Compromiso óptimo en la ejecución de proyectos

CARLOS ROMERO
Profesor Adjunto de Economía de la Empresa de la E.T.S. de Ingenieros Agrónomos de la Universidad Politécnica de Madrid

I. INTRODUCCION

Las técnicas de dirección y control de proyectos han experimentado un fuerte impulso en los últimos años. Entre estas técnicas es perfectamente conocido el método PERT (Program Evaluation and Research Technique) en sus dos vertiendes: PERT-tiempos y PERT-costos. El PERT-tiempos estima la duración normal de proyectos, así como los tiempos disponibles para la ejecución de cada una de las actividades en que éste se ha descompuesto. Por el contrario, el PERT-costos permite establecer, para una duración dada del proyecto, el tiempo de ejecución de las actividades, de forma que el coste total de realización sea mínimo.

Como la duración de un proyecto tiene carácter de variable aleatoria, la estimación de esta duración por medio del PERT-tiempos tiene el carácter de una esperanza matemática. Esta circunstancia plantea un importante problema en algunas empresas encargadas de la ejecución, pues estas empresas deben fijar el número de unidades de tiempo en que se comprometen a finalizar un proyecto que desean contratar. Por ejemplo, la empresa E, que desea adjudicarse la ejecución de un proyecto en un concurso de obras, sabe que cuanto menor sea el plazo en que se comprometa a terminarlo, mayor es la probabilidad de conseguir el contrato de ejecución. Ahora bien, según se dispone en este tipo de contratos, si la empresa E no finalizase el proyecto en la fecha pactada, se vería obligada a pagar una multa proporcional al retraso experimentado. Por tanto, si la empresa E se compromete a finalizar el proyecto en un plazo de tiempo corto (por lo general, inferior a la esperanza matemática de la duración dada por el PERT-tiempos) se expone a un coste en concepto de multa (coste de penalización). En el caso contrario, si se compromete a entregar la obra en un plazo más largo (por lo general, superior a la esperanza matemática de la duración dada por el PERT-tiempos), la empresa E se expone a perder la contrata, ya que la obra puede ser adjudicada a otro empresario que ofrezca mejores condiciones en cuanto al plazo de entrega. Es decir, la empresa E se ve obligada entonces a ofrecer una cierta suma en concepto de rebaja sobre el presupuesto de obra, a fin de mejorar su posición frente a otros posibles adjudicatarios. Cuanto más largo sea el plazo, tanto mayor será la rebaja sobre la cifra de presupuesto que ofrecerá E en el concurso de obras. Pero si por circunstancias imputables a la aleatoriedad, E termina el proyecto en un tiempo inferior al plazo de entrega, pensará con razón que ha incurrido en un coste a consecuencia de la rebaja *Coste de rebaja*, que podía haberse ahorrado si hubiera adelantado el plazo. Así, pues, los costes de penalización y rebaja (medidos en términos de probabilidad) son funciones crecientes del plazo de entrega obedeciendo a una cierta ley que en algunos casos podrá ser lineal (véase *hipótesis H-2*, § II). Planteado así el problema, es interesante calcular el plazo de entrega que minimiza la esperanza de la suma de los costes de penalización y rebaja.

Es conveniente aclarar que el planteamiento de este problema es distinto al del PERT-costos. Como es sabido, en el PERT-costos se admite la posibilidad de realizar el proyecto según varios planes alternativos de producción. Por el contrario, en nuestro enfoque el proyecto se ejecuta según un plan de producción perfectamente determinado. Es decir, el caso que estamos analizando cae dentro de la línea del PERT-tiempos, o mejor dicho, es una prolongación de este método.

En este artículo se investiga el problema de la fijación del compromiso óptimo en la ejecución de cierto tipo de proyectos. Se presentan los dos modelos siguientes:

1.° *Situación de riesgo*. Es aplicable al caso en que la empresa E conozca la distribución de probabilidad de la duración del proyecto.

2.° *Situación de incertidumbre*. Es aplicable al caso en que la empresa E no conozca la distribución de probabilidad de la duración del proyecto.

II. SITUACION DE RIESGO

En el desarrollo de este modelo se utilizará la siguiente notación:

x = Duración del proyecto. Es decir, número de unidades de tiempo que ha requerido la obra.

$f(x)$ = función de densidad de la duración del proyecto.

Z = Número de unidades de tiempo en que la empresa E se compromete a finalizar el proyecto (plazo de entrega).

α = Coste unitario de rebaja en que incurre la empresa E si finaliza el proyecto antes de la fecha pactada (v. gr.: pesetas/día).

β = Coste unitario de penalización en que incurre la empresa E si finaliza el proyecto después de la fecha pactada (v. gr.: pesetas/día).

HIPOTESIS H-1.—La variable aleatoria que mide la duración del proyecto sigue una distribución normal. Basándonos en el teorema central del límite y en las bases del método PERT [3 págs., 86-97], podemos decir que la variable aleatoria que mide la duración de un proyecto sigue una distribución normal cuando se cumplen las siguientes condiciones:

a) El número de actividades que forman el camino crítico es bastante elevado.

b) Las variables aleatorias que miden la duración de cada una de las actividades del camino crítico siguen la misma distribución de probabilidad.

c) Existe independencia estadística entre las variables aleatorias definidas anteriormente.

Ninguna de las condiciones anteriores puede considerarse demasiado restrictiva, por lo que la *hipótesis H-1* se puede admitir como una primera aproximación.

HIPOTESIS H-2.—Los costes de rebaja y penalización crecen linealmente con el tiempo. Así por ejemplo, si el coste unitario de penalización es de β unidades monetarias/día, cuando el proyecto se retrase t días el coste total de penalización será de βt unidades monetarias. La *hipótesis H-2* no es esencial en el desarrollo de este trabajo. Ahora bien, siendo una hipótesis bastante realista, su introducción simplifica considerablemente el planteamiento.

HIPOTESIS H-3.—A la empresa E le resulta indiferente perder que dejar de ganar dinero. Es decir, da la misma importancia a un coste de penalización por A unidades monetarias que a un coste de rebaja por la misma cuantía. La *hipótesis H-3* tampoco es esencial en el desarrollo de este trabajo. Podría evitarse aplicando unos coeficientes de ponderación a los costes unitarios α y β. No obstante, mantendremos esta hipótesis en nuestro trabajo por razones de simplificación.

Si $Z > x$ la empresa E experimenta un coste total de rebaja por una cuantía de

$$\alpha (Z - x) \tag{1}$$

Si $Z < x$ la empresa E experimenta un coste total de penalización por una cuantía de

$$\beta (x - Z) \tag{2}$$

La esperanza matemática de la pérdida por ambos conceptos es:

$$\alpha (Z - x) P (x < Z) + \beta (x - Z) P (x > Z) \tag{3}$$

donde $p (x \gtrless Z)$ es la probabilidad de que la duración del proyecto sea mayor, menor o igual que el plazo de entrega.

La expresión [3] es equivalente a:

$$\alpha \int_{-\infty}^{Z} (Z - x) f (x) d x + \beta \int_{Z}^{\infty} (x - Z) f (x) d x \tag{4}$$

El objetivo que persigue la empresa E es el de minimizar la esperanza matemática de la pérdida. Por tanto, debemos derivar la expresión [4] con respecto a Z e igualar a cero. Aplicando la regla de Leibnitz tenemos (*):

$$\alpha \int_{-\infty}^{Z} f (x) d x - \beta \int_{Z}^{\infty} f (x) d x = 0 \tag{5}$$

(*) Sea la integral paramétrica:

$$F = \int_{h(Z)}^{g(Z)} f (x, Z) d x$$

La derivada de la anterior integral respecto al parámetro z, según la regla de Leibnitz, es:

$$\frac{\delta F}{\delta Z} = \int_{h(Z)}^{g(Z)} \frac{\delta f (x, Z)}{\delta Z} d x + f \left[g (Z), Z \right] \frac{d g (Z)}{d Z} - f \left[h (Z), Z \right] \frac{d h (Z)}{d Z}$$

Trasponiendo términos en [5] y teniendo en cuenta que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, resulta:

$$\int_{-\infty}^{Z} f(x)\,dx = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \qquad [6]$$

Sustituyendo en [6] la integral por la probabilidad que representa, tenemos:

$$P\,(x \leq Z) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \qquad [7]$$

De la expresión [7], con ayuda de unas tablas de distribución normal tipificada, se puede despejar sin dificultad el valor de Z. Por tanto, la expresión [7] permite determinar el plazo de entrega óptima, es decir, el número de unidades de tiempo que la empresa E debe fijar para la ejecución del proyecto, de forma que la esperanza de pérdida definida por [3] sea mínima.

Obsérvese que las expresiones [6] y [7] son análogas a la del modelo MIT de gestión de *stocks* [2 págs., 290-91], que permite determinar el *stock* óptimo de un producto en función de los costes de penuria y almacenamiento. Esta analogía es lógica, ya que los costes de rebaja y de penalización son análogos a los costes de almacenamiento y de penuria del modelo MIT.

Aplicación numérica

Se sabe que la duración de cierto proyecto sigue una ley normal de media 40 y varianza 16 (el tiempo viene medido en días). El coste unitario de rebaja α se estima en 300.000 pesetas/día y el coste unitario de penalización β se estima en 100.000 pesetas/día. Se desea determinar el plazo óptimo de entrega.

Sustituyendo en la expresión [7] α y β por los datos anteriores, tenemos:

$$P\,(x < Z) = \frac{100.000}{300.000 + 100.000} = 0{,}25 \qquad [8]$$

Tipificando el primer miembro de la ecuación [8], tenemos:

$$P\left(\frac{x - 40}{4} < \frac{Z - 40}{4}\right) = P\left(x' < \frac{Z - 40}{4}\right) = 0{,}25 \qquad [9]$$

Como en la expresión [9] x' sigue una ley normal de media 0 y varianza 1, consultando unas tablas de esta distribución resulta:

$$\frac{Z - 40}{4} \simeq 0{,}7 \qquad [10]$$

De donde:

$$Z \simeq 37 \text{ días}$$

En aquellos casos en que, por fallar alguna de las condiciones en que se basa la *hipótesis H-1*, no podemos asegurar que la variable aleatoria que mide la duración del proyecto siga una distribución normal, puede resultar útil recurrir a la simulación. Por medio de la simulación podemos construir el histograma de frecuencias acumuladas de la duración total del proyecto. El lector interesado en las técnicas de simulación puede consultar, entre otros trabajos [5]. Construido el histograma de frecuencias, bastará cortarlo por la recta $P(x \leq Z) = \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta}$ para obtener el Z óptimo (Z^*), según se representa en la figura 1.

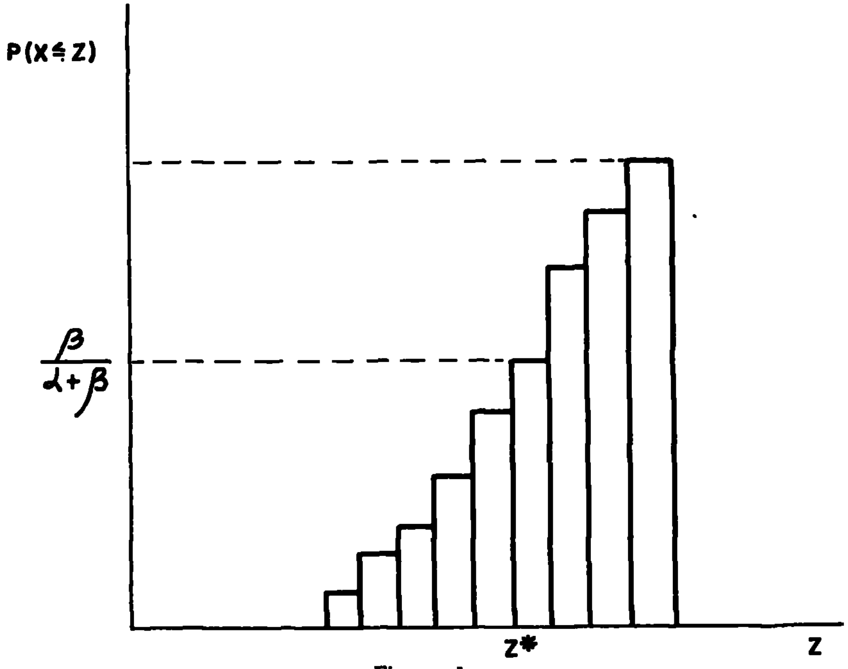

Figura 1.

III. SITUACION DE INCERTIDUMBRE

En este apartado vamos a suponer que la empresa E no conoce la distribución de probabilidad de la variable aleatoria que mide la duración del proyecto. Es decir, la empresa E se enfrenta ahora a un problema de toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre y no bajo condiciones de riesgo, como ocurría en el parágrafo anterior. Por tanto, suprimimos ahora la *hipótesis H-1*, aunque seguimos manteniendo las *hipótesis H-2* y *H-3*.

En tal caso, el problema de la determinación del plazo de entrega puede plantearse como un juego contra la naturaleza. Como se sabe, un juego contra la naturaleza viene definido por los siguientes elementos.

a) Un centro decisor.

b) Un conjunto de n puntos ($S_1 \dots S_j \dots S_n$) que representan las posibles acciones o estrategias a seguir por el centro decisor.

c) Un conjunto de m puntos ($\theta_1 \dots \theta_t \dots \theta_m$) que representan los posibles estados o situaciones que la naturaleza puede presentar.

d) Un conjunto de $n \times m$ puntos ($R_{11} \dots R_{jt} \dots R_{nm}$) que representan los posibles resultados del juego, según cuales sean la estrategia que elija el centro decisor y el estado que presente la naturaleza.

Por tanto, un juego contra la naturaleza se puede representar por medio de una matriz que recibe el nombre de matriz de pagos o matriz del juego. La estructura de esta matriz es la siguiente:

ESTADOS DE LA NATURALEZA

ESTRATEGIAS DEL CENTRO DECISOR

	θ_1	θ_2	. . .	θ_t	. . . .	θ_m
S_1	R_{11}	R_{12}	. . .	R_{1t}	. . . .	R_{1m}
S_2	R_{21}	R_{22}	. . .	R_{2t}	. . . .	R_{1m}
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
S_j	R_{j1}	R_{j2}	. . .	R_{jt}	. . . .	R_{jm}
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
S_n	R_{n1}	R_{n2}	. . .	R_{nt}	. . . .	R_{nm}

En nuestro caso concreto, el centro decisor estará formado por la persona o personas responsables de fijar el plazo de entrega (directivos de la empresa E). Las estrategias representan las diferentes duraciones que en principio se pueden asignar al proyecto (Z_1 ... Z_i ... Z_n). Asimismo los estados de la naturaleza pueden asimilarse también a las anteriores duraciones (Z_1 ... Z_i ... Z_n). Por tanto, en el caso que estamos estudiando la matriz de pagos es cuadrada ($n = m$). Los m x m resultados representan los costes en que incurre la empresa E al comprometerse a realizar el proyecto en un cierto número de unidades de tiempo. Así, por ejemplo, si la empresa E se compromete a realizar el proyecto en Z_3 unidades de tiempo y posteriormente lo finaliza en Z_4 unidades de tiempo, el coste en que incurre dicha empresa (coste de penalización) es: $R_{34} = (Z_4 - Z_3)\ \beta$ unidades monetarias. Si, por el contrario, la empresa E se compromete a realizar el proyecto en Z_3 unidades de tiempo y posteriormente lo finaliza en Z_2 unidades de tiempo, el coste en que incurre dicha empresa (coste de rebaja) es: $R_{32} = (Z_3 - Z_2)\ \alpha$ unidades monetarias. Operando de esta forma obtenemos la siguiente matriz de pagos:

	Z_1	Z_2	...	Z_i	...	Z_n
Z_1	0	$(Z_2 - Z_1)\ \beta$	...	$(Z_i - Z_1)\ \beta$	...	$(Z_n - Z_1)\ \beta$
Z_2	$(Z_2 - Z_1)\ \alpha$	0	...	$(Z_i - Z_2)\ \beta$	...	$(Z_n - Z_2)\ \beta$
.	.		.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
Z_i	$(Z_i - Z_1)\ \alpha$	$(Z_i - Z_2)\ \alpha$	...	0	...	$(Z_n - Z_i)\ \beta$
.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.
.		.		.	.	
Z_n	$(Z_n - Z_1)\ \alpha$	$(Z_n - Z_2)\ \alpha$	...	$(Z_n - Z_i)\ \alpha$	...	0

Aplicando a la matriz anterior alguno de los criterios de la teoría de juegos, por ejemplo el de Wald, la empresa E podrá elegir el plazo de entrega.

Aplicación numérica

Supongamos que la empresa E se encuentra ante una situación de incertidumbre en cuanto a la duración de un cierto proyecto. No obstante, la empresa E considera que en la ejecución del proyecto no va a emplear menos de 36 días (duración optimista del PERT) ni más de 44 días (duración pesimista del PERT). Los costes unitarios de rebaja y de penalización son los mismos que en el § II (aplicación numérica). Es decir: $\alpha = 300.000$ pesetas/día y $\beta = 100.000$ pesetas/día. Haciendo variar la duración del proyecto desde la duración optimista a la pesimista, de dos en dos días, la estructura de la matriz de pagos en este ejemplo sería la siguiente (los elementos de la matriz vienen expresados en miles de pesetas):

	36	38	40	42	44
36	0	200	400	600	800
38	600	0	200	400	600
40	1.200	600	0	200	400
42	1.800	1.200	600	0	200
44	2.400	1.800	1.200	600	0

La construcción e interpretación de la matriz anterior es sencilla. Así, por ejemplo, supongamos que el elemento R_{23} de dicha matriz valga 200. Ello significa que si la empresa E se compromete a realizar el proyecto en 38 días, pero lo termina en realidad en 40 días, incurre en un coste de penalización de:

$$(40 - 38) \times 100.000 = 200.000 \text{ pesetas.}$$

A continuación vamos a aplicar el criterio de Wald a la anterior matriz de pagos:

1.° Si la empresa E elige un plazo de entrega $Z = 36$ (es decir, si juega la primera fila) se expone a incurrir en un coste máximo de 800.000 pesetas en el caso de acabar el proyecto en 44 días.

2.° Si la empresa E elige un plazo $Z = 38$ (es decir si juega la segunda fila) se expone a incurrir en un coste máximo de 600.000 pesetas en el caso de acabar el proyecto en 36 ó 44 días.

3.° Si la empresa E elige un plazo $Z = 40$ (es decir, si juega la tercera fila) se expone a incurrir en un coste máximo de 1.200.000 pesetas en el caso de acabar el proyecto en 36 días.

4.° Si la empresa E elige un plazo $Z = 42$ (es decir, si juega la cuarta fila) se expone a incurrir en un coste máximo de 1.800.000 pesetas en el caso de acabar el proyecto en 36 días.

5.° Si la empresa E elige un plazo $Z = 44$ (es decir, si juega la quinta fila) se expone a incurrir en un coste máximo de 2.400.000 pesetas en el caso de acabar el proyecto en 36 días.

Según el criterio de Wald, que corresponde a una conducta prudente, la empresa E deberá elegir aquella fila (plazo de entrega) que minimice el coste máximo. En el ejemplo, la segunda fila cumple esta condición. Por tanto, la empresa E deberá comprometerse a finalizar el proyecto en 38 días.

Naturalmente, se pueden aplicar otros criterios de la teoría de la decisión a la resolución de este tipo de problemas (Laplace, Hurwicz, Agrawal-Heady...). El lector interesado en los criterios clásicos de la teoría de la decisión puede consultar, entre otros trabajos [1, págs. 283-302, 4].

RESUMEN

En este artículo se refiere a una empresa de ejecución de proyectos que debe fijar el plazo de entrega de una cierta obra con vistas a un concurso de adjudicación, exponiéndose a una penalización por retraso en la entrega y ofreciendo una rebaja sobre el presupuesto de ejecución a fin de mejorar su posición frente a otras empresas concursantes. Se han investigado dos modelos: el primero es aplicable al caso en que la empresa E conozca la distribución de probabilidad de la duración del proyecto (situación de riesgo); el segundo el aplicable al caso alternativo en que la empresa E no conoce la distribución de probabilidad de la duración del proyecto (situación de incertidumbre).

REFERENCIAS

[1] Ballestero, E.: *Principios de Economía de la Empresa*. Alianza Universidad, 1975.

[2] Bowman, E. H.; Fetters, R. B.: *Analysis for Production Management*. Richard D. Irwin, Inc. Homewood, 1961.

[3] Kaufmann, A.; Desbazeille, G.: *Método del Camino Crítico* (versión española de Companys, R.). Sagitario, 1965.

[4] Luce, R. D.; Raiffa, H.: *Games and Decisions*. John Wiley and Sons, 1957.

[5] Meier, R. C.; Newell, W. T.; Pazer, H. L.: *Simulation in Business and Economics*. Prentice-Hall, Inc., 1969.