LA LÓGICA BORROSA PARA VALORAR LA INCERTIDUMBRE EN LA TÉCNICA DE VALORACIÓN CON OPCIONES REALES

Dra. María Antonia García Sastre
Sra. Micaela Rosselló Miralles

ABSTRACT
Recientemente se han llevado a cabo muchos estudios sobre la valoración de la cartera de inversiones utilizando técnicas de valoración de opciones reales para, así, poder fijar un precio al riesgo-oportunidad-flexibilidad de esta cartera. Estos métodos se fundamentan en procesos estocásticos. Sin embargo, muchos proyectos cuentan con una incertidumbre que no puede ser probabilizada y que, por tanto, no puede ser considerada como un riesgo. Por lo que las técnicas estándares de valoración de opciones reales no recogen a esta incertidumbre. En este articulo se propone el modelo binomial borroso para recoger esta situación, así como una medida para determinar el error que se comete cuando se utilizan las técnicas estándares y, por tanto, no se recoge a la incertidumbre.

1. INTRODUCCIÓN

Hoy día los cambios parecen ser la mayor característica de la nueva era de negocios (Lin y Chen, 2004), por lo que los *managers* deben de ejecutar una pro-active management. La incertidumbre es un factor habitual en las mayores inversiones de capital (Fichman, Keil y Tiwana, 2005). De hecho, este argumento puede ser elevado a la mayoría de inversiones de hoy día. Así, el proceso de planificación e implementación de grandes inversiones con una vida económica larga tiene que convertirse en un proceso activo de constante renovación y actualización de información relevante que el simple "planificar, decidir y olvidar" (Collan y Liu, 2003). Es decir, "los *managers* puede que actualmente tengan mayores dificultades en la temporalización de la toma de decisiones que anteriormente. Parece que hoy día hay más decisiones que tomar y son más complejas y costosas. Estas decisiones se tienen que tomar en un entorno incierto (Janney y Dess, 2004).

Ante esta situación, los métodos clásicos de valoración de inversiones, que están basados en el supuesto de gestión pasiva, se han quedado obsoletos dado que no introducen la flexibilidad en la valoración. De hecho los tres principales límites de estos métodos de valoración son: a) la determinación de la tasa de descuento adecuada al proyecto para que tenga presente la prima de riesgo más adecuada al nivel de incertidumbre del proyecto; b) ignoran la posibilidad de flexibilidad de modificar decisiones cuando se adquiere más información; c) son métodos pasivos ya que si el NPV resulta positivo se considera que debe de llevarse a cabo la decisión de invertir, sin tener en cuenta que posponer el proyecto puede generar mayores resultados, es decir no se tiene una visión dinámica de la inversión (Herath, Jahera y Park, 2001).

Por lo que se tiene que buscar un técnica de valoración de inversiones que contrarreste estos efectos negativos de los modelos neoclásicos mediante la introducción de la flexibilidad. En el momento en que se introduce la flexibilidad de la gestión para reaccionar ante cambios en el subyacente se reconoce que la distribución del activo pase a ser asimétrica, por lo que se requieren otras herramientas de valoración: análisis de derechos contingentes (CCA) o programación dinámica, ambos llevan a los mismos resultados y ambos son análisis de opciones financieras aplicados a opciones reales (Meier, Christofides y Salkin, 2001). La definición de opción real surgió de Myers (1977) cuando relacionó el concepto de opción financiera con el de opción real. En las opciones reales, la opción se refiere a un activo real, frente a los activos financieros de las opciones financieras. Tener una opción real significa tener el derecho (no la obligación) durante un determinado periodo de tiempo de decidir llevar a cabo la inversión (Carlsson y Fullér, 2003), es decir una opción real es una decisión que crea el derecho, pero no la obligación, de adquirir algún activo real. Recientemente han aparecido técnicas de valoración para perfeccionar el cálculo de las opciones reales. La tecnología de valoración de opciones determina el valor teórico de la opción. Hay algunos enfoques para este problema, sobre la base de las diferentes suposiciones con respecto al mercado, la dinámica del comportamiento de precio de las acciones y las preferencias individuales. Para poder llegar a una solución analítica las teorías más importantes se basan en los principios de réplica y de arbitraje, que pueden ser aplicados cuando la dinámica del subyacente toma ciertos formas (vea por ejemplo Black y Scholes, 1973). Mientras que la réplica permite obtener un valor consistente de la opción, el arbitraje garantiza que la estimación del valor del contingente a partir del valor de la acción sea el de equilibrio (de la Fuente, 1999). La más simple de estas teorías está basada en el modelo multiplicativo binario de las fluctuaciones de precio de las acciones, que es utilizado para modelar el comportamiento de la acción y que fue introducido por Cox, Ross y Rubinstein (1979). Sin embargo, en el caso de las inversiones en activos reales los supuestos de réplica y arbitraje son innaturales, por lo que los métodos de cálculo de las opciones reales muchas veces no tendrán una solución analítica, teniendo que recurrir a los métodos numéricos (simulaciones, aproximaciones mediante árboles de decisión, integración numérica y diferencias finitas). De hecho la principal diferencia entre opciones financieras y opciones reales, es que estas últimas dependen de unos ingresos (activo subyacente) cuya observación es más compleja y esto dificulta la condición de réplica, por lo que los ingresos de la empresa no pueden ser considerados como un activo negociado. En otros casos se asume que los mercados son completos (los ingresos pueden ser replicados por una cartera de activos negociables, cartera *tracking*, cuyos movimientos de valor son idénticos a los movimientos de valor de los ingresos), en algunos casos la evolución de los ingresos y la de la cartera *tracking* pueden diferir, esto puede resolverse ajustando el valor de la opción como en el caso de los dividendos de las opciones financieras.

La técnica de opciones reales reconoce a las oportunidades futuras y, bajo el supuesto de active-management, se determina la mejor cartera de opciones a reconocer para maximizar el valor de la empresa. Con esta técnica, por tanto, se recoge cuantitativamente algo que hasta el momento solamente se consideraba un aspecto cualitativo: la flexibilidad. Sin embargo la técnica de valoración con opciones reales no recoge la incertidumbre, por lo que se deja una parte de la información no reflejada, es decir con la utilización de la técnica de valoración de opciones reales aún queda un aspecto cualitativo sin cuantificar: la incertidumbre. Como solución a ello han surgido algunos trabajos introduciendo este aspecto mediante la lógica borrosa, tales como Muzzioli y Torricelli (2004) para valorar opciones financieras mediante el modelo binomial multiperiodo, Carlsson y Fullér (2003) que introducen el concepto de incertidumbre dentro de las opciones reales, en este trabajo los autores introducen el concepto de opción real borrosa (fuzzy real option, FRO).

Des de el punto de vista del proceso estocástico hay una gran diferencia entre incertidumbre y riesgo. El riesgo es una incertidumbre cuya probabilidad puede ser calculada (por ejemplo utilizando valores históricos) o, al menos, estimada matemáticamente (utilizando proyección de escenarios). Es decir, el concepto de incertidumbre es más amplio que el de riesgo. En general, el concepto de probabilidad se relaciona con la frecuencia de ocurrencia de los eventos, capturada con la repetición de experimentos cuyos resultados son guardados, mientras que la lógica borrosa provee de una estructura apropiada para valorar la posibilidad de eventos, más que su probabilidad (Garavelli et al., 1999). En el mundo actual los fenómenos cambian y evolucionan de una forma tan rápida que en ciertos casos es imprudente interpretar una situación de riesgo cuando realmente no puede asignarse una probabilidad exacta (crisp). De esta forma, en aquellos proyectos inmersos en incertidumbre, la técnica de opciones reales es ciega ya que solamente reconoce una parte de la incertidumbre (el riesgo), en cambio al introducir la lógica borrosa se conseguirá reconocer la totalidad de la incertidumbre. Es decir, las técnicas de valoración de opciones reales permiten la obtención del valor de la flexibilidad, por tanto permiten valorar una parte cualitativa de la inversión, sin embargo estas técnicas de valoración parten del supuesto de que se conoce con exactitud ciertos valores, por lo que se llega a un resultado crisp. Sin embargo las técnicas de valoración de opciones reales borrosas permiten dar un intervalo de valores posibles, dado que el manager debe de tomar decisiones de un futuro incierto. Carlsson y Fullér (2003) señalan “ nuestra experiencias con el proyecto Waeno en giga-inversiones muestra que los managers pueden estimar el valor actual de los cash flows esperados utilizando una distribución de posibilidad de forma trapezoidal”. Por tanto, en un entorno con incertidumbre la técnica más apropiada es los intervalos borrosos. Con los métodos de presupuestación de capital borrosos estas afirmaciones pueden utilizarse como son, sin tener que tipificarlas a un número, tal y como se hace en los enfoques comunes (Meier, Christofides y Salkin, 2001).

En el modelo propuesto por Muzzioli y Torricelli (2004) se parte de la definición de las probabilidades neutrales al riesgo (risk-neutrals probabilities) mediante números borrosos. De esta forma, los autores obtienen una generalización del modelo binomial para valoración de opciones financieras. Sus resultados indican un mejor ajuste del modelo binomial borroso que el modelo binomial estándar. Avellaneda et al. (1995) y Avellaneda y Paras (1996) definieron al modelo de volatilidad incierta (uncertain volatility model) para valorar carteras cuando hay incertidumbre en el parámetro de volatilidad. Cherubini y Della (2001) muestran como aplicar la teoría borrosa para valorar derechos contingentes en mercados incompletos.

El hecho de utilizar la técnica de valoración de opciones reales borrosas no significa que se prescinda de la utilización de distribuciones de probabilidad mediante la sustitución de éstas por distribuciones de posibilidad, sino que, dado el modelo de valoración estándar de opciones reales se introduce la incertidumbre. Por tanto no se está poniendo en cuestión los modelos de valoración de opciones reales sino que se reconoce el hecho de que los managers en multitud de situaciones no pueden basarse con un número *crisp* o, incluso, dada la información que disponen, no pueden precisar ciertos parámetros (es decir, disponen de información *vague*).

Para valorar un proyecto de inversión la técnica de opciones reales propone el VAN dinámico, que, además de incluir los DCF, reconoce la flexibilidad:

$$\text{VAN}_{\text{dinámico}} = \text{VAN}_{\text{estático}} + \text{VA}_{\text{opciones reales}}$$

De este modo, si se introduce el concepto de incertidumbre en la técnica de opciones reales se puede concluir que ésta puede provenir tanto por el lado del valor del subyacente ($\text{VAN}_{\text{estático}}$), como por el lado de las opciones reales, o por ambos a la vez. Cuando no se puede precisar el $\text{VAN}_{\text{estático}}$ es porque el valor actual del subyacente es impreciso, esta situación es prácticamente imposible en el caso de los activos financieros, pero cuando se valoran activos reales el supuesto de mercados completos es una situación menos común. La incertidumbre en el lado de las opciones reales puede darse cuando el valor de la volatilidad del subyacente es un valor *vague*. De hecho, en el caso de los activos reales difícilmente se puede hallar la volatilidad histórica o la de un activo semejante, es por ello que en muchos casos es más recomendable la utilización de volatilidades definidas con números borrosos.

En este trabajo se define un modelo general que recoge las dos fuentes de incertidumbre.

El resto del trabajo se distribuye de la siguiente forma: en la sección 2 se define y analiza al árbol binomial borroso; en la sección 3 se establece el modelo de valoración; en la sección 4 y en la sección 5 se proponen el modelo de valoración de la opción borroso de un periodo y el multiperiodo, respectivamente; en la sección 6 se propone un proceso de desborrorización (defuzzification); finalmente, se discuten las conclusiones propuestas para este artículo.

2. EL ÁRBOL BINOMIAL BORROSO

Uno de los métodos de valoración de estrategias más utilizado es el de considerar la estrategia como una cartera de opciones. A partir del momento en que se reconoce a la estrategia como una cartera de opciones, la tecnología de valoración de opciones reales más apropiada es la de opciones compuestas. La valoración de las opciones compuestas es la más compleja ya que cuando ambas opciones reducen las colas negativas (puts) o ambas amplían las colas positivas (calls) su valor no es aditivo (Trigeorgis, 1993), es decir la valoración individual de las opciones deberá de ser descartada y deberá de recurrirse a métodos de valoración de opciones compuestas. Tal y como señalan Herath y Park (2002), las opciones compuestas pueden considerarse de dos tipos. Por un lado se encuentran las opciones compuestas simultáneas, es decir opciones que están vivas en un mismo momento. Estas opciones pueden valorarse mediante el modelo propuesto por Geske (1979) en el que se soluciona el problema de valoración de opciones compuestas mediante la sustitución de la distribución estándar normal univariante por una distribución normal bivariante. Por otro lado Copelang y Antikarov (2001) propusieron un modelo para la valoración de opciones compuestas secuenciales mediante la utilización del cálculo binomial para proyectos multietapa. Estos autores elaboraron dos tipos de opciones compuestas. En primer lugar definieron un proyecto de dos fases que depende de una sola variable subyacente y, en segundo lugar, definieron una opción compuesta del tipo *rainbow* en la que el subyacente depende de dos variables de estado. Uno de los métodos más utilizados es el modelo binomial log-transformado que propuso Trigeorgis (1991), ya que permite reemplazar las probabilidades ajustadas al riesgo por las probabilidades neutrales al riesgo y además permite utilizar el argumento *hedging* en tiempo discreto.

En este trabajo partimos del modelo log-transformado pero añadimos la lógica borrosa con el objetivo de recoger la incertidumbre en la valoración de la mayoría de las estrategias. Para ello definimos los siguientes pasos:

En un primer lugar se deben de determinar cuales son las variables imprecisas, es decir:

a) El valor actual del subyacente, los DCF. Una de los supuestos clave para la valoración de opciones reales, es el argumento de no arbitrariedad el cual, entre otras cosas, requiere que el subyacente pueda ser comercializado, esto es raro en el caso de opciones reales en I+D (Newton, Paxon y Widdicks, 2004) y para la mayoría de las opciones reales.

b) El valor de la volatilidad del subyacente. De hecho Arnold y Crack (2004) en un estudio sobre el uso de el coste de capital medio ponderando (weighted-average cost of capital, WACC) en comparación con el uso de la valoración riesgo neutral aplicada al análisis de opciones reales (ROA) concluyen que el principal factor en la implementación correcta del ROA no es la determinación de la tasa de descuento sino que la estimación de la volatilidad. Esto reconoce, en cierto modo, el problema existente a la hora de estimar un valor *crisp* para la volatilidad.

Proponemos, por tanto, la utilización de la lógica borrosa para definir estas variables imprecisas.

Una vez se conozcan los intervalos de volatilidad se determinaran los intervalos de las probabilidades riesgo-neutrales y así obtener el intervalo de valor de la/s opción/es real/es.

Finalmente, mediante la *defuzzification* obtendremos un valor *crisp* representativo del intervalo (que en general no coincidirá con el valor de la opción real estándar) y un índice de borrosidad. Esta parte es la principal aportación adicional que se obtiene mediante la utilización del modelo borroso en lugar del modelo estándar de valoración de opciones, ya que de este modo el agente decisor (manager) además de conocer un intervalo de valores posibles de la flexibilidad (en lugar de un solo valor) conoce un valor más ajustado a la realidad y cuanta incertidumbre engloba a esta decisión. Por lo que no solamente se obtienen simples intervalos.

En el trabajo de Muzzioli y Torricelli (2004) los autores definen un modelo de valoración de opciones financieras borrosas, partiendo del supuesto de que la incertidumbre viene dada por la volatilidad, dado que éste es un parámetro muy difícil de definir mediante un valor *crisp*. En el caso de opciones financieras el valor del subyacente es conocido ya que las acciones cuentan con un mercado casi perfecto. Sin embargo en el caso real muchas veces incluso la incertidumbre ya es de partida, dado la dificultad de precisión del propio valor actual de la inversión, de hecho una de las principales debilidades de la valoración de opciones reales es el supuesto de conocimiento de un valor *crisp* del subyacente. Precisamente la lógica borrosa pretende dar respuesta a este problema de imprecisión. Por tanto, además de la vaguedad introducida debido al desconocimiento del valor de la volatilidad, en el modelo propuesto también introducimos vaguedad con el precio del valor inicial de la inversión. Es decir, la valoración basada en opciones financieras utiliza activos de riesgo equivalente que tienen un precio de mercado conocido. Pero en el caso de opciones reales no hay mercados equivalentes. Por lo que en muchos casos se utilizan *proxies*, que pueden ser encontradas en: mercados de productos básicos (incluyendo instrumentos físicos y financieros), inversiones similares o activos de compañías *proxies*. Si embargo en este artículo se propone la utilización de la lógica borrosa para su determinación. Ello facilita mucho la valoración de activos a los que difícilmente puede determinarse *proxies*.

Pasos propuestos para valorar proyectos de inversión o estrategias:

Calcular los DCF borrosos, para poder obtener el valor actual del subyacente $P_0 = \left(P_{0,1}, P_{0,2}, P_{0,3}\right)$

Calcular el VAN dinámico, como la suma del VAN estático y las opciones reales

$$= \left(P_0 - I\right) + C_0 = \left(P_{0,1} + C_{0,1}, P_{0,2} + C_{0,2}, P_{0,3} + C_{0,3}\right) - I$$

Tal y como podemos observar, el VAN dinámico resulta ser un número borroso.

Por otra parte, debemos recordar que en nuestro modelo puede ocurrir que la incertidumbre venga de:

El valor del subyacente (de los FNC). En este caso solamente se tiene que P_0 es borroso y σ resulta ser *crisp*.

La volatilidad del subyacente. En este caso se tiene que P_0 es *crisp* y σ es borroso. Esta es el modelo planteado por Muzzioli y Torricelli.

Tanto del propio valor del subyacente como de su volatilidad: P_0 y σ son borrosos. Esta situación es la generalización de las dos anteriores.

Por tanto la principal aportación de este trabajo es la demostración de que en caso de incertidumbre no solamente debe de incorporarse a las opciones reales para determinar la flexibilidad disponible en cada caso, sino que además deben de cuestionarse el hecho de si esta incertidumbre afecta al propio conocimiento de distintas alternativas.

Por tanto, las opciones reales reconocen la existencia de distintas alternativas y que la decisión en cada caso es distinta (active management), pero al introducir la lógica borrosa se reconoce que incluso estas posibles alternativas no son precisas (*crisp*) sino que pueden tener distintas versiones. Por tanto los modelos clásicos consideran a los proyectos de inversión como algo que se hace hoy o nunca y que una vez decido no se puede cambiar nada, pase lo que pase. Mediante los modelos con opciones reales se introduce la flexibilidad del proyecto de inversión cuando surgen cambios de lo esperado. Y con la lógica borrosa se introduce el hecho de que las distintas situaciones posibles no son precisas, sino que son vagas.

3. DEFINICIÓN DEL MODELO DE VALORACIÓN

Si definimos *X* como el universo, un conjunto borroso *A* se caracteriza por los siguientes pares de valores: $\{(x,\mu_A(x))\}$ con $x \in X$ y donde $\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$ representa el grado presunción (*membership*) de *x* en *A*. Se admite un grado de *membership* parcial: cuanto mas cerca de 1 esté, *x* pertenece más a *A*. Los α-cuts de *A* se pueden definir como $A_\alpha = \{x \in A / \mu_A(x) \geq \alpha\}$, se interpretan como el conjunto de elementos *x* tales que su función de *membership* es mayor o igual al umbral $\alpha \in [0,1]$. La noción de los α-cortes es similar al concepto del intervalo de confianza, pero el intervalo de confianza se refiere a probabilidad y los α-cortes se refieren a posibilidad.

Un numero borroso triangular es un conjunto borroso normal y convexo que puede ser definido por la tripleta: (a_1, a_2, a_3) donde a_1 es el límite inferior, a_2 es el valor del conjunto borroso que recibe el mayor grado de *membership* y a_3 es el límite superior.

Por lo que, es posible definir al número borroso con la siguiente función de *membership:*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 \rightarrow x < a_1 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} \rightarrow a_1 \leq x < a_2 \\ \dfrac{x-a_3}{a_2-a_3} \rightarrow a_2 \leq x < a_3 \\ 0 \rightarrow x > a_3 \end{cases}$$

Alternativamente también puede ser definido por los α-cortes: $A_\alpha = [a_1(\alpha), a_3(\alpha)] = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_3 - \alpha(a_3 - a_2)]$. Los conjuntos borrosos son útiles para describir cantidades que son definidas de forma imprecisa.

En este trabajo se propone la utilización de los números borrosos triangulares por su sencillez. De hecho otras formas más complicadas puede incrementar la complejidad computacional sin añadir considerablemente significancia en los resultados.

Para empezar con nuestra metodología de valoración primero empezamos con un modelo de un solo período, es decir $t \in [0,1]$, que se caracteriza por:

En el periodo *t=0* se tiene incertidumbre sobre el valor del activo subyacente.

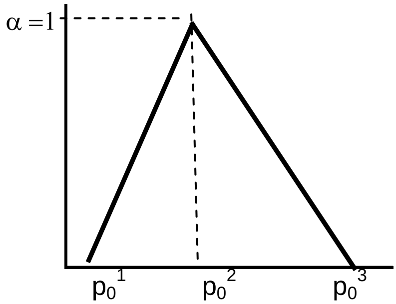
Los dos valores que puede alcanzar en *t*=1 son definidos de forma imprecisa, en el estado-*up* el mercado es alcista y en el estado-*down* el mercado es bajista.

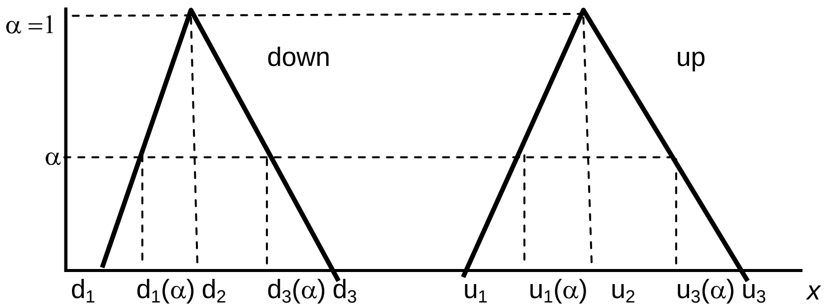
Como consecuencia de que en el periodo *t*=1 solamente pueden haber dos valores, dado el valor actual puede subir o bajar con una probabilidad exógena *p* y $(1-p) \in [0,1]$, respectivamente.

En un modelo binomial estándar de un periodo necesitamos un valor inicial del subyacente y dos valores finales, todos ellos *crisp*. Definimos P_0 al precio inicial del subyacente, y *u* y *d* el factor de *up* y *down*, respectivamente. Cox et al. (1979) llevan a definir $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ y $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ donde σ es la volatilidad del activo subyacente y Δt es la longitud del periodo, en este modelo inicial es 1.

Hay diferentes métodos para calcular la volatilidad de la acción o con datos históricos, o con valores de la opción (por ej. Hull, 2000), en este caso se obtienen valores *crisp*, pero muchas veces es difícil dar un cálculo aproximado exacto por lo que podría ser conveniente dejarle tomar valores de intervalo. Como sugiere Avellaneda y Paras (1996), ésta es una manera de incluir heteroscedasticidad (es decir, volatilidad de volatilidad). Además, podría ser el caso de que no todos los miembros del intervalo tienen la misma confiabilidad, cuando los miembros centrales son normalmente más probables que los otros (Muzzioli y Torricelli, 2004).

Por tanto, tenemos tres distribuciones de posibilidad: una para el precio inicial del activo subyacente, otra para el factor *up* y otra para el factor *down* en el precio de las acciones, ilustrado en Fig. 1.





Así podemos definir a $P_0 = \left(P_0^1, P_0^2, P_0^3\right)$ como el número borroso que define al precio inicial del subyacente, a $u = \left(u_1, u_2, u_3\right)$ y $d = \left(d_1, d_2, d_3\right)$ como los números borrosos triangulares que definen a los factores down y up respectivamente.

Siguiendo con la línea de Cox et al. (1979) asumimos que el árbol se calcula a partir del precio spot, dando $u_1 = e^{\sigma_1 \sqrt{\Delta t}}$, $u_2 = e^{\sigma_2 \sqrt{\Delta t}}$, $u_3 = e^{\sigma_3 \sqrt{\Delta t}}$, $d_1 = \frac{1}{u_3}$, $d_2 = \frac{1}{u_2}$, $d_3 = \frac{1}{u_1}$ y estimamos los tres parámetros de volatilidad ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) con el siguiente problema de optimización no lineal:

$$\min_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} \sum_{i=1}^{n} \left(P_T\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right) - P_M\right)^2$$

$$s.a. 0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$$

$$e^{-\sigma_1 \sqrt{\Delta t}} < e^{r\Delta t} < e^{\sigma_1 \sqrt{\Delta t}}$$

Tal y como señalan Muzzioli y Torricelli (2004), al hacer un modelo binomial estándar el precio de las acciones en el momento 1 puede subir o bajar a dos valores *crisp*, por ejemplo siendo 100 el precio del subyacente en cero, puede saltar a exactamente 110 o a exactamente 90 en el momento uno. En el modelo propuesto por Muzzioli y Torricelli sólo puede afirmarse que si el mercado es alcista el precio de las acciones aumenta y si el mercado está con tendencia a la baja disminuirá, mientras que la cantidad del cambio es dada con poca precisión, es decir el precio del subyacente es posible que salte a "Aproximadamente 110" o a "Aproximadamente 90", respectivamente. En el modelo propuesto no solamente hay imprecisión en el valor futuro del proyecto de inversión, sino que además en el valor inicial, dado que en el caso de las inversiones reales no siempre se dispone de un mercado completo para poder precisar su valor *crisp*. Por lo que en el modelo propuesto no solamente no podemos precisar con un valor *crisp* el precio futuro del activo subyacente (aproximadamente 110 o aproximadamente 90), sino que incluso su valor actual es impreciso (aproximadamente 100).

Para la determinación de los intervalos de las probabilidades riesgo neutrales se parte de los siguientes supuestos:

- Todos inversores tienen creencias homogéneas.
- Los mercados no tienen costes de transacción, impuestos, ninguna restricción sobre ventas pequeñas y los activos son infinitamente divisibles.
- Cada inversor actúa como persona interesada en el precio.
- Las tasas de interés son positivas.
- No hay ninguna oportunidad de arbitraje. Esta condición es expresada por la siguiente fórmula: $d_3 < (1+r) < u_1$

La metodología estándar para determinar las probabilidades riesgo neutrales utilizan el siguiente sistema:

$$\begin{cases} p_d + p_u = 1 \\ \dfrac{d}{1+r} p_d + \dfrac{u}{1+r} p_u = 1 \end{cases},$$

Aplicando la lógica borrosa optenemos:

$$\begin{cases} p_d + p_u = 1 \\ \dfrac{[d_1^\alpha, d_3^\alpha]}{1+r} p_d + \dfrac{[u_1^\alpha, u_3^\alpha]}{1+r} p_u = [1,1] \end{cases}$$

Este sistema se puede separar en otros dos:

$$\begin{cases} p_d + p_u = 1 \\ \dfrac{d_1 + \alpha(d_2 - d_1)}{1+r} p_d + \dfrac{u_1 + \alpha(u_2 - u_1)}{1+r} p_u = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} p_d + p_u = 1 \\ \dfrac{d_3 - \alpha(d_3 - d_2)}{1+r} p_d + \dfrac{u_3 - \alpha(u_3 - u_2)}{1+r} p_u = 1 \end{cases}.$$

Del primer sistema se obtiene:

$$p_u = \frac{(1+r) - d_1 - \alpha(d_2 - d_1)}{u_1 - d_1 + \alpha(u_2 - u_1 - d_2 + d_1)}$$

$$p_d = \frac{u_1 + \alpha(u_2 - u_1) - (1+r)}{u_1 - d_1 + \alpha(u_2 - u_1 - d_2 + d_1)}$$

Y del segundo:

$$p_u = \frac{(1+r) - d_3 + \alpha(d_3 - d_2)}{u_3 - d_3 - \alpha(u_3 - u_2 - d_3 + d_2)}$$
$$p_d = \frac{u_3 - \alpha(u_3 - u_2) - (1+r)}{u_3 - d_3 - \alpha(u_3 - u_2 - d_3 + d_2)}$$

Ambas soluciones representan a los límetes de los intervalos de posibilidad:

$$p_u = \left[\underline{p_u}, \overline{p_u}\right] = \left[\frac{(1+r) - d_3 + \alpha(d_3 - d_2)}{u_3 - d_3 - \alpha(u_3 - u_2 - d_3 + d_2)}, \frac{(1+r) - d_1 - \alpha(d_2 - d_1)}{u_1 - d_1 + \alpha(u_2 - u_1 - d_2 + d_1)}\right]$$

$$p_d = \left[\underline{p_d}, \overline{p_d}\right] = \left[\frac{u_1 + \alpha(u_2 - u_1) - (1+r)}{u_1 - d_1 + \alpha(u_2 - u_1 - d_2 + d_1)}, \frac{u_3 - \alpha(u_3 - u_2) - (1+r)}{u_3 - d_3 - \alpha(u_3 - u_2 - d_3 + d_2)}\right]$$

Es fácil ver como se cumple:

$$\underline{p_u} + \overline{p_d} = 1 \text{ y } \underline{p_d} + \overline{p_u} = 1$$

Es interesante remarcar que el modelo binomial de valoración de opciones da como resultado un intervalo de valores de las probabilidades riego-neutrales, como consecuencia de los supuestos realizados en el valor de la acción, por lo que las probabilidades riego-neutrales son números borrosos. Para determinar la forma de los numero borrosos de las probabilidades riesgo neutrales hay que calcular su valor cuando $\alpha = \{0,1\}$

Si α=0 $p_u = \left[\frac{(1+r) - d_3}{u_3 - d_3}, \frac{(1+r) - d_1}{u_1 - d_1}\right]$ y $p_d = \left[\frac{u_1 - (1+r)}{u_1 - d_1}, \frac{u_3 - (1+r)}{u_3 - d_3}\right]$

Si α=1 $p_u = \left[\frac{(1+r) - d_2}{u_2 - d_2}, \frac{(1+r) - d_2}{u_2 - d_2}\right] = \left\{\frac{(1+r) - d_2}{u_2 - d_2}\right\}$ y $p_d = \left[\frac{u_2 - (1+r)}{u_2 - d_2}, \frac{u_2 - (1+r)}{u_2 - d_2}\right] = \left\{\frac{u_2 - (1+r)}{u_2 - d_2}\right\}$

En el anexo puede observarse como la derivada respecto a α de los límites superiores es positiva y de los límites inferiores es negativa: los límites se estrechan a medida que α crece, de hecho en α=1 el resultado es un solo valor, que coincide con el binomial estándar, por lo que este modelo puede considerarse como una generalización del modelo binomial estándar (ya que es un caso particular de α=1).

Podemos destacar:

- Que si los factores *up* y *down* son menos distintos, entonces p_u y p_d están más cerca de un número *crisp*. En cambio si los factores *up* y *down* son más distintos, tanto p_u como p_d son más vagos.

- Si el factor up tiene una distribución más ancha que la del factor down, entonces la parte izquierda de p_u es más vaga que la parte derecha y la parte izquierda de p_d es menos vaga que la parte derecha.
- Si el factor down tiene una distribución más ancha que la del factor up, entonces la parte izquierda de p_u es menos vaga que la parte derecha y la parte izquierda de p_d es más vaga que la parte derecha.
- Los números borrosos referente a las probabilidades riesgo neutrales solamente serán triangulares cuando $u_3 - u_2 = d_3 - d_2$ y $u_2 - u_1 = d_2 - d_1$.

4. VALOR DE LA OPCIÓN REAL BORROSA

En esta sección, utilizamos las probabilidades riesgo-neutrales que hemos calculado en la sección previa para calcular el precio de una opción y el valor actual del activo subyacente. En esta sección, para una mejor comprensión, supondremos que estamos ante una opción real de vencimiento al cabo de un periodo, por lo que solamente nos centramos en el cálculo del valor de la opción real borrosa uni-período, en la siguiente sección se analizará el caso general (multiperiodo)

A la fecha de vencimiento, una opción de compra tiene un valor positivo si el precio del subyacente es más grande que el precio de ejercicio y tiene valor cero en los demás casos. El *payoff* de una opción de compra depende del precio del activo subyacente. El precio del subyacente en t=1 viene dado por P_0d y P_0u. Si P_0, u y d son números borrosos, entonces el precio del activo en cada estadio se representa por un número borroso.

Para hacer que una opción sea un contrato atractivo hacemos el supuesto de que el precio de ejercicio está entre el valor más alto de la acción en el estado *down* y el valor más bajo de la acción en el estado *up*, es decir:

$$P_0^3 d_3 \leq X \leq P_0^1 u_1$$

Definimos el *payoff* de la *Call* C_u en el estado *up* y C_p en el estadio *down*.
Además:

$$C_d = \max\{0; P_0 d - X\} \underbrace{=}_{P_0^3 d_3 \leq X \leq P_0^1 u_1} 0 \quad \text{y} \quad C_u = \max\{0; P_0 u - X\} \underbrace{=}_{P_0^3 d_3 \leq X \leq P_0^1 u_1} P_0 u - X$$

Por lo que C_d es un número *crisp* y C_u es un número borroso:

$$C_u = P_0 u - X = \left[\left(P_0^1 + \alpha\left(P_0^2 - P_0^1\right)\right)\left(u_1 + \alpha\left(u_2 - u_1\right)\right), \left(P_0^3 - \alpha\left(P_0^3 - P_0^2\right)\right)\left(u_3 - \alpha\left(u_3 - u_2\right)\right)\right] - X =$$
$$= \left(P_0^1 u_1 - X, P_0^2 u_2 - X, P_0^3 u_3 - X\right)$$

Podemos determinar el valor actual de la opción como la media actualizada al tipo de interés neutral al riesgo y con las probabilidades riesgo-neutrales:

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\hat{E}[C_1] = \frac{1}{1+r}\left[p_d \underbrace{C_d}_{0} + p_u C_u\right] = \frac{1}{1+r}\left[p_u C_u\right]$$

Sustituyendo:

$$C_0=\left[\underline{C_0},\overline{C_0}\right]=$$

$$=\left[\frac{\left(P_0^1+\alpha\left(P_0^2-P_0^1\right)\right)\left(u_1+\alpha\left(u_2-u_1\right)\right)-X}{1+r}\cdot\underbrace{\frac{(1+r)-d_3+\alpha\left(d_3-d_2\right)}{u_3-d_3-\alpha\left(u_3-u_2-d_3+d_2\right)}}_{\underline{p_u}},\frac{\left(P_0^3-\alpha\left(P_0^3-P_0^2\right)\right)\left(u_3-\alpha\left(u_3-u_2\right)\right)-X}{1+r}\cdot\underbrace{\frac{(1+r)-d_1+\alpha\left(d_2-d_1\right)}{u_1-d_1-\alpha\left(u_2-u_1-d_2+d_1\right)}}_{\overline{p_u}}\right]$$

Podemos observar que si α incrementa, el intervalo se reduce y si $\alpha=0$ se obtiene el mayor intervalo:

$$C_0=\left[\underline{C_0},\overline{C_0}\right]=\left[\frac{P_0^1u_1-X}{1+r}\frac{(1+r)-d_3}{u_3-d_3},\frac{P_0^3u_3-X}{1+r}\frac{(1+r)-d_1}{u_1-d_1}\right]$$

Pero si $\alpha=1$, se obtiene el menor inervalo:

$$C_0=\left[\underline{C_0},\overline{C_0}\right]=\left[\frac{P_0^2u_2-X}{1+r}\frac{(1+r)-d_2}{u_2-d_2},\frac{P_0^2u_2-X}{1+r}\frac{(1+r)-d_2}{u_2-d_2}\right]=\left\{\frac{P_0^2u_2-X}{1+r}\frac{(1+r)-d_2}{u_2-d_2}\right\}$$

Este valor es el mismo que el modelo binomial estándar (sin incertidumbre).

De aquí podemos destacar que cuanto mayor es la incertidumbre mayor es la amplitud del intervalo del valor actual de la opción. Para facilitar la interpretación en la figura 1 se ha supuesto el caso triangular, en esta figura puede apreciarse como el triangulo de doble raya es el numero borroso que representa a una opción real con incertidumbre tanto en el lado de la flexibilidad futura del proyecto de inversión como del lado del propio valor actual del activo subyacente. El triangulo de raya simple representa la borrosidad que tiene una opción real que solamente presenta incertidumbre en el lado de la flexibilidad (modelo propuesto por Muzzioli y Turricelli). El valor c es el valor de la opción real obtenido mediante el modelo binomial estándar sin incertidumbre, este valor es el más posible en ambos casos.

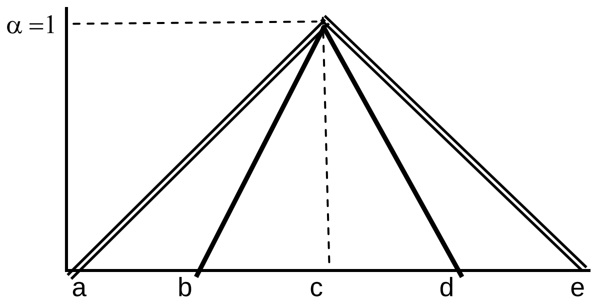


Figura 1. Introducción de la vaguedad en el modelo binomial.

Donde:

$$a = \frac{\left(P_0^1 + \alpha\left(P_0^2 - P_0^1\right)\right)\left(u_1 + \alpha\left(u_2 - u_1\right)\right) - X}{1+r} \frac{(1+r) - d_3 + \alpha\left(d_3 - d_2\right)}{u_3 - d_3 - \alpha\left(u_3 - u_2 - d_3 + d_2\right)}$$

$$b = \frac{P_0^2\left(u_1 + \alpha\left(u_2 - u_1\right)\right) - X}{1+r} \frac{(1+r) - d_3 + \alpha\left(d_3 - d_2\right)}{u_3 - d_3 - \alpha\left(u_3 - u_2 - d_3 + d_2\right)}$$

$$c = \frac{P_0^2 u_2 - X}{1+r} \frac{(1+r) - d_2}{u_2 - d_2}$$

$$d = \frac{P_0^2\left(u_3 - \alpha\left(u_3 - u_2\right)\right) - X}{1+r} \frac{(1+r) - d_1 + \alpha\left(d_2 - d_1\right)}{u_1 - d_1 - \alpha\left(u_2 - u_1 - d_2 + d_1\right)}$$

$$e = \frac{\left(P_0^3 - \alpha\left(P_0^3 - P_0^2\right)\right)\left(u_3 - \alpha\left(u_3 - u_2\right)\right) - X}{1+r} \frac{(1+r) - d_1 + \alpha\left(d_2 - d_1\right)}{u_1 - d_1 - \alpha\left(u_2 - u_1 - d_2 + d_1\right)}$$

Por tanto, cuando se introduce el concepto de *vagueness* en la valoración de proyectos de inversión que presentan flexibilidad, se pueden presentar las siguientes situaciones:

- Que se no se tenga incertidumbre. Este es el caso del modelo binomial estándar, es decir cuando $\alpha = 1$. Es decir:

$$C_0 = \frac{P_0^2 u_2 - X}{1+r} \frac{(1+r) - d_2}{u_2 - d_2}$$

- Que se tenga incertidumbre solamente sobre los DCF. En este caso se debe de considerar que el valor actual del subyacente es un número borroso, por tanto $P_0 = \left(P_0^1, P_0^2, P_0^3\right)$, sin embargo los factores de salto up y *down* son un valor *crisp*: $u = u_2$ y $d = d_2$, respectivamente.
-

En este caso:

$$C_0 = \left[\underline{C_0}, \overline{C_0}\right] = \left[\frac{\left(P_0^1 + \alpha\left(P_0^2 - P_0^1\right)\right) \cdot u_2 - X}{1+r} \cdot \frac{(1+r) - d_2}{u_2 - d_2}, \frac{\left(P_0^3 - \alpha\left(P_0^3 - P_0^2\right)\right) \cdot u_2 - X}{1+r} \cdot \frac{(1+r) - d_2}{u_2 - d_2}\right]$$

Si α=0:

$$C_0 = \left[\underline{C_0}, \overline{C_0}\right] = \left[\frac{P_0^1 u_2 - X}{1+r} \frac{(1+r) - d_2}{u_2 - d_2}, \frac{P_0^3 u_2 - X}{1+r} \frac{(1+r) - d_2}{u_2 - d_2}\right]$$

Y si α=1:

$$C_0 = \left[\underline{C_0}, \overline{C_0}\right] = \left[\frac{P_0^2 u_2 - X}{1+r} \frac{(1+r) - d_2}{u_2 - d_2}, \frac{P_0^2 u_2 - X}{1+r} \frac{(1+r) - d_2}{u_2 - d_2}\right] = \left\{\frac{P_0^2 u_2 - X}{1+r} \frac{(1+r) - d_2}{u_2 - d_2}\right\}$$

- Que se tenga incertidumbre sobre la volatilidad del subyacente. En este caso las probabilidades riesgo-neutrales son números borrosos, es decir $p_u = \left[\underline{p_u}, \overline{p_u}\right]$ y $p_d = \left[\underline{p_d}, \overline{p_d}\right]$. Sin embargo el precio del subyacente es un valor *crisp*: $P_0 = P_0^2$

En este caso:

$$C_0 = \left[\underline{C_0}, \overline{C_0}\right] = \left[\frac{P_0^2(u_1 + \alpha(u_2 - u_1)) - X}{1+r} \cdot \frac{(1+r) - d_3 + \alpha(d_3 - d_2)}{u_3 - d_3 - \alpha(u_3 - u_2 - d_3 + d_2)}, \frac{P_0^2(u_3 - \alpha(u_3 - u_2)) - X}{1+r} \cdot \frac{(1+r) - d_1 + \alpha(d_2 - d_1)}{u_1 - d_1 - \alpha(u_2 - u_1 - d_2 + d_1)}\right]$$

Si α=0:

$$C_0 = \left[\underline{C_0}, \overline{C_0}\right] = \left[\frac{P_0^2 u_1 - X}{1+r} \frac{(1+r) - d_3}{u_3 - d_3}, \frac{P_0^2 u_3 - X}{1+r} \frac{(1+r) - d_1}{u_1 - d_1}\right]$$

Y si α=1:

$$C_0 = \left[\underline{C_0}, \overline{C_0}\right] = \left[\frac{P_0^2 u_2 - X}{1+r} \frac{(1+r) - d_2}{u_2 - d_2}, \frac{P_0^2 u_2 - X}{1+r} \frac{(1+r) - d_2}{u_2 - d_2}\right] = \left\{\frac{P_0^2 u_2 - X}{1+r} \frac{(1+r) - d_2}{u_2 - d_2}\right\}$$

- Que se tenga incertidumbre tanto en la volatilidad del subyacente como con su propio valor actual.

Este es el caso general obtenido anteriormente.

De lo anterior puede extraerse que el hecho de tener las dos fuentes de incertidumbre supone un valor actual de la opción real con un intervalo mayor que si solamente se tiene una fuente de incertidumbre. Por tanto la flexibilidad del proyecto de inversión se ve afectada tanto por la imprecisión en la volatilidad como por la imprecisión del valor actual del subyacente. Sin embargo la parte estática solamente está afectada por la vaguedad del precio del subyacente. Este fenómeno es fácil de interpretar, ya que si no se puede precisar el valor actual del proyecto, aunque se pueda precisar su volatilidad no se puede determinar un valor crip para el precio futuro del subyacente y, por tanto, tampoco se puede establecer un valor crisp para la opción real.

Si se quiere comparar y determinar cual de las dos fuentes de incertidumbre tiene un mayor peso sobre el valor actual de la opción real, solamente hace falta comparar los valores cuando α=0, ya que cuando α=1 se obtiene el mismo resultado.

$$C_0 = \left[\underline{C_0}, \overline{C_0}\right] = \left[\frac{P_0^1 u_2 - X}{1+r}\frac{(1+r)-d_2}{u_2-d_2}, \frac{P_0^3 u_2 - X}{1+r}\frac{(1+r)-d_2}{u_2-d_2}\right]$$

Vs.

$$C_0 = \left[\underline{C_0}, \overline{C_0}\right] = \left[\frac{P_0^2 u_1 - X}{1+r}\frac{(1+r)-d_3}{u_3-d_3}, \frac{P_0^2 u_3 - X}{1+r}\frac{(1+r)-d_1}{u_1-d_1}\right]$$

Por el lado izquierdo tenemos:

$$\frac{P_0^1 u_2 - X}{1+r}\frac{(1+r)-d_2}{u_2-d_2} \quad \text{vs} \quad \frac{P_0^2 u_1 - X}{1+r}\frac{(1+r)-d_3}{u_3-d_3}$$

El resultado depende tanto de $u_2 - d_2$ vs $u_3 - d_3$, como de $P_0^1 u_2$ vs $P_0^2 u_1$. Por lo que a simple vista no puede establecerse cual de los dos intervalos es mayor a nivel general.

5. BINOMIAL MULTIPERIODO

En la sección anterior se ha llevado a cabo un análisis del valor de la opción real borrosa cuando solamente hay un periodo. Pero cuando el modelo binomial es multiperiodo el precio del subyacente puede ser expresado de la siguiente manera:

- En el periodo 1:

$$P_0 u = \left[\left(P_0^1 + \alpha\left(P_0^2 - P_0^1\right)\right)\left(u_1 + \alpha\left(u_2 - u_1\right)\right), \left(P_0^3 - \alpha\left(P_0^3 - P_0^2\right)\right)\left(u_3 - \alpha\left(u_3 - u_2\right)\right)\right] = \left(P_0^1 u_1, P_0^2 u_2, P_0^3 u_3\right)$$

$$P_0 d = \left(P_0^1 d_1, P_0^2 d_2, P_0^3 d_3\right)$$

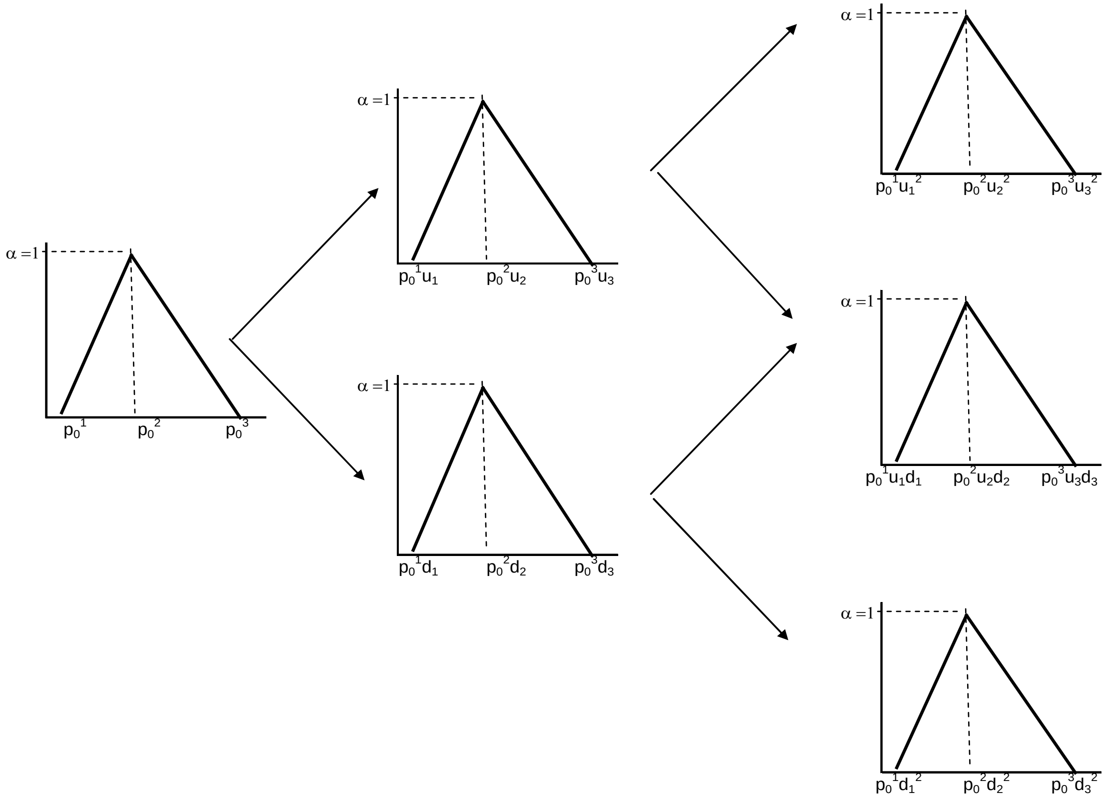
- En el periodo 2:

$$P_0 ud = P_0 du = \left(P_0^1 d_1 u_1, P_0^2 d_2 u_2, P_0^3 d_3 u_3\right),\ P_0 uu = \left(P_0^1 u_1^2, P_0^2 u_2^2, P_0^3 u_3^2\right),\ P_0 dd = \left(P_0^1 d_1^2, P_0^2 d_2^2, P_0^3 d_3^2\right)$$

- Generalizando, en el periodo t:

$$P_0 u^{t-j} d^j = \left(P_0^1 d_1^{t-j} u_1^j, P_0^2 d_2^{t-j} u_2^j, P_0^3 d_3^{t-j} u_3^j\right), \text{ con } j = 0,1,2,\ldots,t$$

Gráficamente en el caso de 2 periodos:



El árbol binomial borroso es muy parecido al caso estándar. Podemos definir las siguientes particularidades:

- En el caso de no-incertidumbre, es decir $\alpha = 1$, estamos ante un modelo binomial estándar.
- En el caso de que solamente se tenga incertidumbre sobre el subyacente se tiene que los factores de salto son valores *crisp* y, por tanto, el precio del activo subyacente en cualquier momento se puede definir de la siguiente manera: $P_0 u^{t-j} d^{j} = \left(P_0^1 d^{t-j} u^{j}, P_0^2 d^{t-j} u^{j}, P_0^3 d^{t-j} u^{j}\right)$, con $j = 0,1,2,\ldots,t$
- En el caso de que solamente se tenga incertidumbre sobre la volatilidad del subyacente, las probabilidades riesgo-neutrales son números borrosos y el precio inicial del subyacente es *crisp*, en cambio en todos los demás periodos será un número borroso y se puede definir: $P_0 u^{t-j} d^{j} = \left(P_0^2 d^{t-j} u^{j}, P_0^2 d^{t-j} u^{j}, P_0^2 d^{t-j} u^{j}\right)$, con $j = 0,1,2,\ldots,t$

- Finalmente, si se tiene incertidumbre tanto en el precio como en la volatilidad del subyacente tendremos el caso general, es decir $P_0 u^{t-j} d^{\,j} = \left(P_0^1 d_1^{t-j} u_1^{\,j}, P_0^2 d_2^{t-j} u_2^{\,j}, P_0^3 d_3^{t-j} u_3^{\,j}\right)$, con $j = 0,1,2,...,t$

Así, el modelo definido anteriormente es una generalización del modelo binomial estándar introduciendo el concepto de incertidumbre. El modelo binomial es uno de los más utilizados ya que, además de permitir utilizar el argumento *hedging* en tiempo discreto, permite la valoración de las opciones compuestas de una forma sencilla. Es decir, las inversiones en activos reales están inmersas de opciones reales que no pueden ser valoradas individualmente ya que cuando ambas opciones reducen las colas negativas (*puts*) o ambas amplían las colas positivas (*calls*) su valor no es aditivo (Trigeorgis, 1993), es decir la valoración individual de las opciones deberá de ser descartada y deberá de recurrirse a métodos de valoración de opciones compuestas. Esto hace, aún más poderoso al modelo binomial multiperiodo, sin embargo debemos señalar que el valor actual de la cartera de opciones reales conjuntas no puede hallarse mediante una sencilla fórmula general ya que para cada caso concreto será distinto. De todas formas, para una mayor comprensión del lector, en este trabajo vamos a valorar una *Call* Europea individual multiperiodo cuyo precio de ejercicio se halla dentro del siguiente intervalo: $P_0^3 d_3^{\,j+1} u_3^{n-j-1} \le X \le P_0^1 d_1^{\,j} u_1^{n-j}$

Primero valoraremos una *call* de dos periodos y después generalizaremos, por tanto: $P_0^3 d_3^1 u_3^1 \le X \le P_0^1 d_1^0 u_1^2$, por lo que la opción solamente tiene un valor positivo en up-up y cero en los demás casos: $C_{dd} = 0$, $C_{du} = 0$ y $C_{uu} = P_0 uu - X$.

Aplicando el algebra de los números borrosos se obtiene:

$$C_{uu} = \left(P_0^1 u_1^2 - X, P_0^2 u_2^2 - X, P_0^3 u_3^2 - X\right)$$

El valor en t=1 es:

$$C_u = \frac{1}{1+r}\hat{E}[C_2] = \frac{1}{1+r}\left[p_d \underbrace{C_{du}}_{0} + p_u C_{uu}\right] = \frac{1}{1+r}\left[p_u C_{uu}\right]$$

Y el valor en t=0 es:

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\hat{E}[C_1] = \frac{1}{1+r}\left[p_d \underbrace{C_d}_{0} + p_u C_u\right] = \frac{1}{1+r}\left[p_u C_u\right] = \frac{1}{(1+r)^2}\left[p_u^2 C_u\right]$$

$$C_0 = \left[\underline{C_0}, \overline{C_0}\right] =$$
$$= \left[\frac{\left(P_0^1 + \alpha\left(P_0^2 - P_0^1\right)\right)\left(u_1^2 + \alpha\left(u_2^2 - u_1^2\right)\right) - X}{(1+r)^2}\left(\frac{(1+r) - d_3 + \alpha(d_3 - d_2)}{u_3 - d_3 - \alpha(u_3 - u_2 - d_3 + d_2)}\right)^2, \frac{\left(P_0^3 - \alpha\left(P_0^3 - P_0^2\right)\right)\left(u_3^2 - \alpha\left(u_3^2 - u_2^2\right)\right) - X}{(1+r)^2}\left(\frac{(1+r) - d_1 + \alpha(d_2 - d_1)}{u_1 - d_1 - \alpha(u_2 - u_1 - d_2 + d_1)}\right)^2\right]$$

Se puede observar que cuando α aumenta, el intervalo se reduce. De hecho, si α=0 se obtiene el siguiente intervalo:

$$C_0 = \left[\underline{C_0}, \overline{C_0}\right] = \left[\frac{P_0^1 u_1^2 - X}{(1+r)^2}\left(\frac{(1+r)-d_3^2}{u_3^2 - d_3^2}\right)^2, \frac{P_0^3 u_3^2 - X}{(1+r)^2}\left(\frac{(1+r)-d_1^2}{u_1^2 - d_1^2}\right)^2\right]$$

Y si α=1 se obtiene el menor intervalo:

$$C_0 = \left[\underline{C_0}, \overline{C_0}\right] = \left[\frac{P_0^2 u_2^2 - X}{(1+r)^2}\left(\frac{(1+r)-d_2^2}{u_2^2 - d_2^2}\right)^2, \frac{P_0^2 u_2^2 - X}{(1+r)^2}\left(\frac{(1+r)-d_2^2}{u_2^2 - d_2^2}\right)^2\right] = \left\{\frac{P_0^2 u_2^2 - X}{(1+r)^2}\left(\frac{(1+r)-d_2^2}{u_2^2 - d_2^2}\right)^2\right\}$$

Este es el mismo valor que el modelo binomial estándar de 2 periodos.

En el caso general, t-periodos, el valor actual de una *call* europea es:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^t}\left[p_u^t C_u\right]$$

Recordemos que en el caso de que se trate de una *call* americana (la mayoría en opciones reales) o de una opción múltiple (una cartera de opciones reales) hay que comprobar en cualquier momento el cumplimiento de los requisitos para ejercer las opciones reconocidas.

Por otra parte, una de las ventajas de utilizar la lógica borrosa en la valoración de opciones reales es la determinación de una medida para valorar el grado de borrosidad del número borroso obtenido. Para ello nosotros vamos a seguir el método propuesto por en el trabajo de Muzzioli y Torricelli (2004). Definimos a *D* como la distancia entre un número borroso, *C*, y un de número *crisp*, *x*, de la siguiente manera:

$$D(C,x) = \int_0^1 (\underline{C} - x)^2 d\alpha + \int_0^1 (\overline{C} - x)^2 d\alpha = \int_0^1 \left(\underline{C}^2 + \overline{C}^2\right) d\alpha - 2x^2$$

Por lo que se debe de determinar un valor *crisp*, *x*, que minimice el valor de la distancia. Es decir, debemos de resolver el siguiente problema:

$$\min_x D(C,x) = \min_x \left[\int_0^1 (\underline{C} - x)^2 d\alpha + \int_0^1 (\overline{C} - x)^2 d\alpha\right]$$

Derivando:

$$\frac{\partial D(C,x)}{\partial x} = -2\int_0^1 (\underline{C} - x) d\alpha - 2\int_0^1 (\overline{C} - x) d\alpha = 0$$

$$-2\int_0^1 \left(\underline{C} + \overline{C}\right) d\alpha + 4x = 0$$

Así, obtenemos:

$$x = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\underline{C} + \overline{C}\right) d\alpha$$

x es el valor crisp más cercano del lado izquierdo y del lado derecho del número borroso. En el caso triangular $C = \left(C_1, C_2, C_3\right)$, por lo que $x = \frac{C_1 + 2C_2 + C_3}{4}$.

A x se le denomina *crisp defuzzifier* y puede interpretarse como el aquel valor más representativo del intervalo del valor actual de la opción y, podemos observa que no coincide con el valor del modelo binomial estándar $\left(C_2\right)$. En general, el *crisp defuzzifier* es diferente del precio binomial estándar porque tiene en cuenta toda la información contenida en el intervalo borroso, es decir tiene en cuenta tota la información del mercado sobre los movimientos de los precios del subyacente. Tener en cuenta solamente un cálculo *crisp* aproximado de los parámetros, como en un modelo binomial estándar, puede dar lugar a una pérdida de información y a un cálculo aproximado equivocado del precio de la opción. Por tanto, el hecho de que C_2 sea el valor más posible no significa que sea el más representativo del intervalo borroso.

Por tanto, una vez se tiene un valor *crisp* representativo del número borroso se puede calcular a $\sqrt{D(C,x)}$ y puede interpretarse como un índice de la dispersión del número borroso alrededor del *crisp defuzzifier*. Es decir, es un índice de la borrosidad presente en el modelo.

De tal forma, que cuanto mayor sea este valor mayor será el error cometido cuando se utilicen técnicas de valoración de opciones reales estándares sin que, por tanto, reconozcan su incertidumbre. Es decir las técnicas de valoración de opciones reales borrosas tienen especial interés cuando se tenga un índice de borrosidad relativamente alto.

6. CONCLUSIONES

Lo más importante a destacar es que mediante la introducción de la lógica borrosa no se realiza un simple análisis de escenarios (pesimista, optimista y probable) ya que la información adicional que se obtiene permite determinar distintas situaciones intermedias e índices de incertidumbre, que pueden considerarse como una información adicional significativa. Muzzioli y Torricelli (2004) demostraron que el modelo binomial borroso aplicado a opciones financieras, de las que se tenían valores de mercado, se ajustaba mejor que el modelo binomial estándar. Esta conclusión, en el caso de las opciones reales tiene un mayor interés ya que las opciones financieras, generalmente, se caracterizan por tener un menor grado de incertidumbre que las opciones reales. El problema del caso real es que no puede comprobarse cual de los dos modelos se ajustan mejor, ya que no existe ningún mercado de opciones reales.

Además, cuando se introduce la lógica borrosa en el análisis de valoración de inversiones se reconoce el hecho de que no toda la incertidumbre puede ser valorada con procesos estocásticos. Es decir el modelo propuesto es especialmente apropiado para aquellos proyectos de inversión que engloban un elevado grado de incertidumbre que no puede ser catalogada como riesgo, en este paper se propone una medida de borrosidad que permite determinar el error cometido cuando se utilizan técnicas de valoración de opciones reales estándares en lugar de borrosas. Se pueden citar como ejemplo de casos apropiados para la valoración con técnicas borrosas a: a) proyectos basados en el desarrollo de un nuevos productos (Büyüközkan y Feyzioǧlu, 2002; Lin y Chen, 2004), b) en seguros (Shapiro, 2004), c) estrategias de decisiones de múltiple criterio (Chiou et. Al, 2004).

Por tanto, en este trabajo proponemos una nueva estructura de valoración de opciones reales, basada en el modelo binomial borroso, es decir cuando el valor del subyacente y los estadios posibles de su valor futuro son definidos vagamente. Este modelo presenta un conjunto de ventajas, ya que permite calcular de forma, más ajustada a la realidad, el valor de un proyecto de inversión cuando existe incertidumbre, además el modelo propuesto obtiene unos resultados en intervalos que incluyen los valores del modelo binomial estándar, por lo que es una generalización de este modelo, es decir, en caso de tener un bajo índice de borrosidad el valor obtenido de la opción real (o de la cartera de opciones reales) será muy próximo al valor obtenido mediante el modelo binomial estándar. En este modelo se proponen dos fuentes de incertidumbre: el valor actual del activo subyacente y la volatilidad. El hecho de valorar activos reales hace que debamos asumir que, en la mayoría de casos, se tendrán las dos fuentes de incertidumbre y, por tanto, mayor será la borrosidad del valor de la opción real borrosa.

Con este trabajo, los autores pretenden dar una visión más global del concepto de incertidumbre en la valoración de proyectos de inversión, ya que el riesgo que se recoge utilizando las opciones reales solamente permite recoger aquella incertidumbre que es probabilizable y por tanto, con el modelo propuesto, además se recoge aquella incertidumbre probabilizable y no probabilizable.

REFERENCIAS

Avellaneda, M., Paras, A. (1996) “Managing the Volatility Risk of Portfolios of Derivative Securities: The Langragina Uncertain Volatility Model”. *Applied Mathematical Finance* 3 (1) (p. 21-52).

Avellaneda, M.; Levy, A., Paras, A. (1995) “Pricing and Hedging Derivative Securities Markets with Uncertain Volatilities”. *Applied Mathematical Finance* 2 (2) (p. 73-88).

Arnold, T., Crack, T. F.(2004). “Using the WACC to Value Real Options”. *Financial Analysts Journal* 60 (6) (p. 78-82)

Black, F. , Scholes, M. (1973) “The Pricing of Option and Corporate Liabilities”. *Journal of Political Economy* 81 (3) (p. 637-654).

Büyüközkan, G., Feyzioǧlu, O. (2002). “A fuzzy-logic-based Decision-Making Approach for New Product Development”. *International Journal of Production Economics* 90 (1) (p. 27-45).

Carlsson, C., Fullér, R. (2003). “A Fuzzy Approach to Real Option Valuation”. *Fuzzy Sets and Systems* 139 (2) (p. 297–312).

Cherubini, U., Della Lunga, G. (2001) “Fuzzy Value-at-risk”. *Economic Noters by Banca Monte dei Paschi di Siena Spa* 30 (2) (p. 293-312).

Chiou, K.K.; Tzeng, G.H., Cheng, D.C. (2005) “Evaluating Sustainable-Shing Development Strategies Using Fuzzy MCDM Approach”. *Omega* 33 (3) (p. 223-234).

Collan, M., Liu, S. (2003). “Fuzzy Logic and Intelligent Agents: Towards the Next Step of Capital Budgeting Decision Support”. *Industrial Management &Data Systems* 103 (6) (p. 410-422).

Copelang T., Antikarov, V. (2001) *Real Options – A Practitioner’s Guide.* TEXERE Publishing Limited.

Dubois, H., Prade, D. (1988), *Possibility Theory*, Plenum Press, New York.

Fichman, R.; Keil, M., Tiwana, A. (2005). “Beyond Valuation: ‘Options Thinking’ in IT Project Management”. *California Management Review* 47 (2) (p. 74-96).

Fuente, de la, G. (1999). Las Opciones Reales en la Decisión de Inversión. Propuesta y Aplicación de un Modelo de Valoración al Caso de una Multinacional Española. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Garavelli, A.C., Gorgoglione, M., Scozzi, B. (1999). “Fuzzy Logic to Improve the Robustness of Decision Support Systems under Uncertainty”. *Computers & Industrial Engineering* 37 (2) (p.477-480).

Geske, R. (1979). “The Valuation of Compound Options”. *Journal of Financial Economics*, 7 (1) (p. 63-81).

Herath, H. S. B.; Jahera, J., Park, C. S. (2001) “Deciding Which R&D Project to Fund”. *Corporate Finance* 5 (5) (p. 33-45).

Herath, H. S. B., Park, C. S. (2002) “Multi-Stage Capital Investment Opportunities as Compound Real Options”. *The Engineering Economist* 47(1) (p. 1-27).

Janney, J.J., Dess, G.G. (2004). “Can Real-Options Analysis Improve Decision-Making? Promises and Pitfalls”. *Academy of Management Executive* 18 (4), (p. 60-75).

Kauffman, A., Gil-Aluja, J. (1990), *Las Matemáticas del azar y de la incertidumbre,* Centro de Estudios Ramon Areces, Madrid.

Lin, C. T., Chen C. T. (2004) “A Fuzzy-Logic-Based Approach for New Product Go/NoGo Decision at the Front End”. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part A: Systems and Humans* 34 (1) (p. 132-142).

Meier H., Christofides N., Salkin G. (2001). “Capital Budgeting under Uncertainty - An Integrated Approach using Contingent Claims Analysis and Integer Programming“. *Operations Research* 49 (2) (p. 196-206).

Muzzioli, S., Torricelli,C. (2004). “A Multiperiod Binomial Model for Pricing Options in a Vague World”. *Journal of Economic Dynamics and Control* 28 (5) (p. 861 – 887).

Myers, S.C. (1977). “Determinants of Corporate Borrowing”. *Journal of Financial Economics* 5 (2) (p. 147–175).

Newton, D., Paxson, D. A.,Widdicks, M (2004). “Real R&D Options”. *International Journal of Management Reviews* 5/6 (2) (p. 113-130).

Shapiro, A.F. (2004). “Fuzzy Logic in Insurance”. *Insurance: Mathematics and Economics* 35 (2) (p. 399-424).

Trigeorgis, L. (1991) “A Log-Transformed Binomial Numerical Analysis Method for Valuing Complex Multioption Investments”. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26 (3) (p. 309–326).

Trigeorgis, L. (1993) “The Nature of Option Interactions and the Valuation of Investments with Multiple Real Options”. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28 (1) (p. 1–20).

Trigeorgis, L. (1996), *Real Options, Managerial flexibility and strategy in resource allocation*, The MIT Press, London.

APÉNDICE

Para determinar el tipo de número borroso de las probabilidades riesgo neutrales debemos de calcular la primera y segunda derivadas.

Primero debemos recordar que: $d_1 < d_2 < d_3 < 1 + r < u_1 < u_2 < u_3$, $0 < \underline{p_d} < \overline{p_d} < 1$, $0 < \underline{p_u} < \overline{p_u} < 1$

Para simplificar los cálculos definimos a:

$$\underline{p_u} = \frac{(1+r) - d_3 + \alpha(d_3 - d_2)}{u_3 - d_3 - \alpha(u_3 - u_2 - d_3 + d_2)} = \frac{N}{D} \in [0,1] \Rightarrow N \le D$$

Demonstración:

$$\underline{N - D = (1+r) - d_3 + \alpha(d_3 - d_2) - [u_3 - d_3 - \alpha(u_3 - u_2 - d_3 + d_2)]} = \underbrace{(1+r) - u_3}_{>0} + \underbrace{\alpha}_{\ge 0}\underbrace{(u_3 - u_2)}_{>0} > 0$$

$$\frac{\partial \underline{p_u}}{\partial \alpha} = \frac{(d_3 - d_2)(D - N) + N(u_3 - u_2)}{D^2} > 0$$. Siempre creciente

$\frac{\partial^2 \underline{p_u}}{\partial \alpha^2} = 2\underbrace{\frac{(d_3 - d_2)(D - N) + N(u_3 - u_2)}{D^2}}_{>0}\frac{(u_3 - u_2 - d_3 + d_2)}{D}$. El signo depende de $u_3 - u_2 - d_3 + d_2$, en particular depende de $(u_3 - u_2)$ vs $(d_3 - d_2)$

$$\overline{p_u} = \frac{(1+r) - d_1 - \alpha(d_2 - d_1)}{u_1 - d_1 + \alpha(u_2 - u_1 - d_2 + d_1)} = \frac{P}{Q}$$

$\frac{\partial \overline{p_u}}{\partial \alpha} = \frac{-(d_2 - d_1)(Q - P) - P(u_2 - u_1)}{Q^2} < 0$. Siempre decreciente.

$\frac{\partial^2 \overline{p_u}}{\partial \alpha^2} = 2\underbrace{\frac{-(d_2 - d_1)(Q - P) - P(u_2 - u_1)}{Q^2}}_{<0}\frac{(u_2 - u_1 - d_2 + d_1)}{Q}$ El signo depende de $u_2 - u_1 - d_2 + d_1$, en particular depende de $(u_2 - u_1)$ vs $(d_2 - d\ )$

$$\underline{p_d} = \frac{u_1 + \alpha(u_2 - u_1) - (1+r)}{u_1 - d_1 + \alpha(u_2 - u_1 - d_2 + d_1)} = \frac{R}{S}$$

$\frac{\partial \underline{p_d}}{\partial \alpha} = \frac{(u_2 - u_1)(S - R) + R(d_2 - d_1)}{S^2} > 0$. Siempre creciente.

$\frac{\partial^2 \underline{p_d}}{\partial \alpha^2} = -2\underbrace{\frac{(u_2 - u_1)(S - R) + R(d_2 - d_1)}{S^2}}_{<0}\frac{(u_2 - u_1 - d_2 + d_1)}{S}$. El signo depende de $u_2 - u_1 - d_2 + d_1$, en particular depende de $(u_2 - u_1)$ vs $(d_2 - d_1)$

$$\overline{p_d} = \frac{u_3 - \alpha(u_3 - u_2) - (1+r)}{u_3 - d_3 - \alpha(u_3 - u_2 - d_3 + d_2)} = \frac{T}{Z}$$

$$\frac{\partial \overline{p_d}}{\partial \alpha} = \frac{-(u_3 - u_2)(Z - T) - T(u_3 - u_2)}{Z^2} < 0$$. Siempre decreciente.

$$\frac{\partial^2 \overline{p_u}}{\partial \alpha^2} = -2\underbrace{\frac{-(u_3 - u_2)(Z - T) - T(u_3 - u_2)}{Z^2}}_{<0}\frac{(u_3 - u_2 - d_3 + d_2)}{Q}$$ El signo depende de

$u_3 - u_2 - d_3 + d_2$, en particular depende de $(u_3 - u_2)$ vs $(d_3 - d_2)$

En resumen:

$$\underline{p_u} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p_u}{\partial \alpha} > 0 \\ \dfrac{\partial^2 p_u}{\partial \alpha^2} \begin{cases} > 0 \quad \text{(convexo) si} \quad u_3 - u_2 > d_3 - d_2 \\ < 0 \quad \text{(concavo) si} \quad u_3 - u_2 < d_3 - d_2 \\ = 0 \quad \text{(lineal) si} \quad u_3 - u_2 = d_3 - d_2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\overline{p_u} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p_u}{\partial \alpha} < 0 \\ \dfrac{\partial^2 p_u}{\partial \alpha^2} \begin{cases} > 0 \quad \text{(convexo) si} \quad u_2 - u_1 > d_2 - d_1 \\ < 0 \quad \text{(concavo) si} \quad u_2 - u_1 < d_2 - d_1 \\ = 0 \quad \text{(lineal) si} \quad u_2 - u_1 = d_2 - d_1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\underline{p_d} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p_d}{\partial \alpha} > 0 \\ \dfrac{\partial^2 p_u}{\partial \alpha^2} \begin{cases} < 0 \quad \text{(convexo) si} \quad u_3 - u_2 > d_3 - d_2 \\ > 0 \quad \text{(concavo) si} \quad u_3 - u_2 < d_3 - d_2 \\ = 0 \quad \text{(lineal) si} \quad u_3 - u_2 = d_3 - d_2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\overline{p_d} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p_u}{\partial \alpha} < 0 \\ \dfrac{\partial^2 p_u}{\partial \alpha^2} \begin{cases} < 0 \quad \text{(convexo) si} \quad u_2 - u_1 > d_2 - d_1 \\ > 0 \quad \text{(concavo) si} \quad u_2 - u_1 < d_2 - d_1 \\ = 0 \quad \text{(lineal) si} \quad u_2 - u_1 = d_2 - d_1 \end{cases} \end{cases}$$