ tal que para cada pareja (x, y) que pertenezca a $S \times S$ se caracteriza la relación "x es al menos tan bueno como y". Se dice que R es un *ordenamiento* en S si R es reflexiva, completa y transitiva[4]. Para garantizar que las preferencias de los individuos sean consistentes, y lleguen a elecciones *racionales* se exige que R sea un ordenamiento. Por R_i se entenderá la relación de preferencia para el i-ésimo individuo de los n que existen en la sociedad, y por R se simbolizará la relación de preferencia social.

A la subrelación P de R que expresa la *relación de preferencia estricta* o *relación fuerte de preferencia* de una alternativa sobre otra (x P y quiere decir "x es preferido estrictamente a y") se llama *factor asimétrico* de R[5]. P_i representará la relación fuerte de preferencia individual mientras que P representará la relación fuerte de preferencia social.

3 Ver las definiciones necesarias en Pecha y Villamil [2002].
4 El significado de cada una de estas propiedades corresponde a las definiciones 5, 6 y 8, respectivamente. Ver Pecha y Villamil [2002, 37].
5 La definición formal corresponde a la definición 11. Ver Pecha y Villamil [2002, 38].

Se dice que un individuo i es decisivo entre una pareja de alternativas (x, y) si su relación binaria de preferencia (R_i) es completa, es decir, que posee suficiente información para elegir sólo una de las dos alternativas. Si el individuo i es decisivo sobre un par de alternativas que pertenece a su esfera privada (es decir si $(x, y) \in D_i$) se dice que tiene 'derechos liberales' sobre el par de estados del mundo (x, y).

Si para una persona la filiación a un partido político cobra relevancia en su vida individual (en otras palabras, si es un aspecto tan importante en su vida que merece entrar en su esfera privada), el individuo tendrá que decidir entre simpatizar con el Partido Conservador o con el Nuevo Liberalismo. Y entonces se habla de los derechos liberales que una sociedad debe garantizarle al individuo a través de la libertad de credo político.

Las preferencias de la sociedad. En la sociedad debe existir alguna *regla de elección colectiva* f tal que para cada conjunto de n ordenamientos individuales f, determine una relación de preferencia social R. Esta regla no sólo deberá satisfacer las condiciones mínimas de justicia e imparcialidad que Arrow [1951] impuso sino que, además, deberá respetar los derechos individuales de las personas.

Sen [1970b] advierte que la exigencia que Arrow impone a la regla de elección colectiva, de que la relación de preferencia social R encontrada por f sea necesariamente un ordenamiento, es una condición muy fuerte, y observa que para que exista un resultado de elección social es suficiente con que la relación de preferencia social R determinada por f sea reflexiva, completa y cuasitransitiva, y a esta regla de elección colectiva la llama *función de decisión social* (FDS)[6].

El proceso de elección social queda descrito de la siguiente manera: dado un conjunto S de estados del mundo alcanzables, y dado que los n individuos de la sociedad tienen un conocimiento perfecto de cada uno de los elementos de S, la sociedad debe encontrar una regla de elección colectiva que obtenga una relación de preferencia social reflexiva, completa y cuasitransitiva, y que satisfaga las siguientes condiciones:

Condición U (dominio no restringido): respetando ciertas condiciones de racionalidad, los individuos pueden ordenar libremente los estados del mundo de S, y no debe existir ninguna restricción para que dichos

6 La propiedad de cuasi-transitividad corresponde a la definición 13. Ver Pecha y Villamil [2002, 38].

ordenamientos individuales sean tenidos en cuenta en el proceso de elección colectiva. En otras palabras, la *función de decisión social* debe encontrar una relación de preferencia social para todas las posibles combinaciones de ordenamientos de los n individuos de la sociedad, así que:

$$\text{Dom FDS} = S^n$$

Condición P (principio débil de Pareto): si cada uno de los n individuos de una sociedad considera que el estado del mundo x es preferido estrictamente al estado del mundo y, entonces, la sociedad debe preferir estrictamente x a y, es decir:

$$(\forall\ i \in N : x\ P_i\ y) \rightarrow x\ P\ y$$

Condición L (libertarismo débil): cada uno de los n individuos de la sociedad debe ser *decisivo*, por lo menos, respecto de un par de estados del mundo (x, y) de su *esfera privada* y esta decisión debe ser reflejada en la relación binaria de preferencia social R encontrada por *la función de decisión social*, en símbolos:

$$(\forall\ i \in N: x\ P_i\ y \text{ ó } x\ P_i\ y) \rightarrow x\ P\ y \text{ ó } x\ P\ y$$

Condición L* (libertarismo mínimo): en la sociedad existe al menos un par de individuos j y k distintos, y por lo menos dos parejas de estados del mundo (x, y) y (w, z) que pertenecen respectivamente a sus esferas privadas D_j y D_k tal que j es *decisivo* respecto de (x, y) y k es *decisivo* respecto de (w, z), y dichas decisiones deben ser reflejadas en la relación binaria de preferencia social R encontrada por *la función de decisión social*. Sen [1992] reconoce que esta condición es una condición necesaria pero no suficiente para garantizar la libertad en una sociedad.

La imposibilidad de un liberal paretiano: Sen [1970a, 154] prueba que no existe una *función de decisión social* que satisfaga simultáneamente las condiciones U, P y L* y, por tanto, tampoco la condición L.

EL AMANTE DE LADY CHATTERLEY

El mecanismo y las condiciones de elección social descritas arriba opera con la restricción que el conjunto de estados del mundo alcanzable tenga una cardinalidad mayor o igual a tres (card $S \geq 3$) y que el conjunto de individuos en la sociedad tenga una cardinalidad mayor o igual a dos (card $N \geq 2$). Sen [1970a] ejemplifica el resultado de imposibilidad de un liberal paretiano con el escenario más simple posible en teoría de elección social, él propone una sociedad con dos individuos; el individuo 1 que es "puritano" y el individuo 2 que es "lascivo", y un conjunto S de estados del mundo alcanzables con las siguientes alternativas: que la 'polémica' novela *El Amante de Lady Chatterley* del escritor inglés David Lawrence sea leída por el puritano (x), que sea leída por el lascivo (y) y, por último, que no sea leída por ninguno (z).

El individuo 1 ordena las alternativas de acuerdo con sus preferencias del siguiente modo: z R_1 x & x R_1 y. Es decir, el puritano desea que ninguno en la sociedad lea la novela, de no ser así, entonces sería preferible correr con el "riesgo" de leerla él mismo en lugar de que sea leída por un individuo con inclinaciones lascivas. Entre tanto, el individuo 2 tiene el siguiente ordenamiento: x R_2 y & y R_2 z, en decir, que el resto la sociedad lea la corrosiva novela es más deseable para el individuo 2 que leerla sólo él y su lascivia le hace considerar que la peor alternativa es que nadie en la sociedad lea tal novela.

Acudiendo a la filosofía liberal expresada en la condición L* (que en este caso es equivalente al principio L porque sólo existen dos individuos en la sociedad), la sociedad, teniendo en cuenta las intenciones del individuo 2, preferiría que el libro lo lea el lascivo a que lo lea el resto de la sociedad (y R z), pero el mejor resultado social, si se tienen en cuenta los deseos del individuo 1, es preferir que nadie lea la novela a que la lea el puritano (z R x), no obstante en ambos casos no se hace justicia al criterio débil de Pareto puesto que, desde este punto de vista, es mucho mejor para la sociedad que el puritano lea *El Amante de Lady Chatterley* a que lo haga el lascivo (x R y). De tal modo que el resultado de la elección social queda indeterminado en virtud de que se entra en una preferencia social circular (y R z & z R x, sin embargo, x R y) donde no se cumple el requisito mínimo de racionalidad expresado por la condición de transitividad; ni siquiera se satisface un requisito más débil como el de *aciclicidad* que sugiere Sen [1970b].

LAS PREFERENCIAS BORROSAS

Una *relación binaria de preferencia borrosa* (Я) definida sobre SxS es un conjunto de parejas de estados del mundo (x, y) que van acompañadas de un valor para su *función característica* ($\mu_{Я}(x, y)$), dicha función sólo puede tomar valores en el intervalo cerrado cero a uno, es decir, $\mu_{Я}(x, y) \in [0, 1]$.

El valor que toma la *función característica* para una pareja (x, y) expresa el "grado" en que se satisface la relación de preferencia, por ejemplo, si $\mu_{Я}(x, y) = 0,8$, se está diciendo que "x es al menos tan bueno como y" en 0,8 y que hace falta *información completa* para considerar que la relación se cumple totalmente o, en términos de la función característica, para que $\mu_{Я}(x, y)$ sea igual a uno[7] .

El símbolo $Я_i$ representa la *relación binaria de preferencia borrosa individual* y $\mu_{Я_i}(x, y)$ será *la función característica* para dicha relación entre las alternativas x e y según la percepción del i-ésimo individuo.

Я representa *la relación binaria de preferencia borrosa social* y $\mu_{Я}(x, y)$ será *la función característica* para dicha relación entre las alternativas x e y según la percepción de la sociedad.

Se dice que $Я^{Int}$ es una *relación binaria de preferencia borrosa intuicionista* definida sobre SxS para un conjunto de parejas de estados del mundo (x, y) que van acompañadas de un valor para su *función característica* ($\mu_{Я}(x, y) \in [0, 1]$) tal que éste indica el "grado" en que se cumple la relación de preferencia y de un valor $\nu_{Я}(x, y) \in [0, 1]$ que señala el "grado" en que no se satisface la relación de preferencia, con la condición que $\forall$ x, y $\in$ S: $\mu_{Я}(x, y) + \nu_{Я}(x, y) \leq 1$. Este tipo de relación de preferencia, además de señalar si una alternativa es al menos tan buena como otra, expresa qué tan grande es la falta de información disponible para hacer comparaciones entre estados del mundo a través de la suma de las funciones características $\mu_{Я}$ y $\nu_{Я}$.

De igual modo que con las *relaciones binarias de preferencias*, es necesario definir condiciones para garantizar una consistencia mínima de las preferencias del individuo o de la sociedad. Las condiciones de reflexividad, simetría y transitividad se definen a continuación. La transitividad en conjuntos borrosos tiene múltiples formas de ser expresada, como por ejemplo:

i. Я es *irreflexiva* si y sólo si $\forall x \in S: \mu_{Я}(x, x) = 0$

ii. Я es *asimétrica* si y sólo si $\forall x, y \in S: \mu_{Я}(x, y) > 0 \rightarrow \mu_{Я}(y, x) < 1$

iii. Я es *acíclica* si y sólo si $\forall x_1, x_2, \ldots, x_r \in S: [\mu_{Я}(x_1, x_2) > \mu_{Я}(x_2, x_1) \&, \ldots, \& \mu_{Я}(x_{r-1}, x_r) > \mu_{Я}(x_r, x_{r-1})] \rightarrow \mu_{Я}(x_r, x_1) < 1$

iv. Я es *transitiva-1* si y sólo si $\forall x, y, z \in S: [\mu_{Я}(x, y) > 0 \& \mu_{Я}(y, z) > 0] \rightarrow \mu_{Я}(x, z) > 0 \& [\mu_{Я}(x, y) = \mu_{Я}(y, x) = \mu_{Я}(y, z) = \mu_{Я}(z, y) = 0] \rightarrow \mu_{Я}(x, z) = \mu_{Я}(z, x) = 0$

7 Para una mejor explicación de lo que es un *conjunto borroso*, una *función característica* y una *relación borrosa*, ver Pecha y Villamil [2002, 43-45].

La primera parte de la premisa lógica expresa la definición convencional de transitividad en términos de *relaciones de preferencia estricta borrosas*, y la segunda parte plantea la transitividad con *relaciones de indiferencia*.

v. Я es *transitiva-2* si y sólo si $\forall$ x, y, z $\in$ S: $[\mu_Я(x, y) = \mu_Я(y, z) = 1] \rightarrow \mu_Я(x, z) = 1$ & $[\mu_Я(x, y) = \mu_Я(y, z) = 0] \rightarrow \mu_Я(x, z) = 0$.

La condición de *transitividad-2* es equivalente a la condición de transitividad que Arrow [1951] expresa en lógica binaria.

vi. Я es *max-min transitiva-intuicionista* si y sólo si $\forall$ x, y, z $\in$ S: $[\mu_Я(x, z) \geq$ *min* $\{\mu_Я(x, y), \mu_Я(y, z)\}]$ & $[\nu_Я(x, z) \geq$ *max* $\{\nu_Я(x, y), \nu_Я(y, z)\}]$.

Esta condición es similar a la condición *max-min transitiva* definida en Pecha y Villamil [2002] a diferencia de que el componente que indica el "grado" de no pertenencia (ν) subraya la validez de la propiedad de *max-min transitividad* expresada mediante las *funciones características*.

Dependiendo de las condiciones usadas para definir la consistencia de las relaciones de preferencia borrosas es posible caracterizar conjuntos o espacios en los que se puedan describir las reglas de elección social. Con base en las condiciones (i) a (vi) se consideran los siguientes seis conjuntos:

Conjunto *F*. Se llamará *F* al conjunto de todas las *relaciones binarias de preferencia borrosas* (Я) que cumplen con las condiciones i. & ii. F será equivalente al conjunto de las *relaciones de preferencia estricta borrosas* (P^b) definidas sobre SxS.

De igual modo, por P_i^b se simbolizará la *relación de preferencia estricta borrosa* para el individuo i de una sociedad, y por P^b se representa la *relación de preferencia estricta borrosa social*.

Conjunto H_0. Se llamará H_0 al conjunto de todas las *relaciones binarias de preferencia borrosas* (Я) que cumplen con las condiciones i., ii. & v.

Conjunto H_1. Se llamará H_1 al conjunto de todas las *relaciones binarias de preferencia borrosas* (Я) que cumplen con las condiciones i., ii. & iii.

Conjunto H_2. Se llamará H_2 al conjunto de todas las *relaciones binarias de preferencia borrosas* (Я) que cumplen con las condiciones i., ii. & iv.

Conjunto M_2. Se llamará M_2 al conjunto de todas las *relaciones binarias de preferencia borrosas* (Я) que cumplen con las condiciones i., ii. & vi.

Conjunto K_1: se llamará K_1 al conjunto de todas las *relaciones binarias de preferencia* (R) que cumplen con las condiciones i., ii. & iii.

Conjunto K_2: se llamará K_2 al conjunto de todas las *relaciones binarias de preferencia* (R) que cumplen con las condiciones i., ii. & iv.

Los conjuntos F, H_0, H_1, H_2, y M_2 describen relaciones de preferencia en una estructura borrosa, el primer conjunto hace referencia a las relaciones estrictas de preferencia, y los demás conjuntos a las relaciones que incluyen la indiferencia. Los conjuntos K_1 y K_2 describen relaciones de preferencia en una estructura binaria.

En consecuencia, es posible verificar con facilidad que:

a. $K_2 \subseteq K_1 \subseteq H_1$

b. $K_2 \subseteq \mathrm{H}_2 \subseteq H_1$

c. $H_1 \not\subseteq H_0$ y $H_0 \not\subseteq H_1$

De lo anterior se tiene que el caso de elección más general está dado en términos de *relaciones de preferencia estrictas borrosas* (P^b) que cumplen con la condición débil de transitividad, es decir, la *aciclicidad* propuesta por Sen [1970b] pero expresada en lógica borrosa.

Los casos intermedios son: la elección con *relaciones de preferencia estrictas borrosas* (P^b) que cumplen con la *transitividad-1* y la elección con *relaciones de preferencia estricta* o *relaciones fuertes de preferencia* (P) que cumplen con la *aciclicidad*, éste corresponde al ejemplo de imposibilidad de un liberal paretiano [Sen 1970a].

Por último, el caso más específico de elección que se puede considerar está planteado en términos de *relaciones de preferencia estricta* o *relaciones fuertes de preferencia* (P) que satisfacen la *transitividad-1*. Esta es la condición de transitividad que inicialmente propuso Arrow [1951].

La elección social. Existe una *regla de agregación borrosa* (RAB) que es un funcional g tal que para cada conjunto de n *relaciones de preferencia estrictas borrosas* individuales (P_i^b) determina una *relación de preferencia estricta borrosa social*:

$$g: G^n \rightarrow F \text{ donde } \varnothing \neq G \subset F$$

Donde G es un subconjunto propio de F debido a que el proceso de elección sólo tendrá en cuenta *las relaciones de preferencia estrictas borrosas* individuales que sean consistentes.

Cualquier *regla de agregación borrosa* (RAB) que encuentre la sociedad debe cumplir con unos criterios de mínima justicia y respeto por los *derechos libe-*

rales que Sen [1970a] ha resumido en las condiciones de Pareto (P) y de libertarismo mínimo (L*).

En lo que sigue, se mostrará cómo se representan las condiciones P y L* en una estructura borrosa, y cómo los autores de la "vertiente borrosa" han planteado la paradoja liberal.

LAS CONDICIONES DE LIBERALISMO MÍNIMO (L*) EN UNA ESTRUCTURA BORROSA

En una estructura borrosa las condiciones P y L* se pueden definir de diversas maneras.

Las siguientes definiciones de la *Condición de liberalismo o* de *libertarismo mínimo* (L*) se enuncian para cada uno de los seis conjuntos mencionados arriba agregando el espacio en que operan las relaciones de preferencia borrosas intuicionistas.

Cada una de estas definiciones tiene una condición P compatible en el mismo espacio o conjunto de elección.

1. **Condición L*-A:** en la sociedad existe al menos un par de individuos j y k distintos, y por lo menos dos parejas de estados del mundo (x, y) y (w, z) que pertenecen respectivamente a sus *esferas privadas* D_j y D_k tal que:

   $$[\mu_{Яj}(x, y) = 1 \rightarrow \mu_{Я}(x, y) \geq \mu_{Я}(y, x)] \ \& \ [\mu_{Яj}(y, x) = 1 \rightarrow \mu_{Я}(y, x) \geq \mu_{Я}(x, y)] \ \& \ [\mu_{Яk}(w, z) = 1 \rightarrow \mu_{Я}(w, z) \geq \mu_{Я}(z, w)] \ \& \ [\mu_{Яk}(z, w) = 1 \rightarrow \mu_{Я}(z, w) \geq \mu_{Я}(w, z)]$$

   La condición L*-A se define partiendo de unas relaciones de preferencia individuales con lógica binaria para llegar a una relación de preferencia borrosa social. Si un individuo es totalmente decisivo entre las alternativas x e y, en la percepción de la sociedad reflejada por la *función característica* se debe verificar esto mediante la desigualdad $\mu_{Я}(x, y) \geq \mu_{Я}(y, x)$.

2. **Condición L*-B.** En la sociedad existe al menos un par de individuos j y k distintos, y por lo menos dos parejas de estados del mundo (x, y) y (w, z) que pertenecen respectivamente a sus *esferas privadas* D_j y D_k tal que:

   $$[\mu_{Яj}(x, y) = 1 \rightarrow \mu_{Я}(x, y) > \mu_{Я}(y, x)] \ \& \ [\mu_{Яj}(y, x) = 1 \rightarrow \mu_{Я}(y, x) > \mu_{Я}(x, y)] \ \& \ [\mu_{Яk}(w, z) = 1 \rightarrow \mu_{Я}(w, z) > \mu_{Я}(z, w)] \ \& \ [\mu_{Яk}(z, w) = 1 \rightarrow \mu_{Я}(z, w) > \mu_{Я}(w, z)]$$

La condición L*-B, de igual manera que la condición L*-A, se define partiendo de unas relaciones de preferencia individuales con lógica binaria, y se llega a una relación de preferencia borrosa social. Aquí la percepción de la sociedad reflejada por la *función característica* se debe verificar a través de la desigualdad *estricta* entre $\mu_Я(x, y)$ y $\mu_Я(y, x)$.

3. **Condición L*-C.** En la sociedad existe al menos un par de individuos j y k distintos, y por lo menos dos parejas de estados del mundo (x, y) y (w, z) que pertenecen respectivamente a sus *esferas privadas* D_j y D_k tal que:

$$[\mu_{Яj}(x, y) = 1 \rightarrow \mu_Я(x, y) = 1] \;\&\; [\mu_{Яj}(y, x) = 1 \rightarrow \mu_Я(y, x) = 1] \;\&\; [\mu_{Яk}(w, z) = 1 \rightarrow \mu_Я(w, z) = 1] \;\&\; [\mu_{Яk}(z, w) = 1 \rightarrow \mu_Я(z, w) = 1)]$$

La condición L*-C parte de unas relaciones de preferencia individuales con lógica binaria, y llega a una relación de preferencia social también en lógica binaria. Esta definición es equivalente a la definición de Condición L* planteada en una estructura binaria por Sen [1970a].

4. **Condición L*-D.** En la sociedad existe al menos un par de individuos j y k distintos, y por lo menos dos parejas de estados del mundo (x, y) y (w, z) que pertenecen respectivamente a sus esferas privadas D_j y D_k tal que:

$$\forall\, \alpha \in [0, 1]\; [\mu_{Яj}(x, y) \geq \alpha \rightarrow \mu_Я(x, y) \geq \alpha] \;\&\; [\mu_{Яj}(y, x) \geq \alpha \rightarrow \mu_Я(y, x) \geq \alpha] \;\&\; [\mu_{Яk}(w, z) \geq \alpha \rightarrow \mu_Я(w, z) \geq \alpha] \;\&\; [\mu_{Яk}(z, w) \geq \alpha \rightarrow \mu_Я(z, w) \geq \alpha]$$

La condición L*-D parte de unas relaciones de preferencia individuales con lógica borrosa y llega a una relación de preferencia social también en lógica borrosa. A la *función característica* de ambas relaciones de preferencia –tanto las individuales como la social– se les impone un valor α de corte, por encima del cual son comparables las percepciones del individuo y de la sociedad respecto de dos alternativas considerando la posibilidad de que la intensidad de ambas percepciones pueda diferir.

5. **Condición L*-E.** En la sociedad existe al menos un par de individuos j y k distintos, y por lo menos dos parejas de estados del mundo (x, y) y (w, z) que pertenecen respectivamente a sus *esferas privadas* D_j y D_k tal que:

$$\forall\, \alpha \in [0, 1]\; [\mu_{Яj}(x, y) = \alpha \rightarrow \mu_Я(x, y) = \alpha] \;\&\; [\mu_{Яj}(y, x) = \alpha \rightarrow \mu_Я(y, x) = \alpha] \;\&\; [\mu_{Яk}(w, z) = \alpha \rightarrow \mu_Я(w, z) = \alpha] \;\&\; [\mu_{Яk}(z, w) = \alpha \rightarrow \mu_Я(z, w) = \alpha]$$

Al igual que la condición L*-D, la condición L*-E parte de unas relaciones de preferencia individuales con lógica borrosa y llega a una relación de preferencia social también en lógica borrosa. Si la *función característica* de la relación de preferencia individual es valorada por un número α entre cero y uno, la percepción de la sociedad reflejada en la *función característica* se debe manifestar por el mismo valor α, es decir, no hay posibilidad a que el valor de la función característica de la relación de preferencia social sea distinto del valor de la relación de preferencia individual.

6. **Condición L*-F.** En la sociedad existe al menos un par de individuos j y k distintos, y por lo menos dos parejas de estados del mundo (x, y) y (w, z) que pertenecen respectivamente a sus *esferas privadas* D_j y D_k tal que:

$$[\mu_{Я_j}(x, y) > \mu_{Я_j}(y, x) \rightarrow \mu_{Я}(x, y) > \mu_{Я}(y, x)] \;\&\; [\mu_{Я_j}(y, x) > \mu_{Я_j}(x, y) \rightarrow \mu_{Я}(y, x) > \mu_{Я}(x, y)] \;\&\; [\mu_{Я_k}(w, z) > \mu_{Я_k}(z, w) \rightarrow \mu_{Я}(w, z) > \mu_{Я}(z, w)] \;\&\; [\mu_{Я_k}(z, w) > \mu_{Я_k}(w, z) \rightarrow \mu_{Я}(z, w) > \mu_{Я}(w, z)]$$

La condición L*-F expresa que la valoración que un individuo le da a la comparación de la preferencia entre dos alternativas x & y en ambos sentidos (de x a y & de y a x) de la misma manera se debe reflejar en la percepción que la sociedad tenga de las mismas alternativas.

7. **Condición L*-borrosa-intuicionista:** en la sociedad existe al menos un par de individuos j y k distintos, y por lo menos dos parejas de estados del mundo (x, y) y (w, z) que pertenecen respectivamente a sus *esferas privadas* D_j y D_k tal que:

a. $[\mu_{Я_j}(x, y) > \nu_{Я_j}(x, y)] \rightarrow [\mu_{Я}(y, x) \leq \nu_{Я}(y, x)]$

b. $[\mu_{Я_k}(w, z) > \nu_{Я_k}(w, z)] \rightarrow [\mu_{Я}(z, w) \leq \nu_{Я}(z, w)]$

Un individuo con relaciones de preferencia borrosas intuicionistas puede ser decisivo entre dos alternativas, la sociedad puede reflejar lo mismo o ser indiferente entre ambas si la cantidad de información con la que el individuo hizo las comparaciones es muy pequeña.

Cabe destacar que L*-D → L*-C → L*-B → L*-A & L*-E → L*-C por lo tanto L*-F → L*-B.

CONDICIÓN DÉBIL DE PARETO (P) EN UNA ESTRUCTURA BORROSA

Las definiciones para expresar la *Condición débil de Pareto* (P) que corresponden respectivamente a las *Condiciones de liberalismo mínimo* enunciadas arriba son:

1'. **Condición P-I:** $(\forall\ i \in N : \mu_{Яi}(x, y) = 1) \rightarrow \mu_{Я}(x, y) \geq \mu_{Я}(y, x)$

2'. **Condición P-II:** $(\forall\ i \in N : \mu_{Яi}(x, y) = 1) \rightarrow \mu_{Я}(x, y) > \mu_{Я}(y, x)$

3'. **Condición P-III:** $(\forall\ i \in N : \mu_{Яi}(x, y) = 1) \rightarrow \mu_{Я}(x, y) = 1$

Esta definición es equivalente a la definición de la Condición P planteada por Sen [1970a].

4'. **Condición P-IV:** $\forall\ \alpha \in [0, 1]\ (\forall\ i \in N : \mu_{Яi}(x, y) \geq \alpha) \rightarrow \mu_{Я}(x, y) \geq \alpha$

5'. **Condición P-V:** $\forall\ \alpha \in [0, 1]\ (\forall\ i \in N : \mu_{Яi}(x, y) = \alpha) \rightarrow \mu_{Я}(x, y) = \alpha$

6'. **Condición P-VI:** $(\forall\ i \in N : \mu_{Яi}(x, y) > \mu_{Яi}(y, x)) \rightarrow \mu_{Я}(x, y) > \mu_{Я}(y, x)$

7'. **Condición P-borrosa-intuicionista:** $(\forall\ i \in N : \mu_{Яi}(x, y) > \nu_{Яi}(x, y)) \rightarrow \mu_{Я}(y, x) \leq \nu_{Я}(y, x)$

Obsérvese que P-IV → P-III → P-II → P-I & P-V → P-III pero P-V no implica P-IV y tampoco P-IV implica P-V.

PLANTEAMIENTO DE LA PARADOJA LIBERAL EN SUBRAMANIAN [1987]

Subramanian [1987] ilustra varios casos:

1. No existe una *regla de agregación borrosa* (RAB) tal que g: $K_2^n \rightarrow H_1$ y que satisfaga simultáneamente las condiciones P-III y L*-B.

2. No existe una *regla de agregación borrosa* (RAB) tal que g: $K_2^n \rightarrow H_2$ y que satisfaga simultáneamente las condiciones P-III y L*-A.

3. Existe por lo menos una *regla de agregación borrosa* (RAB) tal que g: $H_2^n \rightarrow H_1$ y que satisfaga simultáneamente las condiciones P-III y L*-A.

En este último caso, Subramanian plantea que no existe paradoja y sugiere que la *regla de agregación borrosa* (RAB) sea:

$$\forall\ i \in N : \mu_{Я}(x, y) = \min_i\ [\mu_{Яi}(x, y)]$$

Sin embargo, el caso 3 no se puede admitir como una solución de la paradoja liberal en virtud de que la condición L*-A es una condición más débil que la condición L* y no incorpora del todo la idea de derechos liberales que Sen [1970a] expresa con dicha condición. L*-A afirma que es posible que para un individuo i suceda que $\mu_{\Re i}(x, y) = \mu_{\Re i}(y, x)$ y Sen propone que un individuo debe ser decisivo entre, por lo menos, un par de alternativas de su *esfera privada*.

PLANTEAMIENTO DE LA PARADOJA LIBERAL EN DIMITROV Y EN ALCALDE-UNZU

Dimitrov prueba que existe una *regla de agregación borrosa* (RAB) tal que g: $M_2^n \rightarrow M_2$ y que cumple simultáneamente con las condiciones P-borroso-intuicionista y L*-borrosa-intuicionista. Alcalde-Unzu muestra que existen muchas funciones con dominio en el conjunto H_0 que satisfacen simultáneamente las condiciones P-III y L*-B, y también la condición L*-F.

La condición P-III que está expresada con preferencias borrosas es la condición que más se aproxima a la condición P* de Sen. La condición L*-B es más fuerte que la condición L*-A (ambas en términos de preferencias borrosas) y es la más cercana al espíritu de la condición L* de Sen que está expresada con lógica binaria.

Alcalde-Unzu argumenta que el proceso de elección social debería cumplir con otras condiciones adicionales a las condiciones de Pareto y de Liberalismo, él enuncia las siguientes condiciones: *monotonicidad*, *anonimidad* y *neutralidad* y propone unas *reglas de agregación difusa* (FAB) basadas en *medias ponderadas cuasi-aritméticas*. Ver Alcalde-Unzu [2002, 12-17].

EL AMANTE DE LADY CHATTERLEY CON PREFERENCIAS BORROSAS

El ejemplo de *El Amante de Lady Chatterley* [Sen 1970a] con preferencias borrosas puede ser visto por medio de matrices que reflejen las valoraciones que los individuos hacen frente a las alternativas que van a elegir.

MATRIZ 1
RELACIONES DE PREFERENCIA PARA EL INDIVIDUO 1 (EL PURITANO)

	x	y	z
x	0,0	0,7	0,2
y	0,3	0,0	0,1
z	0,8	0,9	0,0

La Matriz 1 muestra las relaciones de preferencias borrosas que el individuo 1 establece sobre el conjunto de estados del mundo S conformado por tres alternativas {x, y, z} donde:

x significa que *El Amante de Lady Chatterley* sea leída por el individuo 1 (el puritano).

y significa que la novela sea leída por el individuo 2 (el lascivo).

z significa que la novela no sea leída por ninguno.

En la Matriz 1 puede verse que el individuo puritano prefiere leer la novela él mismo a que la lea el individuo lascivo (es decir, x es preferido a y) y a esa preferencia le da una valoración de 0,7 ($\mu_{\text{Я}}(x, y) = 0{,}7$). La Matriz también deja ver qué tan fuertes son las preferencias, por ejemplo, el individuo puritano preferiría que *El Amante de Lady Chatterley* no sea leída por ninguno a que sea leída por el "lascivo" y por él mismo, pero es más fuerte la primera relación que la segunda porque $\mu_{\text{Я}1}(z, y) > \mu_{\text{Я}1}(z, x)$.

MATRIZ 2
RELACIONES DE PREFERENCIA PARA EL INDIVIDUO 2 (EL LASCIVO)

	x	y	z
x	0,0	0,9	0,9
y	0,1	0,0	0,7
z	0,1	0,3	0,0

La Matriz 2 muestra las relaciones de preferencias borrosas que el individuo 2 establece sobre el conjunto de estados del mundo S. Aquí el lascivo prefiere con igual intensidad que la novela sea leída por el puritano a que sea leída por el mismo o a que no sea leída por ninguno. Y la preferencia que existe entre la alternativa de tener que leerla él mismo y que la sociedad no la lea es valorada con 0,7.

Se puede comprobar fácilmente que las relaciones de preferencia individuales dibujadas en las matrices 1 y 2 cumplen con las propiedades de: i. *irreflexividad*, ii. *asimetría* y iv. *transitividad-1*. En otras palabras, las relaciones de preferencia de los individuos, puritano y lascivo de este ejemplo, pertenecen al conjunto H_2.

La *regla de agregación borrosa* (RAB) de Subramanian sugiere que las relaciones de preferencia social entre dos alternativas se pueden encontrar comparando las valoraciones que hagan los individuos entre las mismas alternativas y escogiendo el menor valor, así por ejemplo, entre las alternativas x y y el resultado social correspondería al menor valor con el que el puritano y el lascivo valoren dichas alternativas:

$$\mu_{Я}(x, y) = min\,[\mu_{Я1}(x, y), \mu_{Я2}(x, y)] = min\,[0{,}7,\ 0{,}9] = 0{,}7$$

En consecuencia, la sociedad prefiere que *El Amante de Lady Chatterley* sea leída por el puritano a que sea leída por el lascivo con una valoración de 0,7.

Si aplicamos la RAB de Subramanian a las preferencias entre todas las posibles combinaciones de alternativas obtenemos la Matriz 3.

MATRIZ 3
RELACIONES DE PREFERENCIA PARA LA SOCIEDAD

	x	y	z
x	0,0	0,7	0,2
y	0,1	0,0	0,1
z	0,1	0,3	0,0

Las relaciones de preferencia social presentadas en la Matriz 3 cumplen con las propiedades de: i. *irreflexividad*, ii. *asimetría* y iii. *aciclicidad*. Es decir, la relación de preferencia social que, en este ejemplo, es encontrada por medio de la RAB sugerida por Subramanian pertenece al conjunto H_1.

De la Matriz 3 se puede concluir que la sociedad prefiere que *El Amante de Lady Chatterley* sea leída por el puritano a que sea leída por toda la sociedad con una valoración de 0,2 y, a su vez, considera que es preferible que la sociedad no lea la novela a que lo haga únicamente el lascivo con una valoración de 0,3. Pero si la sociedad valorara sólo las alternativas de que la novela sea leída por el puritano o que sea leída por el lascivo, la sociedad preferiría que la leyera el puritano con una valoración de 0,9. Luego, en la escala de valores de la sociedad es preferible z a y con mayor fuerza que x a z ($\mu_{Я}(z, y) > \mu_{Я}(x, z)$) y, a diferencia del ejemplo que inicialmente planteó Sen [1970a] con *relaciones binarias de preferencia*, no se genera una preferencia cíclica que imposibilite un resultado social.

LOTERÍAS Y ELECCIÓN SOCIAL CON PREFERENCIAS BORROSAS

El riesgo se entiende como el no saber qué evento pueda ocurrir dentro de una lista de distintos eventos probables; la carencia de dicho conocimiento intenta ser superada objetivando el comportamiento del fenómeno en una función de distribución de probabilidad después de infinitas repeticiones del fenómeno.

El concepto de incertidumbre no sólo se refiere a la carencia de conocimiento en tanto no saber qué pueda ocurrir, sino, en general, se refiere a la incapacidad para comprender la naturaleza del fenómeno. Visto de esta manera, el riesgo es un caso particular de la incertidumbre. El estudio de un fenómeno sujeto tanto a riesgo como a incertidumbre es posible abordarlo en términos de conjuntos aleatorios borrosos. El primero en hablar de esta concepto fue Hirota [1981][8].

Cuando la elección de una alternativa social dentro un conjunto de estados del mundo es, de cierta manera, un proceso de elección aleatorio se habla entonces de 'lotería', Fishburn [1973] la define como una función de distribución de probabilidad simple *h* sobre el conjunto de estados del mundo concebibles X, tal que:

i. $\forall\, x \in X$: $h(x) \geq 0$

ii. $\sum_{x \in X} h(x) = 1$

Sea A el conjunto de todas las distribuciones de probabilidad simples definidas sobre X. Dado que todo proceso de elección social sólo toma en cuenta el subconjunto de estados del mundo alcanzables S, el conjunto de distribu-

8 Hirota [1981], citado en Kaufmann y Gil Aluja [1990].

ciones de probabilidad factibles A que le corresponde a S es Y, y se define como:

$$Y = \{h \mid h \in A \; \& \; \sum_{x \in S} h(x) = 1\}$$

Se llamará χ al conjunto de todos los subconjuntos potencialmente factibles de A o, sencillamente, al conjunto de las distribuciones de probabilidad que son factibles.

Una *regla de agregación borrosa* (RAB) para una lotería es un funcional g tal que para cada conjunto de n *relaciones binarias de preferencia borrosas* individuales ($Я_i$) que cumple con ser *irreflexivas* y *asimétricas*, y un conjunto distribuciones de probabilidad factibles χ determina una *relación de preferencia estricta borrosa social*:

$$g: \chi \times G \rightarrow F \text{ donde } \varnothing \neq G \subset F$$

El problema de elección social quedaría descrito de la siguiente manera: para alguna distribución de probabilidad h dentro de las muchas distribuciones que son factibles y para un conjunto de preferencias individuales borrosas G (que pueden pertenecer a los conjuntos H_2, K_2 o M_2) ¿es posible encontrar una RAB que determine unas relaciones de preferencia sociales (que pueden pertenecer a los conjuntos H_1, H_2 o M_2) tal que satisfagan las condiciones P y L* en cualquiera de sus versiones borrosas?

Con el fin de ilustrarlo, considérese que los candidatos presidenciales alcanzables para las elecciones del año 2006 son A, B y C.

$$S = \{A, B, C\}$$

Supóngase que la distribución de probabilidad sobre los candidatos a elegir es *equiprobable* o *laplaciana*, en otras palabras, todos los candidatos tienen la misma probabilidad de ser elegidos, en este caso la probabilidad de ser elegido es de 1/3 para cada candidato. En símbolos:

$$\forall\, x \in S: h(x) = 1/3$$

Se puede ver que la distribución de probabilidad *laplaciana* es sólo una entre muchas de las distribuciones de probabilidad posibles, esto es, $h(x) \in \chi$.

En el caso de conocimiento imperfecto de los candidatos, las preferencias borrosas de los dos únicos individuos que conforman la sociedad son representadas por las Matrices 4 y 5, y pertenecen al conjunto H_2.

MATRIZ 4
RELACIONES DE PREFERENCIA PARA EL INDIVIDUO 1

	A	B	C
A	0,0	0,7	0,2
B	0,3	0,0	0,1
C	0,8	0,9	0,0

MATRIZ 5
RELACIONES DE PREFERENCIA PARA EL INDIVIDUO 2

	A	B	C
A	0,0	0,9	0,9
B	0,1	0,0	0,7
C	0,1	0,3	0,0

Obsérvese que la distribución de probabilidad pudiera ser distinta, por ejemplo debido a una encuesta preelectoral, y estar cargada hacía algún candidato en particular, esto, de alguna manera, hace que las valoraciones que los individuos tienen de sus preferencias también puedan cambiar, este es un rasgo característico de los *conjuntos aleatorios borrosos*.

Otro aspecto que cabe destacar, es que la distribución de probabilidad es la misma para todos los individuos de la sociedad porque es un dato objetivo mientras que las valoraciones de las preferencias son datos subjetivos de cada individuo.

CONCLUSIONES

La preocupación, inicialmente planteada por Sen [1970a], de introducir los derechos individuales en la teoría de la elección social ha sido trabajada en una estructura borrosa por pocos autores. Los resultados son similares al de autores que trabajaron el *teorema de imposibilidad* de Arrow con preferencias borrosas; se mantiene un fuerte cuestionamiento a la transitividad con relaciones de preferencia binaria como único modo de poder expresar la condición de racionalidad. Con preferencias borrosas, la manera con la cual los individuos de una sociedad pueden ordenar las alternativas sociales obedece a múltiples condiciones de transitividad.

Del mismo modo, las preferencias borrosas permiten expresar las condiciones de Pareto y de Liberalismo de Sen de diversas formas, con lo que se obtiene una gama más amplia de posibles escenarios para encontrar *reglas de elección social* que satisfagan, de alguna manera, las versiones borrosas de las condiciones P y L*, y que de esta forma sea posible relajar el resultado de la imposibilidad de un liberal paretiano.

Por último, la introducción de loterías en una estructura borrosa puede ser abordada mediante el concepto de *conjunto aleatorio borroso* conservando los mismos escenarios mencionados arriba.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alcalde-Unzu, J. (2002). *The Paretian Liberal Paradox in a Fuzzy Context: Some Results with Weighted Quasiarithmetic Means*. Disponible en el sitio: http://www.econ.unavarra.es/~ritxar/papers0102/JAlcalde.pdf.

Arrow, K. (1951). *Social Choice and Individual Values*. New York: Wiley and Sons.

Dimitrov, D. (2001). The Paretian Liberal in an Intuitionist Fuzzy Context. En E. Yanovskaya (Ed.), *Proceedings of the Second International Conference. Logic, Game Theory and Social Choice* (pp. 70-73). St. Petersburg.

Fishburn, P. C. (1973). *The Theory of Social Choice*. New Jersey: Princeton University Press.

Hayek, F. A. (1960). *The Constitution of Liberty*. London: Routledge and Kegan Paul.

Hirota, K. (1981). Concepts of Probabilistic Sets. *Fuzzy Sets and Systems*. 5, 31-46.

Kaufmann A. y Gil Aluja, J. (1990). *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre: elementos básicos para su aplicación en economía*. Madrid. Centro de Estudios Ramón Arces.

Mill, John Stuart. (1859/1974). *On Liberty*. London: Parker & Harmondsworth.

Pecha, A. y Villamil, J. (2002). Relaciones de preferencia y elección social en una estructura difusa. *Cuadernos de Economía*. XXI(37), 35-55.

Sen, A. K. (1970a). The Impossibility of a Paretian Liberal. *Journal of Political Economy*. 78(1), 152-157.

Sen, A. K. (1970b). *Collective Choice and Social Welfare*. San Francisco: Holden-Day.

Sen, A. K. (1976). Liberty, Unanimity and Rights. *Economica*. New Series. 43(17), 217-245.

Sen, A. K. (1992). Minimal Liberty. *Economica*. 59(234), 139-159.

Sen, A. K. (1998). The Possibility of Social Choice. *American Economic Review*. 89(3), 349-367.

Shackle, G. L. S. (1953). Economics and Sincerity. *Oxford Economic Papers.* New Series. 5(1), 1-12.

Subramanian, S. (1987). The Liberal Paradox With Fuzzy Preferences. *Social Choice and Welfare*. 4, 213-218.