SOBRE LA MATEMATICA DE LA PROGRAMACION

Una parte de la Topología ha venido a ser una importante rama del método económico: el estudio de los conos poliédricos convexos.

La investigación de los extremos de un escalar:

$$l = d + \Sigma c_i x_i$$

para valores no negativos de x_i, $i = 1, \ldots, n$, tales que:

$$\Sigma a_{ij} x_i \geq b_j$$
$$j = 1, 2, \ldots, m$$

es el problema más conocido y el que ha dado a la Programación Lineal (o Análisis de Actividades) su inadecuado adjetivo.

Desde el punto de vista formal, puramente matemático, es un problema antiguo, aunque la aportación de Dantzig al mismo y la literatura que ha surgido en torno al método del simplex le han dado naturaleza de actualidad (1).

Junto a la búsqueda de un escalar extremo, se plantea en la Programación Lineal la de vectores eficientes sujetos, asimismo, a inecuaciones de condición. Para este aspecto más general de aquella ciencia se hace necesario el estudio de los conos poliédricos convexos.

---

(1) *Vid*, por ejemplo, FARKAS: *Über die Theorie der einfachen Ungleichungen* (1902).

Actividad y proceso

Una actividad es la expresión de una transformación económica.

Conocemos en sentido económico una transformación cuando conocemos las cantidades de bienes que entran como medios y las que salen como productos. Establecido un orden, toda actividad es representable por un vector.

Sea la actividad a_r que produce a_{1r} de un bien Y_1, a_{2r} de un bien Y_2, etc., y que consume a_{jr} de un medio Y_j, $a_{j+1,r}$ de un medio Y_{j+1}, etc. Si son n los bienes que intervienen, la actividad quedará representada por el vector:

$$a_r = \begin{vmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ -a_{jr} \\ -a_{j+1,r} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ -a_{nr} \end{vmatrix} \qquad \text{"2"}$$

El signo negativo del consumo de medios indica el sentido contrario, de esta corriente de bienes, al de la corriente de productos (2).

Un proceso se define como el conjunto de actividades que son proporcionales; es decir: a_r y a_s son actividades pertenecientes al mismo proceso cuando:

$$\frac{a_{jr}}{a_{js}} = K; \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(2) De otro modo, se puede considerar al vector a_r como diferencia entre dos estados; la diferencia correspondiente a las salidas será positiva; la de las entradas, negativas.

En otros términos, todos los puntos de un rayo definen un proceso.

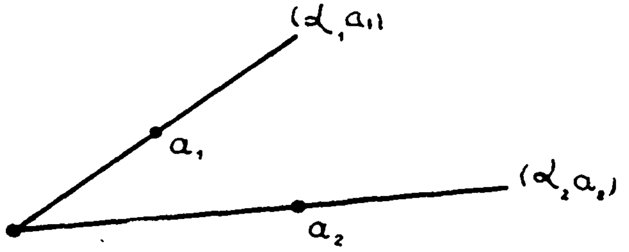

Fig. 1.

Dentro de cada proceso podemos definir una *actividad básica* a_1, y el resto de ellas viene dado por el producto:

$$a = \alpha_1 \, a_1$$

$$\alpha_1 \geq 0$$

al coeficiente α_1 le denominamos nivel de actividad; puede ser igual a cero, porque aceptamos la no utilización de alguna actividad disponible, pero no puede ser negativo.

El postulado básico del Análisis de Actividades es la afirmación de que una suma de procesos, a niveles predeterminados, da lugar a otro proceso. Es decir, afirma que toda actividad a viene dada por:

$$a = \alpha_1 \, A_1 + \alpha_2 \, A_2 + \dots + \alpha_k \, A_k$$

$$\alpha_1 \geq 0 \quad (3)$$

(3) El signo $\geq$ indica mayor o igual que cero, pero no todo α_i igual a cero. Cuando no existe esta última condición empleamos $\geqq$. Unicamente pueden ser cero $_{k-1}$ niveles.

O, de otro modo, si suponemos que:

$$A_1 = \left| \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{n1} \end{array} \right| ; \ldots ; A_k = \left| \begin{array}{c} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{nk} \end{array} \right|$$

y formamos la matriz:

$$A = | A_1 \, A_2 \ldots A_k | = \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{array} \right|$$

la actividad a viene dada por:

$$a = A \alpha \; ; \quad \alpha \geqq 0$$

A la matriz A la denominamos matriz técnica o tecnología. Cada tecnología simboliza un especial sistema de producción, Todas las actividades del proceso vienen dadas por la igualdad:

$$y = A x \; ; \quad x \geqq 0$$

en función de los valores posibles del vector de niveles de actividad x.

El Análisis de Actividades se centra en la investigación de las propiedades de actividades definidas a través de una matriz técnica y un vector de niveles de actvidad. De aquí la importancia de los conos poliédricos convexos, que son la expresión topológica de la anterior igualdad.

Conos convexos

Un espacio es convexo cuando al contener los puntos A y B contiene al segmento $\overline{AB}$.

Los puntos de dicho segmento vienen dados por:

$$P = \alpha A + (1 - \alpha) B$$
$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (4)$$

Los puntos que están comprendidos en el poliedro A B C... L son de la forma:

$$P = \alpha_1 A + \alpha_2 B + \ldots + \alpha_l L; \quad \Sigma \alpha_i = 1$$

En la figura

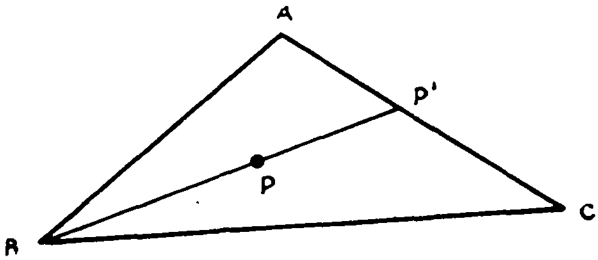

Fig. 2.

vemos

$$P = \alpha B + (1 - \alpha) P' = \alpha B + (1 - \alpha) [\beta A + (1 - \beta) C] =$$
$$= \alpha B + \beta (1 - \alpha) A + (1 - \alpha) (1 - \beta) C = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

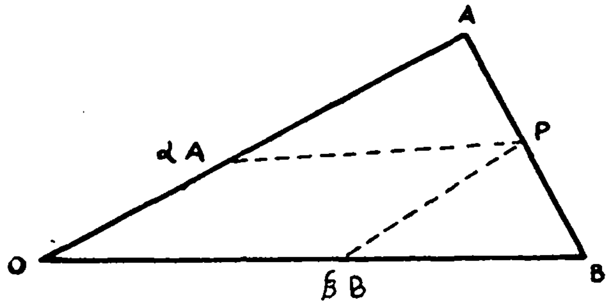

Fig. 3.

$$\frac{A}{A - \alpha A} = \frac{B}{B \beta}$$
$$1 = \alpha + \beta$$

(4) Como se comprueba en la figura...

Si trazamos rayos desde el origen que contengan todos los puntos del poliedro obtenemos un cono poliédrico convexo, cuyos puntos serán:

$$p = K \cdot P = K(\alpha_1 A + \alpha_2 B + \dots + \alpha_l L)$$

$$K \geqq 0$$

Recíprocamente, todo punto de la forma

$$P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_k P_k$$

$$\alpha_i \geqq 0$$

puede siempre ponerse en la forma

$$P = \Sigma \alpha_i (\alpha'_1 P_1 + \alpha'_2 P_2 + \dots + \alpha'_k P_k) \ ; \quad \alpha'_i = \frac{\alpha_i}{\Sigma \alpha_i}$$

$$\Sigma \alpha'_i = 1$$

donde el paréntesis es un punto del poliedro $(P_1 P_2 \dots P_k)$.

Vemos, pues, que todo punto de un cono definido por la estructura $| P_1 P_2 \dots P_k |$ tiene la forma:

$$P = \Sigma \alpha_i P_i$$

$$\alpha_i \geqq 0$$

Vemos que toda actividad

$$a = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k$$

$$\alpha_i \geqq 0$$

cae necesariamente dentro de un cono definido por la matriz

$$A = |A_1 A_2 \dots A_k|$$

En lo sucesivo, los conos los representamos por la matriz que los define puesta entre paréntesis.

Como los bienes que forman una actividad pueden dividirse en tres clases: primarios (medios de producción), intermedios (son producidos y consumidos dentro del proceso) y finales (productos), cualquier actividad puede representarse por:

$$\begin{vmatrix} Y_{fin} \\ Y_{int} \\ \cdot \\ Y_{prim} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{fin} \\ A_{int} \\ \\ A_{prim} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix}$$

habiendo hecho una partición en la matriz técnica, que separa cada grupo de bienes.

En resumen, toda transformación está compuesta por un grupo de actividades, representables por los puntos de un cono convexo, que tiene una estructura definidora dada por los puntos representativos de las actividades básicas iniciales. Dentro del espacio en que está el cono se pueden distinguir subespacios formados por las distintas clases de bienes que entran en el proceso. La representación de los conos de puntos posibles puede hacerse a través de las matrices tecnológicas, lo que da origen a un especial logicismo que, en parte, vamos a iniciar en los párrafos siguientes.

Elementos de los conos convexos

El menor espacio que contiene a un cono (A) es su espacio dimensional D(A). Viene dado, pues, por la intersección de todos los espacios continentes de (A).

$$D(A) = E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_k$$

$$(A) \subset E_i\ ; \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

El mayor espacio contenido por un cono (A) es su espacio lineal. Viene definido por la suma de todos los espacios que están dentro de (A).

$$L(A) = E'_1 \cup E'_2 \cup \ldots \cup E'_h$$

$$(A) \supset E'_j\ ; \qquad j = 1, 2, \ldots, h$$

Si representamos por

$$(\mathrm{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

al ortante positivo, vemos que el espacio dimensional es el definido por:

$$(\pm \mathrm{I}) = \begin{pmatrix} +1 & 0 \dots & 0 \dots & 0 \\ 0 & +1 \dots & -1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & 0 \dots & -1 \end{pmatrix}$$

La dimensión de $\mathrm{D}(\mathrm{A}) = d(\mathrm{A})$ es la *dimensionalidad* de A.

La dimensión de $\mathrm{L}(\mathrm{A}) \equiv l(\mathrm{A})$ es la *linealidad* de A.

El cono $(+\mathrm{I})$ en E_3 tiene $d(\mathrm{I}) = 3, l(\mathrm{I}) = 0$.

El cono

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene:

$$d(\mathrm{E}) = 3$$

$$l(\mathrm{E}) = 2$$

El cono $(\pm \mathrm{I})$ tiene:

$$d(\pm \mathrm{I}) = l(\pm \mathrm{I}) = n$$

El cono que cumple

$$d(\mathrm{A}) = l(\mathrm{A})$$

se le llama *cono sólido*. Aquel cuya linealidad es cero se le denomina *cono punteado*.

Operaciones con conos

Dos conos (A) y (B) son iguales si

$$(A) \supset (B)$$

$$(A) \subset (B)$$

La suma de:

$$(A) = (A_1\, A_2 \ldots A_k) \text{ y } (B) = (B_1\, B_2 \ldots B_n)$$

viene dada por:

$$(A + B) = (A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_n) = (AB)$$

Esta definición es consecuencia de la definición de cono como suma de rayos, o del conjunto de actividades posibles como suma de procesos.

Si es:

$$A = A_1\, \alpha_1 + A_2\, \alpha_2 \ldots + A_k\, \alpha_n$$

$$B = \beta_1\, B_1 + \beta_2\, B_2 + \ldots + \beta_h\, B_h$$

$$\alpha_1\, \beta \geqq 0$$

$$A + B = \Sigma\, \alpha_i\, A_i + \Sigma\, \beta_i\, B_i$$

La existencia de vectores comunes en la estructura de (A) y en la de (B) no supone la repetición de ellos en la estructura suma. Por ejemplo:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{vmatrix} \alpha_1 + \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{vmatrix} \alpha_2 + \begin{vmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{vmatrix} \alpha_3 + \begin{vmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{vmatrix} \alpha_4 + \begin{vmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \end{vmatrix} \alpha_5$$

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{vmatrix} \beta_1 + \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{vmatrix} \beta_2$$

$$A + B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{vmatrix}$$

Por ello:

$$\text{Si } C \subset A$$

$$(A\,B) + (C) = (A\,B)$$

Vemos que el especio E viene dado por la suma de rayos coordenados.

El ortante positivo (I) en E_3 es la suma:

$$I = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \alpha_1 + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \alpha_2 + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \alpha_3$$

$$\alpha_1 \geq 0\,, \; i = 1, 2, 3$$

$$(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El espacio $E = (I)\ (-I) = (-I\,I)$ que simbolizamos por:

$$(\pm I)$$

El producto o intersección de (A) con (B) es el cono que contiene los puntos comunes a ambos.

Como ejemplo, podemos tomar los siguientes productos:

$$(A) \cap (\pm I) = (A)$$

$$(A) \cap (I) = (+ A)$$

$$(A) \cap (-I) = (-A)$$

$$(A) \cap (-A) = (0)$$

Llamamos cono polar positivo del (A) al cono $(A)^+$, cuyos puntos $b \in (A)^+$ cumplen para todo $a \in (A)^+$ que:

$$\text{producto escalar} = b \,.\, a \geq 0$$

El cono polar negativo $(A)^-$ y el cono ortogonal $(A)^\circ$ quedan definidos por:

$$a \in (A)$$
$$c \in (A)^-$$
$$c \, . \, a \leq 0$$
$$d \in (A)^\circ$$
$$d \, . \, a = 0$$

Consecuencia de las definiciones dadas, es que:

$$(A)^+ \cap (A)^- = (A)^\circ$$
$$(A)^+ + (A)^- = (\pm I)$$

Dado un rayo $\lambda \, P_o$, $\lambda > 0$, el cono polar $(\lambda \, P_o)^+$ es el $(y \, P_o \, {}^-y)$, siendo y un vector perpendicular a P_o. En consecuencia, $(\lambda \, P_o)^+$ define un semiespacio que contiene a P_o:

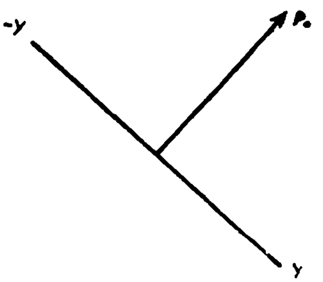

Fig. 4.

El semiespacio que no contiene a P_o viene dado por $(\lambda \, P_o)$.

Es fácil intuir una definición de cono como producto de semiespacios. En E_2, figura 5, el cono (A) es la intersección de (P^+_1) con (P^+_2):

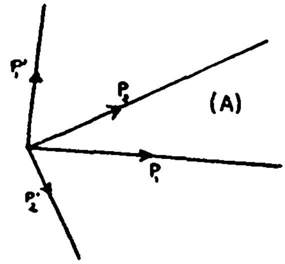

Fig. 5.

siendo P'_1 y P'_2 perpendiculares a P_1 y P_2, pertenecientes a (A).

En E_3 el cono resulta de la intersección de los semiespacios definidos por los planos que contienen a las caras. Si (A) viene definido por las rectas P_1, P_2, P_3, P_4, por ejemplo, sus seis caras superficiales definen planos y semiespacios cuya intersección forma el cono; si es p un vector perpendicular a la cara P_1, P_2, el plano $(p)^0$ contiene a dicha cara y define el semiespacio $(p)^+$ dentro del cual está (A).

Vemos que:

$$(A) = (\lambda_1 P'_1)^+ \cap (\lambda_2 P'_2)^+ \cap \ldots\ldots$$

siendo

$$P'_i \in (P_i)^0$$

PROPIEDADES DE LOS CONOS

Es muy reducido el conjunto de propiedades que vamos a estudiar en este párrafo, porque es pequeño el número de las necesarias para la inmediata aplicación al Análisis de Actividades.

Es evidente que si $A \supset B$ todo punto del cono polar $(A)^+$ pertenece a $(B)^+$ (puesto que si $A \in (A)^+$ ha de cumplir $a' a \geqq 0$ con *todos* los puntos $a \in (A)$, pero no se puede afirmar que cualquier punto $c \in (B)^+$ que cumpla $c' b \geqq 0$ cumple esta condición para el conjunto más extenso; en consecuencia:

$$(A)^+ \subset (B)^+$$

Por el mismo razonamiento se llega a:

$$(A)^- \subset (B)^-$$

De esta propiedad se deriva una de las más importantes:

$$(A + B)^+ = (A)^+ \cap (B)^+ \quad ; \quad (A + B)^- = (A)^- \cap (B)^-$$

La demostración la haremos para los polares positivos. Como:

$$A \subset (A + B) \quad ; \quad B \subset (A + B)$$

$$A^+ \supset (A + B)^+ \quad ; \quad B^+ \supset (A + B)^+$$

y, entonces:

$$A^+ \cap B^+ \supset (A + B)^+$$

Por otra parte, si $b \in (A + B)^+$, su producto escalar por cualquier punto de (A) o de (B) es mayor o igual que cero, luego pertenece a $(A)^+$ y $(B)^+$, como consecuencia, pertenece a $A^+ \cap B^+$, luego:

$$(A + B)^+ \supset A^+ \cap B^+$$

y:

$$(A + B)^+ = A^+ \cap B^+$$

De la relación anterior:

$$(A^+ + B^+)^+ = A^{++} \cap B^{++} = A \cap B$$

$$A^+ + B^+ = (A \cap B)^+$$

Para el polar negativo:

$$(A \cap B)^- = A^- + B^-$$

Cuando, para un cono (A), $D(A) \neq E_n$, todos los puntos de (A) son puntos frontera. Por esto es necesaria la definición de contorno relativo, que es el contorno de (A) dentro de su espacio dimensional. El resto de los puntos forman su interior relativo, $)A($.

Dados dos conos (A) y (B), se cumple que: $D(A + B) = (A) - (B)$, si y únicamente si $)A(\cap)B(\neq 0$.

Sean rayos del contorno de (A) los $(\lambda_1 a_1), \ldots, (\lambda_n a_n)$.

Sean $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$ escalares positivos para los que se cumple:

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) \in (B)$$

(que existen por la hipótesis de intersección de los interiores).

La diferencia entre el punto de origen de A y los anteriores pertenece a (A) — (B), es decir:

$$(\Sigma - \alpha_i a_i) \in (A) - (B)$$

Como (A) — (B) es un cono convexo, contiene a cualquier punto:

$$-\alpha_i a_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

y a

$$-a_i\,, \quad i = 1, \dots, n$$

En consecuencia:

$$D(A) \subset (A) - (B) \qquad (5)$$

Del mismo modo se puede demostrar que

$$D(B) \subset (A) - (B)$$

lo que nos lleva a

$$D(A) + D(B) = D(A + B) \subset (A) - (B)$$

Como, por otra parte,

$$(A) - (B) \subset D(A + B)$$

llegamos a

$$(A) - (B) = D(A + B)$$

Recíprocamente, cuando la diferencia es igual al espacio dimensional es obvio que se encuentren dos puntos de (A) y dos de (B), tales que:

$$a_1 - b_1 = b_2 - a_1$$
$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2$$

Conos locales

Llamamos cono local posible de (A) en el punto y, al cono $(L)_y$, que contiene todos los puntos l definidos por:

$$l = \lambda(a - y)\,; \quad a \in (A), \quad \lambda \geqq 0$$

---

(5) El espacio dimensional de un cono está formado por sus puntos, los puntos negativos de éstos y todos los que definen ambos. Es decir:

$$(\pm A) = D(A).$$

La consideración de que

$$l = \lambda |-y\,A| \begin{vmatrix} 1 \\ X \end{vmatrix} \; ; \; \lambda \geqq 0 \; ; \; x \geqq 0$$

nos permite representar el cono local $(L)_y$ por $(-y\,A)$.

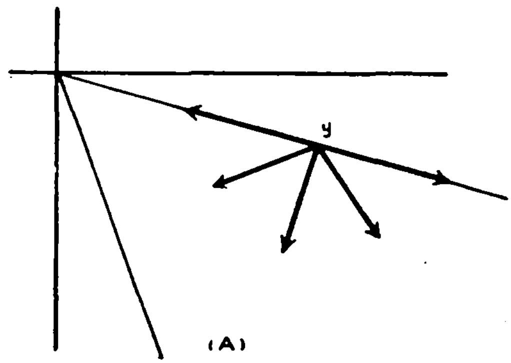

Fig. 6.

Es fácil ver que el cono local contiene todas las direcciones que parten de y pasando por todos los puntos del cono.

Si y pertenece al contorno relativo de (A), concretamente a la cara superficial (C), contiene a D(C). Tenemos:

$$(A) = (C\,A)$$

$$(L)_y = (-y\,A) = (-y\,C\,A)$$

$$(-y\,C) = E = (\pm\,C) = D\,(C)$$

$$(L)_y = (-y\,C\,A) = (-C\,C\,A) = (-C\,A)$$

lo que demuestra que el cono local es el mismo para todos los puntos de la cara superficial que contiene a y en su interior relativo.

Postulados de un modelo de producción, según Koopmans

Los cuatro postulados que establece Koopmans para un modelo de producción (6) limitan los conos de puntos posibles $y = A\,x$, a aquellos que los cumplen.

(6) Es decir, no pueden ser mayores que cero *todos* los componentes de y.

El primer postulado establece que no pueden darse actividades nulas como resultado de un proceso, salvo que las actividades básicas lo sean, o salvo el caso obvio de que lo sean los niveles de actividad. Es decir, no puede darse:

$$y = A\,x = 0 \; ; \; x \geqq 0$$

El segundo postulado afirma que no puede existir actividades en las que no entre, al menos, un medio de producción, lo que supone que no puede darse:

$$y = A\,x \geqq 0 \; ; \; x \geqq 0$$

El primer postulado limita los conos posible a aquellos que son punteados. En efecto, si:

$$y = A\,x = 0$$

como x puede descomponerse en

$$x = x_1 + x_2 \; ; \; x_1 \geqq 0 \; ; \; x_2 > 0$$

lo que supone

$$y = A\,x_1 + A\,x_2 = y_1 + y_2 = 0$$

y entonces

$$y_1 = -\,y_2$$

lo que implicaría que dentro del cono existieran, al menos, un vector y su vector negativo, lo que haría que el cono fuera lineal.

El postulado segundo afirma que ningún punto del ortante positivo pertenece al cono, lo que supone:

$$(A) \cap (I) = (0)$$

$$[(A) \cap (I)]^- = (0)^- = E = D\,(A)$$

$$(A)^- - (I) = D\,(A + I)$$

$$(A)^- \cap (I) \neq 0$$

Es condición necesaria, pues, que exista un vector positivo $p \geqq 0$ tal que $p' A \leqq 0$. Por esto, en lo sucesivo situaremos las figuras de conos posibles en el cuarto cuadrante.

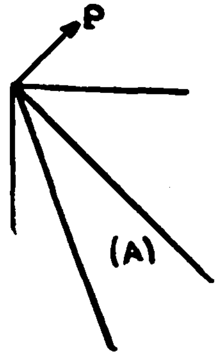

Fig. 7.

El postulado tercero afirma la existencia de los bienes finales, lo que supone que el vector y debe cumplir:

$$y = \begin{vmatrix} y_{fin} \\ y_{int} \\ y_{prin} \end{vmatrix} \quad ; \quad |y_{fin}| \geqq |0|$$

Como consecuencia, la proyección del cono dentro del espacio de los bienes finales es un cono dentro del ortante positivo.

El postulado cuarto afirma la existencia de los bienes intermedios, lo que supone que:

$$|y_{int}| = |0|$$

Puntos eficientes

Dentro de los conos posibles definidos por los anteriores postulados, el criterio de elección viene dado por el concepto de punto eficiente. Se dice que el punto y_0 es eficiente cuando no existe otro punto del cono que cumpla:

$$|y - y_0| \geqq |0|$$

o sea:

$$\begin{vmatrix} y_f \\ y_i \\ -y_p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y^0{}_f \\ y^0{}_i \\ -y^0{}_i \end{vmatrix} \geqq \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Esta condición puede enunciarse afirmando que el cono local posible $(L)_{y0}$ no tiene ningún punto de contacto con el ortante positivo (I):

$$(L)_{y0} \cap (I) = 0$$

de donde se deduce que:

$$(L)^{-}_{y0} \cap (I) \neq 0$$

lo que implica la existencia de $p \geqq 0$, tal que:

$$p' \,|-y\ A\,| \leqq 0$$

lo que supone:

$$p'\,y = 0\ ; \quad p'\,A \leqq 0\,. \qquad (7)$$

El vector p se denomina vector de precios porque la relación de sus cosenos directores nos da las relaciones de transformación de los bienes finales del proceso.

Supongamos una transformación con un solo medio y dos bienes finales, dada por dos actividades básicas:

$$y = \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ -c_1 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ -c_2 \end{vmatrix} x_2$$

la proyección sobre E_2 módulo de la coordenada de bienes primarios, contendrá la proyección de p perpendicular al segmento

(7) $p'\,|-y\ A| = p'\,|-y\,a_1\,a_2\,\dots a_k|$ simbolizando por a_i las columnas de A; $|-p'\,y\ \ p'\,a_1\,\dots\,p'\,a_k| \leqq |0\ 0\ \dots\ 0|$, como $p'\,y = p'\,a_{k}x_{k} + \dots + p'\,a_{1}x_{1}$, deben ser:

$$p'\,y = 0$$

$$p'\,A \leqq 0$$

$A_1 A_2$, que es la proyección de un segmento de la cara que contiene al vector y, a la que es perpendicular p. En la figura vemos:

$$R\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{|\text{tang } \alpha|} = \text{cotang. } p$$

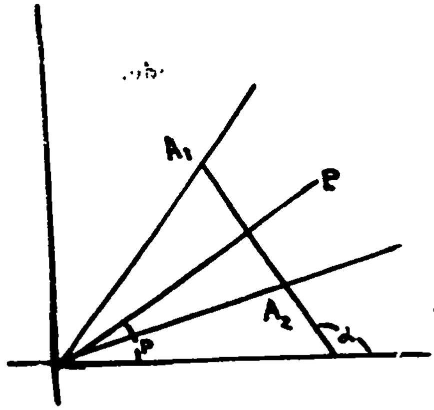

Fig. 8.

Como el cono local de y es el mismo para todos los puntos del interior relativo de la cara (C) que lo contiene, podemos hablar de caras eficientes, que cumplen:

$$(C) \subset (A)$$

$$p > 0 \; ; \quad p' C = 0 \; ; \quad p' A \leqq 0$$

Dentro de las caras eficientes se encuentran los *vectores extremos* (en el sentido dado al comienzo de estos artículos). Veamos cómo las inecuaciones que limitan los bienes primarios relacionan el extremo de un escalar con éstos y nos permiten pensar en una solución única, cuando el grupo de condiciones es suficiente.

Si los bienes primarios están limitados por:

$$y_p \geqq - y_p < 0$$

imponemos una condición al cono de puntos posibles que lo transforma en un *cono truncado* que contiene sólo *puntos accesibles.* Para estos puntos se define la eficiencia de y afirmando que:

$$y_f - z_f \geqq 0$$

cumpliéndose siempre que:

$$- y_p \geqq - y_p$$

Esta definición nos lleva a la de *cono local accesible* y a las condiciones de optimización del vector accesible por caminos formalmente análogos a los empleados y que no creemos necesario desarrollar, puesto que nuestro propósito se limita a la introducción al método estudiado.

Si el vector y es tal que

$$l = c' y_f$$

$$c' > 0$$

$$y_p \geqq - y_p$$

tenemos:

$$c' (z_f - y_f) \leqq 0$$

para todo z del cono accesible, lo que supone:

$$z_f - y_f \leqq 0$$

Recíprocamente, si es y eficiente:

$$p'_f (z_f - y_f) \leqq 0$$

$$p'_p (z_p - y_p) \leqq 0$$

siendo

$$p = \begin{vmatrix} p_f \\ p_p \end{vmatrix} \geqq 0$$

luego es condición necesaria y suficiente para que un punto accesible sea eficiente que exista un vector positivo c tal, que la función lineal:

$$c' y_f$$

alcance un valor máximo, dentro de los límites impuestos por las condiciones.

F. J. ALCOCER CHILLON