

Los resortes del crecimiento económico: La aritmética simple del desglose de la función agregada de producción (*)

FRANCISCO DOMINGUEZ DEL BRIO, Dr., I. T. P., M. A.

Profesor agregado de Análisis Económico, en el
I. E. S. E. (Universidad de Navarra en Barcelona).
Profesor agregado (interino) de Teoría de la Hacienda
Pública, en la Facultad de Ciencias Económicas y Em-
presariales de la Universidad Central de Barcelona.

SUMARIO:

1. Los resortes del crecimiento económico.—2. El desglose del crecimiento económico: Una descripción particular.—3. Del “Residuo” al cambio tecnológico.—4. Las fuentes del “Residuo”.—5. Otras dimensiones del cambio tecnológico.—6. El desglose de la función agregada de producción.—7. Rendimientos crecientes a escala.—8. Limitaciones del método propuesto.

1. LOS RESORTES DEL CRECIMIENTO ECONOMICO

El significado e implicaciones del rápido crecimiento económico son, en ciertos aspectos, evidentes. A título ilustrativo, traslademos nuestra imaginación ciento cincuenta años atrás: los países económicamente avanzados de Europa y Norteamérica producían tal vez dos o tres veces más producto agregado que las regiones menos “desarrolladas” de Asia, Africa e Iberoamérica, sobre la base de la renta “per capita”. Actualmente, nos percatamos de que el desfase es de, por lo menos, diez, quince o veinte veces.

(*) Durante el bienio 1966-1967 realicé en la Universidad de Stanford (U.S.A.) una investigación sobre la génesis del crecimiento económico, bajo los auspicios de la Fundación Juan March y de la propia Universidad mencionada. Más tarde, he redactado un ensayo con propósitos principalmente divulgadores a partir de aquella obra editada, en principio, de manera restringida. Ese ensayo-síntesis espero aparezca publicado en forma de libro en un futuro muy próximo con el título de “Estrategia del crecimiento y desarrollo económicos”.

El presente trabajo corresponde a la adaptación, como artículo, de una de las distintas partes del ensayo de referencia que espero publicar pronto en castellano.

En el mundo moderno podemos ver áreas en que una vasta sociedad productiva urbana, industrial o tecnológicamente orientada, ha plantado raíces. Como contraste a remarcar, en otras todavía perduran los primitivos modos de una sociedad rural. La "sociedad opulenta" ha surgido en el "Oeste" como consecuencia del desarrollo moderno, provocando una enorme y creciente fosa entre los niveles de vida de las personas de diferentes partes del mundo. Claramente, la indagación acerca de las fuentes de crecimiento en general, y en particular para algunos países, es de capital importancia y está reclamando un progresivo interés. En términos generales, cuando comparamos la historia del crecimiento y del desarrollo económicos de los diferentes países, podemos inferir pautas que en último término fueron el producto de un número de circunstancias históricas, culturales, o de otra clase, peculiares de los distintos países. En particular, subrayando estas especiales circunstancias, los economistas han descubierto, han abstraído, ciertas fuerzas que son vitales para el proceso de crecimiento. Estas fuerzas subyacentes tienen que ver con el tamaño, la organización y el "carácter" del aparato productivo básico del país. El crecimiento económico puede ser contemplado como el proceso de expansión o de mejora de los elementos productivos básicos de la sociedad. La producción de una sociedad puede crecer debido a un incremento en su oferta de factores de producción o por causa de sensibles mejoras en la organización o en la tecnología de producción. El fenómeno del desarrollo moderno se caracteriza por aquellos cambios, que ocurren lo bastante rápidamente como para que den lugar a un sensible y persistente incremento de la producción "per capita" (1).

En una primera aproximación al problema, es común detenerse en una lista de ciertos elementos principales que afectarán las ofertas de los dis-

(1) El lector interesado en la problemática del crecimiento económico, puede utilizar como guía el exhaustivo estudio de F. H. HAHN y R. C. O. MATTHEWS, "The Theory of Economic Growth: A Survey", publicado en *Surveys of Economic Theory*, volumen II, editado conjuntamente por la American Economic Association y la Royal Economic Society, St. Martin's Press, Nueva York, 1967. En el recorrido general sobre la materia que proporciona dicha guía, se encuentra una gran abundancia de fuentes bibliográficas.

En un plano más descriptivo y empírico debe destacarse la obra de SIMON KUZNETS, *Six lectures on Economic Growth*, Glencoe, Nueva York, 1959, así como la de BARRY E. SUPPLE (editor), *The Experience of Economic Growth*, Random House, Nueva York, 1963. Estas obras se encuentran en la base que inspira el presente artículo. Asimismo, el lector interesado puede consultar RICHARD T. GILL, *Economic Development: Past and Present*, Foundations of Economic Series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Hersey, 1965 (cuarta edición), sobre todo para las primeras secciones de este trabajo.

tintos factores de producción, o que probablemente afectarán su modo de utilización. Esta lista puede incluir (2):

1. Crecimiento de la población.
2. Riqueza en recursos naturales.
3. Acumulación de capital.
4. Incrementos en la escala o especialización de la producción.
5. Progreso técnico.

Crecimiento de la población. Una población en ascenso provoca dos consecuencias. Significa más mano de obra. Significa también más bocas a alimentar. Las consecuencias de este elemento para el desarrollo económico dependerán de la pauta de crecimiento de la población, de la expansión potencial de los mercados que pueda originar y de la presión que pueda crear en relación con los recursos naturales escasos y las reservas de capitales.

Recursos naturales. Estos han de entrelazarse en relación con el grado de progreso tecnológico. Algunas veces no es fácil estimar los recursos potenciales de un país. Pueden descubrirse más recursos. Pueden ser adquiridos a través de negociaciones comerciales. Pueden también “consumirse”, “agotarse”.

Acumulación de capital. Este elemento posibilita la introducción de procesos especializados en la producción, al propio tiempo que facilita instrumentos para ser usados por una creciente población y proporciona la introducción de nuevas tecnologías. Por supuesto, la acumulación de capital (formación de capital) no está exenta de costes. De hecho representa siempre una cantidad de producción que la sociedad pudo haber consumido “hoy”, pero que ha sido invertida ante las perspectivas de producción más altas (y consumo) “mañana”.

Incrementos en la escala o especialización de la producción. División del trabajo. La aparición de unidades de producción de gran escala, con especialización creciente y división del trabajo, puede permitir a la sociedad producir con más rendimiento a partir de sus factores dados de producción. Por otra parte, como Adam Smith proclamó claramente, la introducción de semejantes métodos está afectada por la “extensión del mercado”.

(2) Véase RICHARD T. GILL, *op. cit.*, págs. 3-21.

Progreso tecnológico. Los cambios básicos en las técnicas de producción, las innovaciones, los productos nuevos, hacen su aparición gracias al progreso técnico. Este es un elemento muy importante para el desarrollo económico como veremos más adelante. El progreso técnico toma cuerpo, en términos prácticos, a través de lo que Schumpeter denominó “innovaciones”. El progreso técnico se basa en último término en la ciencia. En el mundo capitalista la iniciativa para la introducción de aquellas innovaciones descansa, fundamentalmente, en los hombres que son empresarios dentro de la sociedad.

2. EL DESGLOSE DEL CRECIMIENTO ECONOMICO: UNA DESCRIPCION PARTICULAR

De hecho, el estudio explícito de cada uno de los anteriores elementos merece volúmenes enteros y sobre cada tema hay disponible una profusa bibliografía. La elaboración estadística de medidas que reflejen la “medida” de cada uno de estos elementos es muy importante para cualquier estudio de crecimiento económico. Algunas cuestiones pertinentes surgen ya desde el principio, según el célebre especialista en cuestiones del crecimiento económico profesor Abraham Abramovitz (3):

1. ¿A cuánto asciende el incremento neto del producto agregado “per capita (si es que lo hubo)?
2. ¿Hasta qué punto puede el comportamiento de las series cronológicas de producto agregado ser explicado como resultado de una mayor disponibilidad de mano de obra y capital, por una parte, y de un aumento de la productividad, por otra (cambio tecnológico)?
3. ¿Cuál es la tendencia en el comportamiento de la tasa de cambio del producto real “per capita”? ¿Hay alguna evidencia de aceleración, retraso o estancamiento?
4. ¿Cómo se ha comportado la trayectoria del crecimiento del producto? ¿Hubo fluctuaciones —a largo plazo— al margen de las fluctuaciones del ciclo económico corto? En caso afirmativo, ¿cuál es el significado de las oscilaciones a largo plazo?

(3) Véase MOSES ABRAMOVITZ, “Economics of Growth”, en *A Survey of Contemporary Economics*, volumen II, editado por B. F. HALEY, Irwin Homewood, Illinois, 1952.

De todas estas preguntas es interesante conocer la respuesta, para poder diagnosticar sobre el crecimiento de cualquier economía. En este trabajo nos vamos a ocupar, principalmente de las preguntas 1 y 2. La pregunta 2 es la que podemos denominar "desglose del crecimiento", esto es, dados los diversos factores que parecen intervenir en el proceso de crecimiento económico, tratar de ordenar en importancia, retrospectivamente, la imputación causal que puede atribuirse a cada uno de ellos y estar así en mejor posición para elegir nuestras estrategias económicas del futuro. Ese es el principio de toda política económica responsable de crecimiento y desarrollo.

En este sentido, resulta muy interesante señalar aquí cuáles han sido los principales descubrimientos que el profesor Abramovitz descubrió para la economía de los Estados Unidos (4). Primero, averiguó que en el caso de la economía de los Estados Unidos, el producto nacional neto "per capita" a precios constantes se multiplicó por cuatro aproximadamente, mientras que la población se multiplicó por algo más de tres, entre los decenios 1868-78 y 1944-53. En segundo lugar, halló que el gran incremento en el producto neto por persona no podía ser principalmente justificado por un incremento en la disponibilidad de horas trabajo "per capita", ni tan siquiera debido a un aumento de capital por persona (tal como estos factores productivos son normalmente definidos y medidos). La fuente de crecimiento debe buscarse, principalmente, "en el complejo de *fuerzas poco conocidas* que provocan que la productividad, esto es, el producto por unidad de recursos utilizados, aumente". El profesor Abramovitz utilizó los datos de las famosas series temporales de Kuznets y los criterios de este autor para medir el incremento (comparando el producto medio y los correspondientes datos de mano de obra, capital, etc., para los decenios 1868-1878 y los del decenio 1944-53). Empleó como principal exponente de crecimiento el producto nacional neto "per capita", expresado a precios constantes del año 1929, y la circunstancia de comparar aquellos decenios permite suponer que se eliminan la mayor parte de los efectos del ciclo económico corto, que podrían, de otro modo, producir distorsiones al valorar la tasa de crecimiento.

El resurgimiento de atención prestada al cambio tecnológico, puede atribuirse a los interesantes resultados que presentó el profesor Abramo-

(4) Véase MOSES ABRAMOVITZ, "Resource and Output Trends in the United States since 1870", en *American Economic Review*, Papers and Proceedings, vol. 46, mayo 1956. Así también, del mismo autor, "Economic Growth in the United States", en *American Economic Review*, vol. 52, septiembre 1962.

vitz en un celebrado artículo del año 1956 (5). Como hemos apuntado, descubrió que casi todo el incremento del producto neto "per capita", estaba asociado al aumento de algo diferente de los aumentos constatados en las reservas de capital físico y de horas trabajo. (Este *algo* diferente ha sido posteriormente denominado el "residuo".) El profesor Abramovitz profirió entonces el siguiente desafío: "Este resultado es sorprendente por la desproporcionada importancia que parece otorgar al "residuo" y debería ser, en cierto sentido, un motivo de preocupación, ya que no de desaliento, para los estudiosos del crecimiento económico. Puesto que no conocemos gran cosa acerca de las causas del "residuo", la importancia predominante de este factor debería ser considerada como una especie de medida de nuestra ignorancia sobre la etiología del crecimiento económico en los Estados Unidos y como una clase de indicio revelador que señala dónde hace falta concentrar nuestra atención".

3. DEL "RESIDUO" AL CAMBIO TECNOLÓGICO

Así llegamos a la creciente convicción que caracteriza al pensamiento económico contemporáneo, referente a la gran importancia e implicaciones del progreso tecnológico. Admitamos en estas líneas que ya Karl Marx imaginó el papel crucial que el progreso tecnológico desempeñaría en la determinación de los movimientos de la producción y en la distribución de la renta. Cada día que pasa aparecen más evidencias y la experiencia va confirmando que la aportación al crecimiento económico de tecnologías variables contribuye, al menos, tanto como los tradicionales factores de mano de obra y capital (y recursos). Incluso, en algunos casos, esa experiencia sugiere que se le debe conceder aún más importancia.

La aparición de los trabajos de Abramovitz fue seguida por una serie de colaboraciones sobre el mismo punto. Fundamentalmente podemos mencionar: "Cambio tecnológico y la función de producción agregada", de Solow (6); "Tendencias de la productividad en los Estados Unidos", de Kendrick (7); "Formación de Capital y Cambio Tecnológico en la Industria Manufacturera de los Estados Unidos", de Massell (8); "Una medida

(5) Véase MOSES ABRAMOVITZ, "Resource and Output Trends...", *op. cit.*

(6) ROBERT M. SOLOW, "Technical Change and the Aggregate Production Function", en *Review of Economics and Statistics*, vol. 39, agosto 1957.

(7) J. W. KENDRICK. *Productivity Trends in the United States*, National Bureau of Economic Research, Princeton University Press, 1961.

(8) Véase la *Review of Economics and Statistics*, vol. 42, mayo 1960, páginas 182-188.

del cambio tecnológico y de los rendimientos a escala”, de Brown y Popkin (9). Todos estos estudios emplearon una diversidad de enfoques, utilizaron conjuntos de datos distintos y abarcaron diferentes períodos de tiempo. Por supuesto, no son perfectos ni carentes de defectos y críticas. Sin embargo, en todos, los resultados principales coincidieron, y de ahí que sea difícil calificarlos como un resultado esporádico, como mera coincidencia empírica.

En efecto, no es muy difícil hallar motivos del porqué el fenómeno del progreso técnico tiene hoy en día semejante lugar primordial, dentro de las áreas de investigación sobre economías capitalistas modernas. El convencimiento predominante de que para los graves problemas cíclicos podemos encontrar una solución (al menos a nivel teórico) ha dejado lugar, nuevamente, a nuestra preocupación y atención, por las directrices que pueden optimizar los rendimientos de los recursos limitados disponibles. Desde luego, la vigente tecnología fija las condiciones para el óptimo empleo de los recursos dados y, como resultado, un cambio en la tecnología altera el óptimo empleo de los recursos. Por añadidura, el interés en el cambio tecnológico puede deducirse del hecho de que ciertas economías industriales parecen estar expuestas a lo que se denomina “desempleo estructural”. Este fenómeno suele estar íntimamente conectado con los cambios técnicos, aunque siga siendo uno de aquellos temas difíciles, menos comprendido, y arduo de medición en cualquier economía contemporánea.

4. LAS FUENTES DEL “RESIDUO”.

Cuando se habla de los progresos y cambios técnicos, una cuestión primaria sería la de tratar de determinar cuáles son sus componentes. Para fijar nuestra atención, digamos que incluyen ventajas en la productividad de: a) educación a todos los niveles y desarrollo de la formación profesional; b) mejora de la sanidad; c) aparición de nuevos diseños e innovaciones de productos debidos a la investigación constante; d) economías de escala; e) mejoras en la organización (referentes, por ejemplo, a la eliminación de restricciones sobre la movilidad y eficiencia económica de los recursos); f) mejoras en la eficiencia de dirección de unidades socio-económicas. Todas estas causas vienen a justificar el crecimiento en producción que no puede explicarse, exclusivamente, por la contribución de los “inputs” cuantitati-

(9) Véase la *Review of Economics and Statistics*, vol. 44, noviembre 1962, páginas 402-411.

vos del factor trabajo (medios por un recuento agregado e indiscriminado de horas-hombre) y/o contribuciones del capital (medido según ya explicaremos más adelante). Por consiguiente, vemos que hemos de enfrentarnos a dos problemas:

- a) Obtener el "Residuo" en términos cuantitativos.
- b) Desglosar el "Residuo".

El primero significa una descomposición a nivel "macro". El segundo es un problema de ulterior desglose, cauntificando cada uno de los componentes, de manera que su suma represente el total del "Residuo" que, a su vez, colabora con la mano de obra y el capital (incluidos los recursos naturales en la justificación del nivel y movimientos del Producto Agregado). Este es precisamente el camino seguido por el profesor Edward F. Denison en su conocido libro "Las fuentes del Crecimiento Económico en los Estados Unidos y las alternativas ante nosotros" (10). Esclarece allí el profesor Denison los componentes del "Residuo" e intenta cuantificar sus efectos comparativos sobre el crecimiento económico. El problema es de una gran dificultad. Hemos de admitir, sinceramente, que los métodos especiales para cuantificar los componentes del progreso tecnológico están aún en su infancia, si pensamos en resultados absolutamente concluyentes. Pero, no obstante, hay que conceder que todos los esfuerzos orientados a realizar cualquier clase de aportación a nivel teórico, lo mismo que a nivel concreto de economías particulares, merecen comprensión, aliento y aplauso. Más adelante nos ocuparemos de la aritmética subyacente en el trabajo de Denison con más extensión, siguiendo la pauta que el profesor Abramovitz marcó al revisar el libro de Denison.

5. OTRAS DIMENSIONES DEL CAMBIO TECNOLÓGICO.

Por otra parte, los cambios técnicos implican otro conjunto de dimensiones, susceptibles de medición. El cambio técnico se considera dividido en dos clases: cambio técnico neutral y cambio no neutral, dependiendo de los efectos que produce en los consumos de mano de obra y capital. (Estos efectos se contemplan de manera diferente según distintos criterios, entre los cuales los más populares son: en el sentido del profesor Hicks

(10) EDWARD F. DENISON: *The Sources of Economic Growth in the United States and the Alternatives before Us*, Committee for Economic Development, Nueva York, 1962.

y en el sentido del profesor Harrod). El cambio tecnológico neutro afecta la utilización de los factores trabajo y capital de la misma forma, mientras que el cambio tecnológico no neutro produce “efectos desviación” sobre algunos de los factores de la producción que inciden sobre la intensidad relativa de su uso.

De acuerdo con esta “desviación”, el cambio técnico no neutral se divide, a su vez, en dos subclases: cambio técnico que ahorra mano de obra, y cambio técnico que utiliza más mano de obra (correspondientemente, cambios técnicos no neutrales que emplean capital y que economizan capital). Estos subcomponentes del progreso técnico se analizan en función de varias características (complementarias de aquellas que mencionamos anteriormente):

1. El carácter de los rendimientos a escala, asociados a la tecnología vigente.
2. El grado en que la tecnología es capital-intensiva o mano de obra-intensiva.
3. El grado de facilidad con que la tecnología permite que el capital sea sustituido por mano de obra, y viceversa.
4. La “eficiencia”, según diferentes puntos de vista.

Todas estas características, con sus correspondientes “medidas” asociadas, constituyen un arsenal básico de instrumentos para usarlos en la *explicación* del crecimiento del Producto Nacional agregado, así como de los movimientos en la distribución de la renta (a nivel funcional y personal).

Antes de Marx, las teorías de la mayoría de los economistas se concentraron exclusivamente en el lado de la oferta del proceso de crecimiento, sin ponderar en toda su importancia los efectos del cambio tecnológico y el avance de los conocimientos científicos. Consideraron el crecimiento de la población como el gran mal que causaba un firme declive en la renta “per capita” y conducía, en último término, a la situación de estancamiento donde no tenía cabida ningún progreso económico. Las perspectivas eran tan sombrías que el escritor Thomas Carlyle denominó a la Economía, satíricamente, la “ciencia lúgubre”. Afortunadamente, la Ciencia Económica ha recorrido mucho trecho desde entonces.

6. EL DESGLOSE DE LA FUNCIÓN AGREGADA DE PRODUCCIÓN (11).

Antes de introducir los índices más empleados para explicar una cierta tasa de crecimiento, así como proceder al análisis de una metodología de investigación para el estudio en general de la etiología del crecimiento, se confrontan dos problemas teóricos previos.

a) ¿Qué forma puede darse a la función agregada de producción?

b) ¿Cómo podemos desglosar la función agregada de producción, de manera que las tasas de crecimiento puedan explicarse a través de expresiones lineales en las principales variables que intervienen en dicha función agregada?

Supongamos que conocemos la característica funcional de la función agregada de producción, es decir, que tenemos resuelto el problema a), y pasamos a ofrecer un marco teórico que nos resuelva el problema b). Para ello representamos el producto agregado de una economía por Q . Esto es, $Q = \text{PNB}$, donde PNB es el Producto Nacional Bruto. (La forma más empleada para la función agregada, en los estudios tanto teóricos como empírico-estadísticos, es la forma potencial conocida bajo el nombre de función de Cobb Douglas, en honor a su introductor.)

Asimismo representaremos la función de producción agregada de la economía, en general, como:

$$Q = F(X_1, X_2, \dots, X_m)$$

donde X_i ($i = 1, \dots, m$) son "inputs" (factores productivos) y la característica funcional F representa una explicación exhaustiva del producto agregado real en función de las m variables. Ya se ve que estamos ante un problema de estimación de la forma funcional F y de medición de cada una de las variables X_i . Suponemos, a este nivel teórico, que dicho problema se ha resuelto. Además, F es una función que "se comporta bien",

(11) En lo que sigue, desde este apartado hasta el final, se intenta exponer de una manera clara la aritmética que podría subyacer los trabajos empíricos sobre el desglose de los componentes del "residuo" y de la función agregada de producción. Su contenido explica, en concreto, la aritmética que está detrás del trabajo más importante sobre el tema, que sigo considerando es el del profesor Denison (*op. cit.*, véase nota a pie de página anterior) y fue presentado y discutido ampliamente en un seminario de trabajo dirigido por el profesor EMILE DESPRES, en el Departamento de Economic Growth and Development, de la Universidad de Stanford.

es decir, que goza de todas las propiedades de la función "neoclásica". (Continua y homogénea de grado uno con primeras y segundas derivadas continuas.)

Por otra parte, todas las variables incluidas en $F(X_1, X_2, \dots, X_m)$ presentan una trayectoria de cambio en el tiempo t . Supongamos, además, que la característica funcional es suficientemente estable en el intervalo temporal objeto de estudio. Tendremos entonces:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial F}{\partial X_1} \frac{dX_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial X_2} \frac{dX_2}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial X_m} \frac{dX_m}{dt}$$

o si preferimos

$$\dot{Q} = \frac{\partial F}{\partial X_1} \dot{X}_1 + \frac{\partial F}{\partial X_2} \dot{X}_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial X_m} \dot{X}_m$$

donde

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$$

y

$$\dot{X}_i = \frac{dX_i}{dt} \quad (\text{para } i = 1 \dots m)$$

Si dividimos en $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$ por $Q = F(X_1, \dots, X_m)$

(lo cual persigue una transformación en términos de porcentaje), obtenemos:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial X_1} \dot{X}_1 + \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial X_2} \dot{X}_2 + \dots + \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial X_m} \dot{X}_m$$

O bien, equivalentemente, dividiendo y multiplicando cada término del lado derecho de la expresión anterior por el X_i (para $i = 1 \dots m$) correspondiente a la variable que aparece en cada término.

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{X_1}{F} \frac{\partial F}{\partial X_1} \frac{\dot{X}_1}{X_1} + \frac{X_2}{F} \frac{\partial F}{\partial X_2} \frac{\dot{X}_2}{X_2} + \dots + \frac{X_m}{F} \frac{\partial F}{\partial X_m} \frac{\dot{X}_m}{X_m}$$

Definamos ahora la elasticidad de Q con respecto a todo input X_i como:

$$E_{X_i}^Q = \lim_{\Delta X_i \rightarrow 0} \frac{\frac{(Q + \Delta Q) - Q}{Q}}{\frac{(X_i + \Delta X_i) - X_i}{X_i}}$$

con $X_j = \text{constante para todo } j \neq i$

$$= \lim_{\Delta X_i \rightarrow 0} \left. \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta X_i}{X_i}} \right\} X_j = \text{constante para todo } j \neq i$$

$$= \frac{X_i}{Q} \lim_{\Delta X_i \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta X_i} \left. \right\} X_j = \text{constante para todo } j \neq i$$

$$= \frac{X_i}{Q} \frac{\partial Q}{\partial X_i} = \frac{X_i}{F} \frac{\partial F}{\partial X_i} = \mu_i$$

Por lo tanto, la anterior expresión $\frac{\dot{Q}}{Q}$ se transforma en:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \mu_1 \frac{\dot{X}_1}{X_1} + \mu_2 \frac{\dot{X}_2}{X_2} + \dots + \mu_m \frac{\dot{X}_m}{X_m} = \sum_1^m \mu_i \frac{\dot{X}_i}{X_i}$$

donde las μ_i son las *elasticidades* correspondientes.

La expresión conseguida explica el porcentaje de crecimiento en el producto total, como una suma de porcentajes o tasas de crecimiento de cada "input" (factor), multiplicados por sus respectivas elasticidades, en el sentido en que fueron éstas anteriormente definidas.

Puesto que F está sujeta a rendimientos constantes a escala, por hipótesis, podemos aplicar el teorema de Euler, y como consecuencia se deduce, inmediatamente, que

$$\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$$

7. RENDIMIENTOS CRECIENTES A ESCALA.

Otra alternativa sería suponer, por ejemplo, la existencia de rendimientos crecientes a escala, en promedio para toda la economía, esto es, que F es una función de producción homogénea de grado h ($h > 1$). En este caso, si suponemos que las elasticidades se descomponen de la siguiente manera:

$$\mu'_i = \frac{\mu_i}{h}$$

entonces podemos escribir para μ'_i :

$$\sum_i \mu'_i = 1$$

Mientras que el desglose correspondiente será ahora:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \sum_i \mu'_i \frac{\dot{X}_i}{X_i} + \sum_i (\mu_i - \mu'_i) \frac{\dot{X}_i}{X_i}$$

En esta última expresión, y dado que $\sum_i \mu'_i = 1$, se dice que el término

$$\sum_i (\mu_i - \mu'_i) \times \frac{\dot{X}_i}{X_i}$$

refleja el cambio en producto agregado que se debe a un cambio de "escala".

Estamos, pues, ante un desglose que facilita la estimación de la tasa de crecimiento del producto agregado, dadas las estimaciones de las elasticidades y de las diversas tasas de crecimiento de los "inputs" (factores).

En el caso en que $\sum_i^m \mu_i = 1$ el problema es más manejable, puesto que cuando los rendimientos son crecientes a escala, aun aceptando la descomposición de las elasticidades en la forma que se ha descrito, sin embargo, es difícil obtener buenas estimaciones para los "factores de escala". De aquí que la mayoría de los estudios empíricos manejen la hipótesis de los rendimientos constantes a escala. El desglose de la función de producción agregada que hemos descrito facilita la ponderación, en primera aproximación, de la importancia de diferentes factores productivos para explicar una tasa de crecimiento.

Siempre que un término $\frac{\dot{X}_i}{X_i} = 0$, o bien el límite $\frac{\dot{X}_i}{X_i} \rightarrow 0$, la tasa de cambio en el producto total no será explicada, significativamente, por el porcentaje de la tasa de cambio del íesimo "input".

Por otra parte, cuando la elasticidad sea muy pequeña, los correspondientes "inputs" no pueden tener una sensible importancia en la explicación del crecimiento del producto.

8. LIMITACIONES DEL METODO PROPUESTO

Evidentemente, el método propuesto está sujeto a limitaciones, de entre las cuales debemos destacar:

1. Las elasticidades pueden no permanecer constantes a lo largo del tiempo. Este es un efecto posible del cambio tecnológico.)
2. Un cambio en X_i puede afectar μ_i a través del efecto de la elasticidad cruzada.
3. La característica funcional F puede también cambiar en el tiempo, como resultado del cambio tecnológico.

La tercera limitación es especialmente importante. Intentaremos tomarla en cuenta en el modelo haciendo $Q = F(X_1, X_2, \dots, t)$, lo cual significará

añadir un término más en nuestras expresiones, concretamente el término $\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial t}$. Como es obvio, el problema real consiste en especificar la forma concreta en que t influye en la función de producto agregado.

Cuando:

$$Q = F(X_1, \dots, X_m, t) = A(t) f(X_1, \dots, X_m)$$

diremos que la función de producción agregada refleja *el cambio tecnológico desincorporado*. En este caso la relación correspondiente $\frac{\dot{Q}}{Q}$ ahora se obtiene como sigue:

$$\dot{Q} = A'(t) \cdot f + A(t) \sum_i^m \frac{\partial f}{\partial X_i} \dot{X}_i$$

donde

$$A'(t) = \frac{dA(t)}{dt}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{A'(t)}{A(t)} + \sum_i^m \frac{f}{X_i} \frac{\dot{X}_i}{f}$$

o bien,

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{A'(t)}{A(t)} + \sum_i^m \frac{X_i}{f} \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\dot{X}_i}{X_i} = \frac{A'(t)}{A(t)} \sum_i^m \mu_i \frac{\dot{X}_i}{X_i}$$

La nueva formulación para $\frac{\dot{Q}}{Q}$ es un resultado más general que el obtenido previamente, puesto que introduce explícitamente el cambio tecnológico. Es importante advertir que las correspondientes elasticidades μ_i son, en este caso, independientes del cambio técnico, ya que

$$\mu_i = \frac{X_i}{F} \frac{\partial F}{\partial X_i} = \frac{X_i}{A(t)f} A(t) \frac{\partial f}{\partial X_i} = \frac{X_i}{f} \frac{\partial f}{\partial X_i}$$

