Programación lineal en números enteros

A. SUAREZ SUAREZ

1. CONSIDERACIONES GENERALES

En la mayor parte de los casos, la solución óptima de un problema de programación lineal no viene expresada en números enteros. Las variables que forman parte de la solución óptima, al menos algunas de ellas, toman valores fraccionarios o mixtos —parte entera y parte fraccionaria—. Ello carece de sentido económico, ya que, por ejemplo, si se trata de un programa lineal que simula el proceso de fabricación de coches, no tiene sentido fabricar veinte coches de un determinado modelo y cinco doceavos de coche. En la práctica, suele aproximarse por defecto ya que ,de lo contrario, se consumirían más factores fijos de los disponibles, lo cual es imposible. Sin embargo, cuando existen varias variables que toman valores no enteros, se aproximan unos valores por defecto y otros por exceso, con la precaución de que no se rebasan las existencias disponibles de ninguno de los factores fijos. En tales casos, el óptimo se altera muy ligeramente. Otras veces, sin embargo, al redondear, el óptimo se altera considerablemente, sobre todo cuando se trata de unidades de mucho valor, como barcos, aviones, hoteles, etc. La solución aproximada —en números enteros— puede dejar de ser la óptima, pues es posible que exista otra solución en número enteros mejor. Ello se ve claramente n el siguiente ejemplo.

EJEMPLO.

Maximizar la función:

$$Z = 7\,^{11/17}\,\lambda\,1 + 9\,^{7/17}\,\lambda\,2$$

Restricciones:

$$\begin{aligned} 4\,\lambda_1 + 6\,\lambda_2 &\leq 24 \\ 5\,\lambda_1 + 4\,\lambda_2 &\leq 20 \\ \lambda_1,\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Como se trata de un programa lineal muy sencillo, fácilmente puede resolverse representándolo gráficamente en el espacio de las actividades.

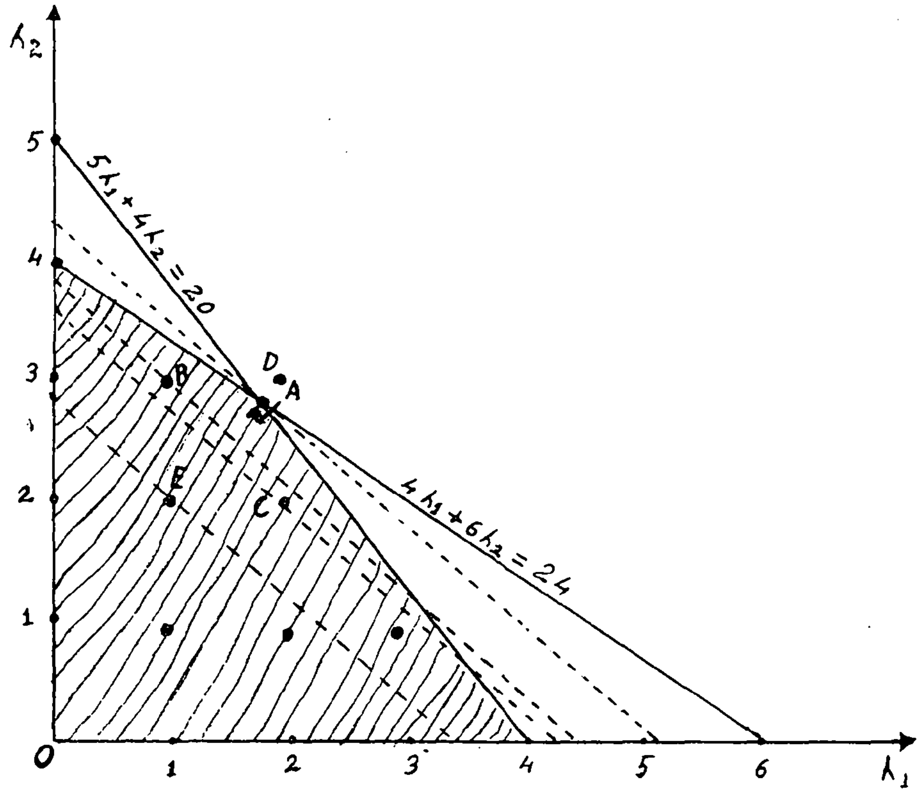

Fig. 1.

Las soluciones posibles del programa lineal están contenidas en la zona rayada de la fig. 1. La función objetivo, para diferentes valores de Z, está representada en la fig. 1 por rectas de trazado discontinuo. La solución óptima es la correspondiente al punto A de coordenadas: ($\lambda_1 = 1^{5/7}$, $\lambda_2 = 2^{6/7}$). La función objetivo Z alcanza su valor máximo: Zo = 40. No podemos aproximar por exceso ya que el punto D de coordenadas ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$), cae fuera de la región de soluciones admisibles. Si aproximamos, por defecto, a la solución en números enteros ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$), correspondiente a las coordenadas del punto E de la fig. 1, le corresponde un valor de la *función objetivo*: *Z'o = 26* $^{8/17}$. Gráficamente se ve que la solución en números enteros óptima es la que corresponde al punto B de coordenadas ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$), el valor de la función objetivo es: Z"o $= 35^{15/17}$. La solución en números enteros correspondientes al punto C de coordenadas ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$) se aproxima mucho a la óptima, como puede observarse en la fig. I, el valor correspondiente de la función objetivo es: Z'"o $= 34^{2/17}$.

El procedimiento seguido tradicionalmente de resolver un problema de programación lineal en números enteros por el método del simplex normal, y luego redondear cuando en la solución óptima existe algún valor no entero, está lejos de ser riguroso. Al redondear no se puede tener ninguna seguridad de que la nueva solución en números enteros sea la óptima; puede existir otra solución en números enteros mejor. Por ello, y para salvar tal inconveniente, se han desarrollado varios algoritmos que con mayor o menor rigos tratamos en este trabajo.

2. EL ALGORITMO DE R. E. GOMORY

2.1. *Consideraciones previas.*

El sistema de restricciones de un problema de programación lineal, prescindiendo de las restricciones de no negatividad, se dice que viene da en forma "standard" cuando presenta la siguiente estructura formal:

$$\begin{aligned}
a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1m}\lambda_m + a_{1m+1}\lambda_{m+1} + \ldots + a_{1n}\lambda_n &= a_{10} \\
a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2m}\lambda_m + a_{2m+1}\lambda_{m+1} + \ldots + a_{2n}\lambda_n &= a_{20} \\
a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + \ldots + a_{mm}\lambda_m + a_{mm+1}\lambda_{m+1} + \ldots + a_{mn}\lambda_n &= a_{m0}
\end{aligned} \qquad [2.1.1]$$

Realizando operaciones elementales convenientes, el sistema anterior podemos representarlo en forma "canónica":

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \qquad + \bar{a}_{1m+1}\lambda_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1n}\lambda_n &= \bar{a}_{10} = \bar{\lambda}_1 \\
\lambda_2 \qquad + \bar{a}_{2m+1}\lambda_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{2n}\lambda_n &= \bar{a}_{20} = \bar{\lambda}_2 \\
\lambda_m + \bar{a}_{mm+1}\lambda_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{mn}\lambda_n &= \bar{a}_{m0} = \bar{\lambda}_m
\end{aligned} \qquad [2.1.2]$$

Vamos a suponer, por comodidad, que la solución:

$$[\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_2, \ldots, \lambda_m = \bar{\lambda}_m]$$

es la solución óptima de un cierto programa lineal del que se desea obtener una solución en número enteros. Si todas las $\bar{\lambda}_i$ de tal solución son números enteros, el problema está resuelto. De lo contrario, si alguno de los $\bar{\lambda}_i$ o varios son números no enteros se procederá como se indica seguidamente.

2.2. *Restricciones adicionales.*

Supongamos, por ejemplo, que $\bar{\lambda}_3$ es un valor no entero. Si designamos por $\bar{\lambda}_{3e}$ a su parte entera y por $\bar{\lambda}_{3d}$ a su fraccionaria o decimal, podemos establecer:

$$\bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda}_{3e} + \bar{\lambda}_{3d} \qquad [2.2.1]$$

Alguno de los coeficientes $\bar{a}_{3j}$, $j \xi \{ m + 1, \ldots n \} = J$

tiene que ser necesariamente no entero. De lo contrario no existiría ninguna solución en números enteros que verificara la 3-ésima ecuación del sistema [2.1.2], y, por tanto, no existiría ninguna solución en números enteros que optimizara la función, objetivo del programa lineal correspondiente.

Llamando $\bar{a}_{3je}$ a la parte entera del coeficiente $\bar{a}_{3j}$ y $\bar{a}_{3jd}$ a su parte decimal, se verificará que:

$$\bar{a}_{3j} = \bar{a}_{3je} + \bar{a}_{3jd}, \quad j \xi J \qquad [2.2.2]$$

La 3-ésima ecuación del sistema [2.1.2], en virtud de la [2.2.1] y de la [2.2.2], podemos expresarla así:

$$\lambda_3 = \bar{\lambda}_3 - \sum_{j \xi J} \bar{a}_{3j} \lambda_j = \left(\bar{\lambda}_{3e} - \sum_{j \xi J} \bar{a}_{3je} \lambda_j \right) + \left(\bar{\lambda}_{3d} - \sum_{j \xi J} \bar{a}_{3jd} \lambda_j \right) \qquad [2.2.3]$$

Consideremos ahora la función:

$$f(\lambda_j) = \bar{\lambda}_{3d} - \sum_{j \xi J} \bar{a}_{3jd} \lambda_j \qquad [2.2.4]$$

Si, al menos, una de las fracciones $\bar{a}_{3jd}$ es positiva, podemos hacer:

$$f(\lambda_j) = \bar{\lambda}_{3d} - \sum_{j \xi J} \bar{a}_{3jd} \lambda_j = 0 \qquad [2.2.5]$$

Lo anterior siempre es posible, podemos arreglárnoslas de tal modo para que no sólo una de las fracciones $\bar{a}_{3jd}$ sea positiva, sino todas. Pues, como muy bien dice W. J. BAUMOL (1), si consideramos, por ejemplo, los números 2'.7 y —5'1, existen al menos dos formas de separar la parte entera y la parte decimal. Podemos escribir 2'7 = 2 + 0,7, o bien, 2'7 = = 3 — 0'3; de igual modo, —5'1 = —5 — 0'1, o bien, —5'1 = — 6 + + 0'9.

La ecuación [2.2.5] es la de un hiperplano que divide el espacio de actiivdades n-dimensional, más concretamente, el conjunto convexo engendrado por las soluciones posibles del programa lineal correspondiente, en dos regiones. La región A en la que f $(\lambda) > 0$, y la región B en la que f $(\lambda) \leq 0$. Todo punto de coordenadas en números enteros tiene que estar necesariamente en la región B, y, por tanto, la solución óptima buscada. Pues las coordenadas λ_j, $j \xi J$, del punto extremo: P =

$$[\lambda_1 = \overline{\lambda}_1, \lambda_2 = \overline{\lambda}_2, \ldots, \lambda_m = \overline{\lambda}_m]$$

son tadas nulas. Sin embargo, para otro punto interior P' del conjunto convexo con coordenadas en números enteros, algunas λ_j serán nulas y otras no, como los coeficientes $\overline{a}_{3jd}$ son positivos, se verificará que:

$$f\ (P') \leq f\ (P) \qquad [2.2.6]$$

Como las coordenadas de P' son todas enteras, f (P') es según [2.2.3] entera, más concretamente, negativa o nula. Luego, P' está necesariamente en la región B.

Luego, separando del conjunto convexo engendrado por las soluciones posibles del programa la región A, no eliminaremos ninguna solución en número enteros. (Ver (2), (3) y (4).)

Agregaremos entonces a las restricciones del programa lineal la restricción:

$$\overline{\lambda}_{3d} - \sum_{j \xi I} \overline{a}_{3j} \lambda_j \leqslant 0 \qquad [2.2.7]$$

Más concretamente:

$$-\lambda_{n+1} = \overline{\lambda}_{3d} - \sum_{j \xi J} \overline{a}_{3jd} \lambda_j \qquad [2.2.8]$$

Optimizaremos nuevamente la función objetivo correspondiente contando con la nueva restricción [2.2.8]. Para resolver el nuevo programa ampliado no es necesario comenzar de nuevo, conviene aprovechar los cálculos realizados anteriormente. A la última tabla del simplex, que corresponde a la solución óptima:

$$(\lambda_1 = \overline{\lambda}_1, \lambda_2 = \overline{\lambda}_2, \ldots, \lambda_m = \overline{\lambda}_m)$$

en números no enteros, adicionaremos una nueva fila y una nueva columna, y quedará ahora así:

			P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_n	P'_{n+1}
			c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n	0
P_1	c_1	$\bar{\lambda}_1$	1	0	...	0	$\bar{a}_{1m+1}$	...	$\bar{a}_{1n}$	0
P_2	c_2	$\bar{\lambda}_2$	0	1	...	0	$\bar{a}_{2m+1}$	...	$\bar{a}_{2n}$	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮			0
P_m	c_m	$\bar{\lambda}_m$	0	0	...	1	$\bar{a}_{mm+1}$	...	$\bar{a}_{mn}$	0
P_{n+1}	0	$-\bar{\lambda}_{3d}$	0	0	...	0	$\bar{a}_{3m+1d}$	...	$\bar{a}_{3nd}$	1
			z_1	z_2	...	z_m	z_{m+1}	...	z_n	0
			w_1	w_2	...	w_m	w_{m+1}	...	w_n	0

FIG. II

Como la variables λ_{n+1} tiene en la función objetivo un coeficiente nulo, y dada la forma particular de la restricción adicional, los coeficientes de las m primeras filas del cuerpo central de la nueva tabla del simplex siguen siendo iguales a las de la tabla anterior, la nueva solución básica:

$$[\ \lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_2, \ldots, \lambda_m = \bar{\lambda}_m, \lambda_{n+1} = \bar{\lambda}_{3d}\ ]$$

sigue verificando la condición de optimidad: $c_i - z_i = w_i \leq 0$ en el caso de máximo. Sin embargo, como λ_{n+1} en la nueva solución básica toma un valor negativo, para la búsqueda del óptimo utilizaremos el Método Dual del Simplex. (Algoritmo de C. E. LEMKE (5).)

La *restricción adicional* [2.2.8] se denomina "restricción adicional de GOMORY". Si en la nueva solución óptima existe algún valor no entero, se introducė, de igual modo, una nueva restricción. Así sucesivamente hasta que una solución en número enteros haya sido alcanzada o se demuestre que no existe.

R. E. GOMORY (6) propone elaborar la restricción adicional a partir de la fila de la tabla del simplex, que contiene la solución óptima en números no todos enteros, que corresponda al nivel no entero con la parte fraccionaria λ_{id} mayor. Considera que así se alcanzará la solución en números enteros antes. (Ver también (7).)

E. M. L. BEALE (8) ha estudiado el caso gneral en que sólo algunas variables deben tomar valores enteros. Un poco más tarde, aunque de manera algo diferente, también R. E. GOMORY (9). De aquí que se hable del segundo algoritmo de GOMORY, aunque su fundamento sea el mismo que el del primero.

El lector interesado encontrará en (10) y (11) una exposición muy completa y rigurosa del problema.

3. EL METODO "BRANCH AND BOUND"

Como muy bien dice J. W. GAVETT y N. V. PLYTER (12), el método "branch and bound" ha sido desarrollado por J. D. C. LITTLE y otros para encontrar la solución óptima del clásico y discutido problema del "viajante de comercio". Sin embargo, este método es aplicable a un gran número de problemas de muy diferente naturaleza, sobre todo a aquellos que, como el del "viajante de comercio", el número de combinaciones es elevado. A diferencia del método o métodos de GOMORY, el método "branch and bound" permite resolver programas lineales en números enteros con relativa facilidad, es de comprensión fácil y puede programarse sin dificultad en ordenadores.

En el artículo de J. D. C. LITTLE y otros (13) se expone con gran elegancia y sencillez la aplicación del método a la resolución del problema del "viajante de comercio"; no obstante, en cada caso concreto requiere una adaptación conveniente. El fundamento del método consiste en asociar un árbol a las posibles soluciones del problema. El primer vértice representará el conjunto de todas las soluciones, luego de dicho vértice partirán dos ramas —aristas—, de las que colgarán dos vértices que contendrán —o, lo que es igual, estarán marcados— dos subconjuntos de soluciones posibles. Tales vértices vuelven a ramificar y se vuelve a subdividir el subconjunto de posibles soluciones contenidas en el vértice anterior, y así sucesivamente hasta que se llegue a separar cada una de las soluciones en particular. Cada uno de los vértices "pendientes" o "colgantes" contendrá —estará marcados—, claro está, una posible solución del problema original (ver fig. 2).

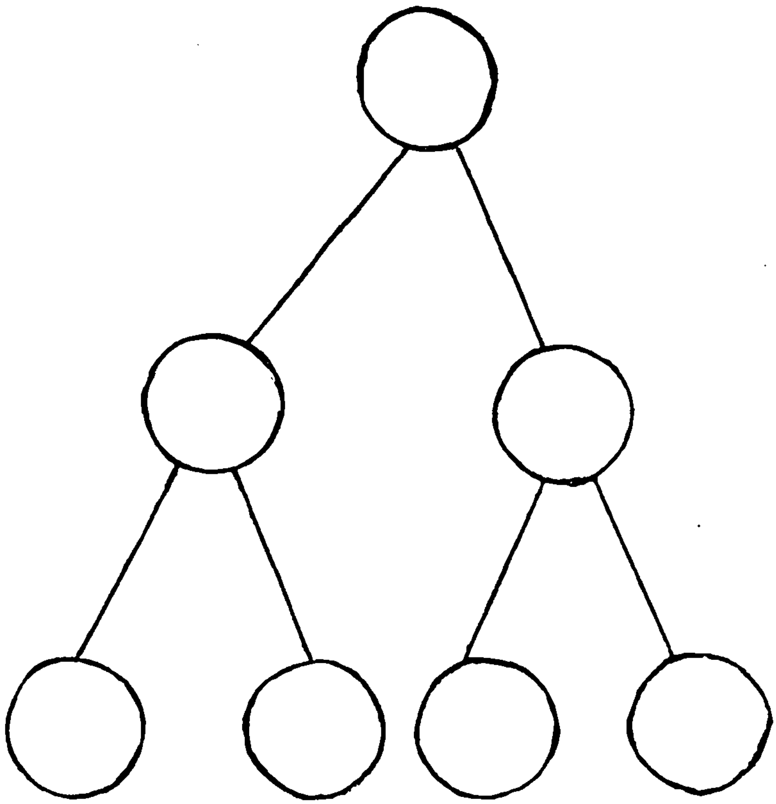

Fig. II.

La importancia e interés de este método radica en que no es necesario explorar el árbol de soluciones en su totalidad. El valor de la función objetivo en un vértice constituye un límite inferior para los valores que tome dicha función en los vértices siguientes. Por ello, el árbol se va ramificando graudalmente en aquellos vértices que convenga a la vista de los valores que vaya tomando la función objetivo. Como dice G. HENRY (14), el método "branch and bound" nos garantiza llegar a la solución óptima, pero sin conocer anticipadamente el coste necesario para ello.

No es esencial para poder aplicar el método —como dice J. J. DUBY (15)— que la arborescencia asociada al conjunto de soluciones sea binaria. Es necesario, sin embargo, que: primero: se puede definir una arborescencia asociada al conjunto de soluciones; segundo: que se pueda minorar el coste de todas las soluciones cuyas ramas tienen un tronco común.

El autor citado en el párrafo anterior aplica el método "branch and bound" a la resolución de un importante problema de fabricación de tricots.

Los autores EFROYMSON-RAY (16) y G. HENRY (14) aplican este ingenioso método a la resolución de un interesante problema de localización industrial.

Como primer antecedente de este método, el lector interesado puede ver el artículo de A. H. LCND y A. G. DOIG (17).

4. OTROS METODOS

Existe un método booleano para la resolución de programas lineales en números enteros. Tal método consiste en reemplazar ias variables del programa original por variables binarias, por tanto, la función objetivo y las restricciones estarán expresadas en variables binarias. Se trata de un método sencillo, práctico y altamente intuitivo. Como las variables binarias sólo pueden tomar el valor cero o la unidad, se excluye la posibilidad de que alguna de las variables pueda tomar un valor no entero. Una exposición muy completa de dicho método puede verse en (18).

N. J. DRIEBEK (19) propone un método para resolver programas lineales cuando algunas de las variables deben tomar valores enteros. Representa una variable entera, *Vi*, como una suma de variables binarias. Así:

$$Vi = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}\ , \quad t_{ij} = 0, 0', 1, j = 1, 2, \ldots, n$$

En donde n es el límite superior de la variable *Vi*.

Se verificará que:

$$1 \geqslant t_{i1} \geqslant t_{i2} \geqslant \ldots \geqslant_{in} \geqslant o$$

El fundamento del método propuesto por DRIEBEEK es similar al del método booleano. (Ver también (20).)

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

(1) W. J. BAUMOL: *Théorie économique et analyse opérationnelle,* Dunod, París, 1963, pág. 133.

(2) J. LESOURNE: *Técnica económica y gestión industrial,* Aguilar, Madrid, 1964, págs. 475-477.

(3) R. E. GOMORY: *Essentials of an Algorithm for Integer to Linear Programs,* Bull. Amer. Math. Soc., vol. 64, núm. 5, 1958.

(4) R. E. GOMORY y W. J. BAUMOL: *Integer Programming and Pricing,* Econométrica, vol. 28, núm. 3, 1960.

(5) C. E. LEMKE: *The dual method of solving the linear programming problem,* Naval Research Quartely, vol. 1, núm. 1, 1954.

(6) R. E. GOMORY: *An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs,* Princenton - IBM Mathematics Research Project, Technical Report, núm. 1, noviembre 17, 1958.

(7) R. GROVE: *La programmation linéaire en nombres entiers appliquée à un problème de transport de personnel,* Revue Française de Recherche Opératiannelle, segundo trimestre, 1966.

(8) E. M. L. BEALE: *A Method of Solving Linear Programming Problems when some but not all of the variables must take Integral Valnes,* Statistical Techniques Research Group, Princenton University, Technical Report, núm. 19, 1958.

(9) R. E. GOMORY: *An Algorithm for the Mixed Integer Problem,* The RAND Corp., Paper 1885, 1960.

(10) M. SIMONNARD: *Programmation linéaire,* Dunod, París, 1962, págs. 160-194.

(11) G. B. DANTZIG: *Applications et prolongements de la programation linéaire,* Dunod, París, 1966, págs. 333-370.

(12) J. W. GAVETT y N. V. PLYTER: *The optimal assignment of facilities to location by branch and bound,* Operations Research, vol. 148, núm. 2, 1966.

(13) J. D. C. LITTLE, K. G. MURTY, D. W. SWEENEY y C. KAREL: *An Algorithm for Traveling Salesman Problem,* Operations Research, vol. 10, núm. 6, 1963.

(14) G. HENRY: *Recherche d'un résean de dépôts optimun,* Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, segundo trimestre, 1968.

(15) J. J. DUBY: *Un exemple d'application de la méthode "branch and bound". Détermination de variables de decisión,* Gestion, mayo, 1966.

(16) M. A. EFROYMSON y T. L. RAY: *A branch-bound algorithm for plan location,* Operations Research, vol. 14, núm. 3, 1966.

(17) A. H. LAND y A. G. DOIG: *An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems,* Econométrica, vol. 28, núm. 3, 1960.

(18) R. FAURE e Y. MALGRANGE: *Une méthode booléienne pour la résolution de programmes linéaires en nombres entiers,* Gestion, abril, 1963.

(19) N. J. DRIEBEEK: *An Algorithm for the Solution of Mixed Integer Programming Problems, Management Science,* vol. 12, núm. 7, 1966.

(20) S. ZIONTS: *On an Algorithm for de Solution of Mixed Integer Pragraming Problems,* Management Science, vol. 15, núm. 1, 1968.