¿CÓMO Y CUÁNDO ABORDAR LA DIDÁCTICA DE LAS OPERACIONES DE SUMA Y RESTA?

CATALINA MARÍA FERNÁNDEZ ESCALONA

En este artículo veremos que el origen de las operaciones de suma y resta en el niño está supeditado a las acciones de añadir y quitar, que se desarrollan en un proceso de construcción mental de los esquemas lógicos-matemáticos de transformaciones de cantidades discretas y el esquema piagetiano parte-todo. Estas operaciones son fundamentales en todas las construcciones matemáticas de la aritmética, siendo objeto de estudio de numerosas investigaciones en psicología infantil y educación matemática.

Nuestro trabajo es innovador en el modo de abordar la suma y la resta en Educación Infantil. Se trata de indagar en los esquemas lógicos-matemáticos subyacentes a la construcción de estas operaciones aritméticas por parte del niño pequeño, para llegar a la cuantificación de las acciones de añadir y quitar, con el consiguiente establecimiento de relaciones numéricas y conceptualización de las operaciones. Todo ello contribuirá a una enseñanza de calidad, puesto que se parte de las capacidades reales de los escolares y de las situaciones cotidianas que conllevan transformaciones cuantitativas e inclusión de clases.

Palabras clave: *Número, Aritmética, Sumar, Restar, Añadir, Quitar, Transformaciones aritméticas, Parte-Todo, Cuantificación.*

Introducción

El número expresa determinadas características del mundo real, en particular cantidad, orden y medida. Existen distintas acciones que indican una serie de transformaciones: comparaciones, establecimiento de relaciones, etc. Todas ellas son acciones en el mundo físico pero también desde un punto de vista lógico-matemático, y tienen una expresión simbólica que corresponde a las operaciones matemáticas básicas. De hecho, el concepto de número es un concepto operatorio y sin las acciones no tendría sentido (Bermejo, 1990; Brannon, 2002; Brown, 1978; Castro, Rico y Castro, 1987; Fernández, 2001a y 2003a y Piaget y Szeminska, 1982).

La tarea de la aritmética es llegar a la simbolización y formalización de las operaciones matemáticas partiendo de las acciones físicas; dicha tarea implica: abstraer las diferentes relaciones y transformaciones que ocurren, los procesos análogos, diferencias, reversibilidad, etc. Según las etapas de aprendizaje de las matemáticas (Dienes, 1970 y 1981; Mialaret, 1984), tenemos que el paso de las acciones a la simbolización se corresponde con las etapas de acción efectiva, acción acompañada de lenguaje, acciones simples y traducción gráfica; todas ellas previas a

Fecha de recepción: 10-11-06 • Fecha de aceptación: 06-02-07

una formalización y simbolización, encaminadas a la conceptualización y estructuración de la operación (Cohen y Marks 2002; Greco, 1960; Kobayashi, Hiraki, Mugitani y Hasegawa, 2004). Para su comprensión y manejo es necesario que se trabajen una serie de hechos, de resultados y unas técnicas o destrezas que nos permitan calcular cualquier operación, todo ello muy ligado a una estructuración y simbolización de los conjuntos numéricos (DeSoto, 2004; Piaget, 1961; Schwartz 1995; Sophian, 1995).

Las técnicas que nos permiten calcular los resultados de las operaciones son los algoritmos. Éstos, junto con la simbolización, son procesos importantes, pero hay que diferenciarlos de la operación en sí. Un algoritmo es una serie finita de reglas a aplicar en un determinado orden a un número finito de datos, para llegar con certeza, es decir, sin indeterminación ni ambigüedades, en un número finito de etapas a cierto resultado, y esto independientemente de los datos. Por tanto, no resuelve un problema único sino toda una clase de problemas que no difieren más que por los datos, pero que están gobernados por las mismas prescripciones.

Finalmente aparecen las aplicaciones de las operaciones: la resolución de problemas, que es una forma general de pensamiento y se da a lo largo de todas las etapas anteriores.

En terminología piagetiana, podemos considerar dos clases de transformaciones: aquellas que cambian la cantidad y son las transformaciones cuantitativas, frente a otras que la dejan invariante y son las transformaciones cualitativas. Cuando las cantidades que se están tratando son cantidades discretas, *versus* cantidades continuas, las transformaciones cuantitativas en cuestión tienen un reflejo en las operaciones aritméticas (Piaget e Inhelder, 1976; Piaget y Szeminska, 1982).

Existen acciones sobre los objetos como: reunir, separar, reiterar o repartir, que tienen una traducción simbólica a través de las operaciones numéricas. Los niños pequeños (menores de tres años) son capaces de actuar sobre los objetos reales (conchas, piedras, lápices, hojas, etc.), manipulando los mismos y realizando acciones que más tarde concluirán en la suma y la resta.

En el periodo que abarca la Educación Infantil se dan los primeros encuentros del niño con la adición y la sustracción, puesto que las acciones y transformaciones que dan lugar a estas dos operaciones son elementales y aparecen simultáneamente con el concepto de número (Aubrey, 1993; Fernández, 2003 b; Fischer, 1990; Fuson, 1988; Geary, 1996; Gifford y Wilson, 1995; Ginsburg, H. y Pappas, S. 2004; Naito, M. y Miura, H., 2001; Zur, O. y Gelman, R., 2004). Todo ello hace que la suma y la resta formen parte del currículo de este período educativo. La forma de trabajar estas operaciones será a través de acciones concretas. Partiendo de las acciones, analizaremos el paso a la cuantificación de las mismas y, por tanto, el paso a las operaciones.

El punto de partida es la acción real

Los niños pequeños (menores de tres años) son capaces de actuar sobre los objetos reales (conchas, piedras, lápices, hojas, etc.), manipulando los mismos y realizando acciones como añadir-quitar, reunir-separar, que más tarde concluirán en la suma y la resta. El siguiente paso es conseguir que los niños relaten las acciones que realizan, así van contando la acción al mismo tiempo que la ejecutan. Con ello se consigue que: se adquieran términos básicos equivalentes a reunir-añadir, quitar-separar, diferencien unas acciones de otras, tomen conciencia del esquema de las transformaciones, sepan diferenciar las partes de un todo, etc., y, en definitiva, se den cuenta de todos los aspectos que se ponen en funcionamiento al realizar una operación aritmética (Fernández, 1997, 1999, 2001b; Vilette, 2002; Wakeley, Rivera y Langer, 2000).

En esta camino ascendente hacia la abstracción, tenemos que considerar el momento en el que los niños son capaces de relatar una acción que sólo existe en su mente, que no se está realizando de forma efectiva, ya no se actúa sobre objetos concretos, es la *conducta del relato* (Mialaret, 1984). El niño, en esta etapa, puede pensar y contar esto: «Tenía 3 caramelos, me he comido 1 y ahora tengo 2»; lo puede hacer con ayuda de sus dedos o simplemente pensándolo; representa un grado de abstracción mayor, pues ya no se tiene que actuar directamente sobre los objetos. En esta etapa puede, incluso, usar los términos «más» y «menos» siempre que tengan sentido en el contexto.

Este comportamiento del relato, que se aplica a las situaciones vividas por el niño y recuerda exactamente elementos concretos de situaciones reales, puede ser completado en forma de abstracción, mediante una traducción alejada de la realidad. Aquí se puede introducir una esquematización de la realidad utilizando un material no figurativo. La importancia de las acciones concretas va a perder su originalidad y contingencia.

Si continuamos sobre el camino de la esquematización progresiva, de la abstracción creciente, haremos traducir todas las situaciones vividas por el niño a otro lenguaje: el del grafismo. Podemos ayudar al niño a construir sus analogías, haciéndole dibujar esquemáticamente las situaciones. Este lenguaje gráfico puede ir desde el dibujo más completo hasta la traducción de esquemas simplificados, pero es muy importante que se den todos los pasos presentes en la acción concreta y que, posteriormente, tendrán un significado en la traducción simbólica.

Finalmente, los niños son capaces de comprender que una traducción simbólica del tipo 3+2 expresa una acción real, además, por conteo ascendente, pueden resolver problemas abstractos sin base concreta como por ejemplo: «¿Cuántos son 3 más 2?».

Básicamente, todas las etapas señaladas se pueden resumir en tres: partir de lo concreto, representación gráfica de esa realidad concreta y, por último, llegar a la representación simbólica. Basándonos en estas ideas, podemos encontrar trabajos de algunos investigadores en los que se muestran que incluso los niños de tres años son capaces de resolver problemas de suma y resta, siempre que se parta de lo concreto, es decir, de una situación real y efectiva.

En esta línea, Starkey y Gelman (1982) realizaron un trabajo según el cual el 73% de los niños de tres años tuvieron éxito en la siguiente tarea: el experimentador empezó pidiéndole al niño que determinase cuántas moneditas había en su mano. Seguidamente, cerraba la mano e iba depositando nuevas monedas que iba contando en voz alta. Entonces se le preguntó al niño que cuántas monedas había en total en su mano. Debemos señalar que el niño, simultáneamente a esta tarea, disponía de una hilera de fichas que podía contar fácilmente, y podía recurrir a ellas para hacer una representación «gráfica» de la realidad. Decir, por último, que el 73% de éxito se daba cuando se trataba de 2+1, pero ese porcentaje bajaba cuando se trataban números como: 5+1, 14+1, y el éxito era aun menor cuando se plantea con estos otros números: 4+2, 6+2, etcétera.

Hughes (1981) obtuvo resultados similares trabajando con una muestra de 60 niños de Edimburgo, con edades comprendidas entre los tres y cinco años. La tarea que propone este investigador se presenta de cuatro formas diferentes para cada par de números, que van desde la forma más concreta hasta la más abstracta; y en ella utiliza un material concreto como son cajas y ladrillos. Dicha tarea consiste en lo siguiente:

1. *Caja abierta*. El niño podía observar, simultáneamente, toda la secuencia de la transformación, es decir, podía ver el número de ladrillos que había en la caja (EI), el número de ladrillos que se añadía o quitaba (T), y el número de ladrillos que quedaban finalmente en la caja (EF).
2. *Caja cerrada*. El niño podía ver el estado inicial y final de la transformación, pero la caja

permanecía cerrada cuando se estaba realizando la acción de añadir o quitar ladrillos.
3. *Caja hipotética*. Se retiraba la caja y se proponía un problema verbal, por ejemplo: «Si había un solo ladrillo en la caja y yo meto 2 más, ¿cuántos ladrillos habría en total en la caja?».
4. *Código formal*. Se le pedía al niño que realizase una suma con números abstractos; por ejemplo, «¿cuántos son 2 más 1?».

Como podemos observar, son cuatro formas distintas de presentar la suma y la resta, que va de lo concreto a lo abstracto, pasando por lo que Mialaret llama «conducta del relato», que sería plantear el problema verbalmente a partir de una acción concreta sin que esté ocurriendo la acción; éste es el caso de la caja hipotética.

En el análisis de resultados de la investigación se probó que algunos niños de tres años fueron capaces de resolver problemas de la caja hipotética cuando se trataba de números pequeños como: 1+1, 2-1, 1+2, 3-2, etc., mientras que, como era de esperar, los problemas del código formal resultaron inaccesible para la mayoría de los niños de la muestra y sólo fueron resueltos por 2 niños en el caso de 7-2.

En conclusión, podemos decir que las proporciones de éxito en la resolución de los problemas planteados bajan rápidamente al aumentar el tamaño de los números, aunque sólo haga falta contar, y descienden asimismo al aumentar el nivel de abstracción; pero pone de manifiesto que muchos niños de Educación Infantil son capaces de resolver problemas sencillos de suma y resta aun sin haber recibido enseñanza formal sobre estas operaciones.

Sumar y restar mediante las acciones de añadir y quitar

Es un hecho constatado que los primeros encuentros del niño con la suma y la resta se realizan sin necesidad de una instrucción previa (Canobi, Revé y Pattison, 2003; Carpenter y Moser, 1979; Carpenter, Fennema *et al.*, 1999; Dickson, Brown y Gibson, 1991; Fernández, 2002a). Estos contactos se realizan en un entorno cercano al niño, es por ello por lo que nos planteamos analizar algunas situaciones familiares en las que aparecen las acciones de quitar o añadir y, a partir de ellas, analizar la interiorización de las operaciones aritméticas de suma y resta (Fernández, 2001a y 2001b).

Las acciones de añadir o quitar objetos, a una colección dada, transforman la cantidad. Lo primero que queremos observar en los niños es si realmente ellos se percatan de este hecho en edades tempranas (Fernández, 2001b). En general, los niños de tres años son capaces de observar, e incluso de decir, «hay más» o «hay menos» ante situaciones en las que se transforma la cantidad. Veamos esto en algunas situaciones concretas investigadas en Fernández (2001a). Una de las situaciones familiares trabajadas consistía en lo siguiente: la madre le prepara para desayunar al niño pequeño (de tres años y dos meses) una bandeja con 4 galletas y un vaso de leche. Esta situación se repite día tras día. Después de un tiempo (dos meses), una mañana sólo aparecieron 3 galletas en lugar de las 4 que venían siendo habituales; fue entonces cuando el niño pequeño advirtió que faltaba 1.

Aprovechamos esta situación para presentarle bandejas con galletas, él decía que había 3 (respuesta que daba por subitización). Cuando ya se tenía la certeza de que conocía el estado inicial y que lo podía retener en su memoria (esto ocurría día tras día, preguntándole, varias veces y en distintos momentos, que cuántas galletas había en la bandeja), se realizaba la transformación, que consistía en añadir una y, así, llegamos al estado final, que son 4 galletas en la bandeja; el niño ante esta nueva situación decía que había una más.

Se repiten los ejercicios durante varios días. La madre ponía 2 bandejas con 3 galletas cada una. Él las veía y decía que había lo mismo.

Entonces, en una de las bandejas se añadía una más, y se le preguntaba qué era lo que había pasado, y él decía que se había puesto una. El hecho de poner 2 bandejas con el mismo número era para que tuviese simultáneamente presente el estado inicial y final de la transformación, y con ello se perseguía que el niño se centrase en la acción, en este caso, de añadir una galleta.

No obstante, en su quehacer diario, los niños dan muestra inequívoca de que las acciones de quitar o añadir cambian la cantidad. Así, por ejemplo, si un niño está jugando con cochecitos y en su monólogo dice: «voy a por más», y acto seguido trae 2 coches más, que une a su colección, prueba que este niño es consciente de que la colección de objetos aumenta cuando se añaden nuevos elementos, frente a la acción de separar objetos para obtener más. Asimismo, si alguien le quita algún coche y el niño hace comentarios como éste: «dámelo porque ahora tengo pocos», estaremos ante un caso en el que el niño sabe que, si se quitan objetos de la colección, la cantidad queda modificada por tener menos que antes (Fernández, 2001a y 2001b).

En general encontramos a niños de tres años y seis meses que son capaces de decir «hay más» ante una situación en la que se añaden varios objetos a una colección de 5 elementos como máximo (si ponemos más de 5 objetos, algunos niños de tres años dicen que hay muchos, y cuando añadimos nuevos objetos, sigue habiendo muchos). Análogamente, son capaces de decir «hay menos» cuando la situación se plantea quitando varios objetos de una colección dada.

Además de esto, los niños pequeños son capaces de establecer la relación inversa entre las dos acciones. Saben que si quitamos un objeto de una colección, lo que debemos hacer para tener el mismo número que al principio es añadir 1. Así, por ejemplo, cuando un niño juega con coches, y la madre le quita 1, dice «dame el que me has quitado» (Fernández, 2001a). Incluso, en situaciones en las que el niño tenía los coches dispuestos en los 4 vértices de una mesa cuadrada, se le quitaba 1 y se le preguntaba ¿qué hacemos para tener lo mismo que antes?, él respondía «poner 1 más»; y, aun en un grado de abstracción mayor, si tenía 4 galletas en una bandeja y la madre se comía una, a la vista de que quedaban 3 galletas en la bandeja, le preguntaba que cuántas galletas se había comido y él respondía que una; entonces, ¿qué tenemos que hacer para tener el mismo número de galletas que al principio?, y el niño respondía que poner una.

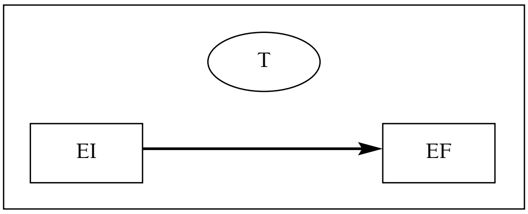
Esta última situación, además de poner de manifiesto la relación inversa entre las acciones de añadir y quitar, indica que los niños de tres años pueden *cuantificar* el cambio cuando la diferencia es de 1. Así, si cambiamos 3 galletas por 2, dicen: «falta una»; pero, si cambiamos 5 por 3, dicen «hay menos». Por lo tanto, los niños pequeños *no cuantifican* el cambio cuando la diferencia entre el estado inicial y el estado final de la transformación aritmética es más de 1 (Fernández, 1998 y 2003b).

Cuantificación de las acciones de añadir y quitar

Para Dickson y otros (1991), el paso previo hacia la cuantificación y, por tanto, el inicio de las operaciones, es el principio de cardinalidad (por ejemplo, la última palabra del recuento es el cardinal del conjunto). Cuando el niño toma conciencia de que el *proceso de recuento* se puede usar para obtener el número de elementos de una colección, estará iniciando el camino adecuado para cuantificar el número de objetos que se añade o se quita a una colección dada; y esto, según los autores citados, se da en la edad promedio de cuatro años y dos meses.

Pero las operaciones de sumar y restar conllevan algo más que el simple recuento de una colección de objetos. Bajo las acciones de añadir y quitar, subyace el esquema de transformaciones de cantidades discretas; cuando se realiza una de estas acciones se tiene que recordar y pensar simultáneamente en: el estado inicial (lo que se tenía), la transformación (acciones de quitar o añadir) y el estado final (lo que se tiene ahora) (Piaget e Inhelder 1956; Sastre y Moreno, 1980; Vergnaud, 1985); de manera esquemática tenemos la figura 1.

FIGURA 1. El esquema de las transformaciones



Se da la circunstancia de que las tres secuencias de la transformación no se dan al mismo tiempo, por eso, en la suma y en la resta el niño tiene que hacer algo más que contar una colección de objetos. Así, por ejemplo, se le presentan al niño 3 caramelos, se guardan en una bolsa y le damos 2 caramelos más en la mano; el niño que, efectivamente, tiene adquirido el principio de cardinalidad, dice que hay 3 caramelos en la bolsa y que, después, tiene 2 caramelos más en la mano; pero, si no utiliza el esquema de transformación, no es capaz de llegar a la operación de sumar, que requiere establecer una *relación numérica* entre los 3 caramelos de la bolsa y los 2 que tiene en la mano.

En otras situaciones, en lugar del esquema de transformaciones, aparece el esquema parte-parte-todo, en el que el niño tiene que averiguar el número de elementos de un conjunto (todo), dando como datos los cardinales de dos subconjuntos (parte-parte), cuya unión es el conjunto dado. En este caso, al igual que en el anterior, se requiere establecer una relación numérica entre los dos cardinales dados para alcanzar la solución.

¿Cómo establece el niño este tipo de relaciones numéricas y, en definitiva, llega a cuantificar la acción? Un indicio de que el niño empieza a establecer relaciones numéricas es cuando usa estrategias de recuento progresivo para cuantificar la acción (Piaget y Szeminska, 1982). Cuando el niño cuenta a partir de 3, dos unidades más, para determinar el número de caramelos que tiene, está estableciendo la relación que existe entre el cardinal 3 y el cardinal 2, atendiendo a la acción de añadir y, por tanto, está sumando 3 y 2. Otra situación menos evolucionada que la anterior, pero que igualmente da indicios de que el niño está estableciendo relaciones numéricas, es cuando se recurre al recuento completo de la nueva colección, ayudándose de los dedos o de objetos materiales concretos.

En el momento que el niño tiene adquirido el principio de cardinalidad, nuestro esfuerzo irá dirigido a que establezca relaciones numéricas, para ello trabajamos: *el esquema de transformaciones de cantidades discretas y el esquema parte-todo* (Fernández, 1998 y 2003b).

El esquema de transformaciones de cantidades discretas

Ello supone distinguir entre transformaciones que cambian la cantidad de aquellas que no la cambian, y que los niños sean capaces de describir y reconocer las tres partes de una transformación, esto es: Estado Inicial (EI), Transformación (T) y Estado Final (EF). Cuando los niños son capaces de relatar, por ejemplo, situaciones como estas: «Tenía 3 caramelos (EI), tú me has dado 2 (T) y, por eso, tengo 5 caramelos (EF)», será la prueba inequívoca de que están estableciendo relaciones numéricas y que, por tanto, está cuantificando la acción de añadir.

Este tipo de relato lo consiguen los niños a una edad promedio de cuatro años y medio (Dickson, Brown y Gibson, 1991). Debemos señalar que los niños a la hora de describir la transformación anterior presentan fundamentalmente tres actuaciones (Sastre y Moreno 1980); de menor a mayor evolucionadas serían:

1. Se describe una sola secuencia.

   - Estado Inicial (EI): «Antes tenía menos».
   - Estado Final (EF): «Ahora tengo más».
   - Transformación (T): «Me has dado 2».

2. Se describen dos secuencias.

   - Estado Inicial y Estado Final (EI y EF): «Antes tenía menos y ahora tengo más».
   - Transformación y Estado Final (T y EF): «Me has dado 2 y por eso ahora tengo más».
   - Estado Inicial y Transformación (EI y T): «Tenía menos y me has dado 2».

3. Se describe toda la transformación.

   - Estado Inicial, Transformación y Estado Final (EI, T y EF): «Antes tenía menos, tú me has dado 2 y ahora tengo más», o bien: «Tengo más que antes porque tú me has dado 2».

En estas actuaciones se realiza una descripción cualitativa de las transformaciones, los niños saben que la cantidad ha variado, que el estado final supone una modificación de la cantidad de caramelos respecto del estado inicial, y esto constituye un primer paso para llegar a cuantificar la acción.

Una vez que los niños son capaces de realizar esas descripciones, el siguiente paso sería conseguir que ellos pudieran describir todo el proceso de la transformación con la exigencia de que deben indicar cantidades concretas. Ante esta tarea se vuelven a presentar las mismas tres actuaciones de la siguiente forma:

1. Se describe una sola secuencia.

   - Estado Inicial (EI): «Antes tenía 3».
   - Estado Final (EF): «Ahora tengo 5».
   - Transformación (T): «Me has dado 2».

2. Se describen dos secuencias.

   - Estado Inicial y Estado Final (EI y EF): «Antes tenía 3 y ahora tengo 5».
   - Transformación y Estado Final (T y EF): «Tengo 5 porque tú me has dado 2».
   - Estado Inicial y Transformación (EI y T): «Tenía 3 y me has dado 2».

3. Se describe toda la transformación.

Estado Inicial, Transformación y Estado Final (EI, T y EF): «Tenía 3 y ahora tengo 5 porque me has dado 2».

Esta última respuesta es la más evolucionada y supone el éxito operatorio en el sentido piagetiano (Piaget y Szeminska, 1982). En ella se llega a interiorizar de tal forma la acción que se consiguen expresar los estados mediante números, lo cual indica el paso de las operaciones en sentido físico a las operaciones aritméticas.

Para pasar de las descripciones cualitativas a las cuantitativas debemos trabajar con los niños estos interrogantes: ¿cuántos tenías al principio?, ¿cuántos tienes ahora?, ¿cuántos te he dado?, ¿cuánto más tienes ahora que antes?, con el fin de que los niños se percaten de las tres secuencias de la transformación y establezcan relaciones numéricas.

Referente a la acción de quitar podemos seguir los mismos pasos. Debemos conseguir que los niños describan toda la secuencia de la transformación donde, ahora, la acción en lugar de «añadir» es «quitar». Trabajamos, por tanto, situaciones como éstas: «Nuria tenía 5 caramelos, se come 2 y ahora tiene 3 caramelos».

En las descripciones cualitativas se da una situación análoga a la anterior, en este sentido los niños dicen: «Antes tenía más y ahora tengo menos», o bien: «Me he comido 2», o «Tengo menos porque me he comido 2». A la hora de hacer una descripción cuantitativa, hay niños que establecen correctamente la relación entre 3 y 5 cuando se trata de añadir 2 y no así llegar del 5 al 3 quitando 2, y es que parece ser que en un principio el recuento progresivo es más fácil que el recuento regresivo (Kamii, 1982 y 1986).

El esquema parte-todo

Queremos detenernos en la capacidad que tiene el niño para percibir que una colección de objetos puede ser simultáneamente parte de otra colección.

Previamente a la cuantificación debemos trabajar situaciones donde se ponga de manifiesto la relación parte-todo, como las del tipo: ¿qué hay, más caramelos de fresa o caramelos?; ¿qué hay, más coches rojos o coches?; ¿qué hay, más muñecas o juguetes?; etc. Una vez hecho esto trataremos la cuantificación y plantearemos cuestiones del tipo: ¿cuántos caramelos hay en la bolsa, si en total tenemos 5 y en la mesa hay 2? Los niños que ya saben que hay más caramelos que caramelos en la bolsa, y que hay 2 caramelos en la mesa pueden «proseguir la cuenta» contando a partir de 2 el resto de caramelos. Sin embargo, el niño puede actuar contándolo todo, y esto puede ser debido, entre otras causas, a que es incapaz de coordinar la relación parte-todo entre los conjuntos, y entonces convierte mentalmente todos los elementos en «1», es decir, convierte 2+3 en 1+1+1+1+1 (Kamii, 1986).

Los problemas con enunciado verbal para la didáctica de la suma y la resta

Las investigaciones de Carpenter, Hiebert y Moser (1979), Carpenter y Moser (1979 y 1982) y Carpenter, Fennema *et al*. (1999) demostraron que no es necesario recibir una enseñanza formal sobre la resolución de problemas de cálculo en forma escrita para poder resolver problemas de sumas con enunciado verbal. Así, estos autores hallaron que la mayoría de niños de seis años respondían correctamente al siguiente tipo de preguntas:

- *Para la suma:*
  - — Fred tiene 3 canicas, su padre le da 8 canicas más. ¿Cuántas canicas tiene Fred en total?
  - — Algunos niños estaban patinando, 4 eran niños y 7 eran niñas. ¿Cuántos niños estaban patinando en total?
- *Para la resta:*
  - — Fred tiene 11 caramelos. Da 7 a Linda. ¿Cuántos caramelos le quedan a Fred? Brian tiene 14 flores. 8 de las flores son rojas y las restantes son amarillas. ¿Cuántas flores amarillas tiene Brian?

Como hemos indicado anteriormente estos problemas lo podían resolver niños que aún no habían recibido enseñanza formal sobre la aritmética escrita, pero sí es cierto que para que pudieran tener éxito en las respuestas, los números que aparecían debían cumplir una serie de requisitos previos como son: los sumandos eran mayores que 2 y menores que 10, su suma era mayor que 10 y menor que 16, la diferencia entre los 2 sumandos era mayor que 1.

Un estudio similar realizado por Ibarra y Lindvall (1982) puso de manifiesto que niños entre cuatro y cinco años daban respuestas correctas a problemas similares cuando los números que aparecían cumplían la condición de que las sumas eran inferiores a 7.

Para Kamii (1986), los problemas extraídos de la vida real, como saber cuántas preguntas faltan por hacer cuando se han preguntado 8 de un total de 10, o saber cuántos caramelos ha recibido más que su hermano si él tiene 5 y su hermano tiene 3, son relativamente fáciles para los niños que no han recibido ninguna instrucción.

Esta autora defiende que los niños construyen relaciones numéricas abstractas como 5-3=2 a partir de sus ideas sobre contenidos de la vida diaria, por ello insiste en proponer a los niños situaciones naturales en las que se tengan que establecer esas relaciones numéricas, como por ejemplo: tener que comer 2 zanahorias más antes de levantarse de la mesa, recibir un regalo más que su hermano, considerar cuántos chicles quedarán en un paquete después de haber consumido 1 y haberle dado otro a un compañero, etcétera.

A raíz de éstas y otras investigaciones (Hatano, 1982; Starkey y Gelman, 1982; Steffe y Johnson, 1971; Zener, 1994) podemos concluir que los problemas con enunciado verbal son fácilmente solucionados por los niños sin que haga falta una enseñanza formal.

Fundamentación metodológica y análisis de datos

Si nos centramos en las nociones básicas del número y en concreto en la aritmética escolar, estaremos trabajando en la línea de investigación Pensamiento Numérico (Fernández, 2002a; Segovia, 1995).

Con la pretensión de describir el conocimiento de las operaciones de suma y resta en niños de Educación Infantil, realizamos un estudio empírico cualitativo en dos ámbitos: familiar y escolar, este último basado en entrevistas clínicas.

El problema planteado es un estudio que pretende explicar y describir el paso de la acción real a la simbolización de las operaciones de suma y resta en niños de tres a seis años.

Mediante la revisión de investigaciones en niños pequeños sobre la suma y la resta (Ginsburg y Pappas, 2004; Hughes, 1981; McCrink y Wynn, 2004; Naito y Miura, 2001; Robinson, 2001; Starkey y Gelman, 1982; Zur y Gelman, 2004) podemos asegurar que existen tareas apropiadas en las que estas operaciones parten de las acciones de añadir y quitar, siendo ésta la forma más adecuada para tratar los inicios de la aritmética en Educación Infantil.

Debemos buscar pruebas adecuadas para alumnos de Educación Infantil que conlleven distintos procedimientos inferenciales sobre las acciones de añadir y quitar que, a su vez, sirvan como punto de partida para la cuantificación de dichas acciones y culminen en las operaciones de suma y resta. Es posible determinar pruebas para niños de tres a seis años que formen parte de un estudio experimental cualitativo, constituidas por una serie de tareas que podemos ordenar de menor a mayor dificultad dependiendo de los esquemas lógicos-matemáticos implicados en cada una de ellas.

El estudio experimental cualitativo consta de dos partes. La primera se da en el ámbito familiar y la segunda en el escolar. En el primero se caracteriza y analiza los resultados de la tarea «acción de añadir y quitar en niños de tres años» para averiguar si se percatan, de manera espontánea, de que estas acciones cambian la cantidad o no, y en caso afirmativo ver hasta dónde cuantifican la acción. En el segundo, ámbito escolar, se caracterizan y analizan los resultados de tres tareas (añadir y quitar, acciones inversas o recíprocas, esquema de transformaciones y parte-parte-todo), tratadas mediante entrevistas clínicas, para dar significado a los comportamientos generales y a las situaciones singulares encontradas, así como a los procedimientos, destrezas y estrategias en niños de tres a seis años para explicar las relaciones numéricas en estos escolares.

Las soluciones dadas por los niños de tres años ante la tarea del ámbito familiar manifiesta competencias en el esquema cualitativo de transformaciones aditivas que son esquemas lógicos matemáticos subyacentes en las operaciones de suma y resta.

Las respuestas a las tareas presentadas en las entrevistas, ámbito escolar, denotan la existencia de regularidades y la posibilidad de clasificarlas, con una evidente evolución de las distintas categorías. Ello nos ha permitido secuenciar el comportamiento de los niños desde el nivel menos evolucionado, en el que los niños únicamente se percatan de que «hay más» o «hay menos» al añadir o quitar elementos en colecciones de menos de cinco objetos, hasta el nivel más evolucionado en el que los niños son capaces de establecer relaciones numéricas al tener adquirido el principio de cardinalidad e interiorizado el esquema de transformaciones.

Debemos indicar que el estudio empírico cualitativo se realizó en el colegio público Juan Martín Pinzón de Ronda. Para la parte de ámbito familiar se reunió a las madres de los niños de tres años y de los 25 niños fueron 18 madres las que participaron en el estudio. Por otra parte, las entrevistas se realizaron a 24 escolares de tres, cuatro y cinco años. Se hicieron a puerta cerrada en un despacho preparado a tal efecto en el centro. Cada entrevista tuvo una duración que osciló entre 20 y 30 minutos.

Para la observación de los comportamientos individuales es necesario diseñar una prueba sobre la base de un material concreto que presenten las características lógico-matemáticas que queremos que los escolares manifiesten. La tarea del ámbito familiar consta de tres fases:

- *Fase 1 (F1)*. El desayuno del niño va a consistir en un vaso de leche y cuatro galletas que la madre va a presentar en una bandeja todos los días durante dos meses (las galletas se disponen en hilera). Después de este tiempo en la bandeja sólo van aparecer tres galletas y el vaso de leche.
- *Fase 2 (F2)*. Durante cinco días la madre prepara dos bandejas idénticas con tres galletas cada una y le pregunta al niño que cuántas galletas hay en su bandeja. A continuación añade una galleta y pregunta por lo que ha ocurrido y por el número de galletas que ha añadido.
- *Fase 3 (F3)*. La madre presenta una bandeja con cuatro galletas y se come una, entonces pregunta al niño que cuántas galletas se había comido y qué podían hacer para tener el mismo número de galletas que al principio.

Respecto a cada una de las fases señaladas se codifican y categorizan las actuaciones de los niños de esta forma:

Según la codificación de respuestas observamos que en cualquier categoría, con la escala de 0 a 3, podemos medir de la menos a la más evolucionada según el orden natural.

En la tabla 2 siguiente se recogen las respuestas de cada uno de los niños según las fases y codificación consideradas.

Para la interpretación de dicha tabla debemos añadir las siguientes precisiones:

- Cada casilla de la primera columna indica las iniciales del nombre del niño cuyas actuaciones se registran en esa misma fila. Los números que aparecen a continuación de las iniciales expresan la edad, indicando, el primero de ellos, los años y el segundo los meses.
- Cada casilla de la primera fila indica una categoría de respuesta. Las respuestas se agrupan según los bloques establecidos en la codificación, cuando se pasa de un bloque a otro en la tabla, la línea de separación entre columnas queda marcada por el grosor de la misma.

Teniendo en cuenta que la prueba, en realidad, se lleva a cabo con 15 niños, tenemos un 60% de niños con «éxito operatorio», es decir, están en F13, F23 y F33, lo que significa que los niños de tres años presentan competencias en los esquemas lógicos-matemáticos subyacentes a

TABLA 1. Codificación y categorización de actuaciones en las distintas fases del estudio cualitativo en el ámbito familiar

F1	F10	No sabe o no contesta (nota: este registro se da cuando las madres abandonan el estudio)
	F11	El niño no responde de manera espontánea y cuando la madre le enseña una bandeja con cuatro galletas como venía siendo habitual, lo hace al azar
	F12	Contestan correctamente pero no de manera espontánea
	F13	Contestan correctamente de manera espontánea
F2	F20	No sabe o no contesta (nota: este registro se da cuando las madres abandonan el estudio)
	F21	Al azar
	F22	El niño sabe cuántas galletas hay en la bandeja y que al añadir tiene más pero no cuantifica la transformación, ni el estado final
	F23	Cuantifica la acción cuando se añade una
F3	F30	No sabe o no contesta (nota: este registro se da cuando las madres abandonan el estudio)
	F31	Al azar, o bien sabe que si se come una galleta tiene menos, pero no cuantifica
	F32	El niño cuantifica la acción de quitar cuando se trata de una pero no reestablece la inversa
	F33	El niño cuantifica la acción de quitar cuando se trata de una y reestablece la inversa

TABLA 2. Distribución de respuestas de cada niño en cada una de las fases del estudio empírico cualitativo en al ámbito familiar

	F10	F11	F12	F13	F20	F21	F22	F23	F30	F31	F32	F33
Li. 3,2				■			■				■	
Ai. 3,2				■				■				■
Si. 3,4		■			■				■			
In. 3,4				■				■				■
Ca. 3,4			■				■			■		
Pat. 3,6	■				■				■			
Pab. 3,6			■				■			■		
La. 3,6				■			■				■	
Da. 3,7			■				■			■		
En. 3,7	■				■				■			
Sa. 3,7				■				■				■
La. 3,8				■				■			■	
Ma 3,8				■				■				
Mar. 3,9				■				■				■
Lou. 3,9				■				■				■
Ir. 3,9				■				■				■
Mi. 3,10				■				■				■
Rur. 3,11				■				■				■

la suma y la resta, en este sentido, que son capaces de percatarse que las acciones de añadir y quitar cambian la cantidad, cuantifican el cambio cuando se trata de una unidad y reconocen dichas acciones como inversas o recíprocas.

Por otra parte, y análogamente, el estudio empírico cualitativo en el ámbito escolar consta de tres tareas bien diferenciadas:

- *Añadir y quitar*. Al niño se le muestran dos bandejas idénticas con un número de galletas, a continuación se añaden galletas a una de ellas y se la pregunta: ¿cuál tiene más y por qué? Análogamente se plantean las mismas cuestiones pero con la acción de quitar.
- *Acciones inversas o recíprocas*. El niño debe reestablecer la cantidad inicial de galletas una vez que la experimentadora ha quitado una cantidad dada.
- *Cuantificación de la acción. Esquemas de transformaciones*. La experimentadora realiza la siguiente acción real delante del niño: «Tengo 3 galletas en esta bandeja, cojo 2 de este paquete y las añado a las de la bandeja, entonces ahora tengo 5 galletas en la bandeja». Se retira la bandeja y se le pide al niño que relate todo lo que ha ocurrido.

Las respuestas se codifican de la siguiente manera:

- *AQ*. Categorías de respuestas relativas a la realización de la primera tarea: acciones de añadir y quitar.
- *R(A-Q)*. Es el bloque de respuestas correspondiente a las acciones inversas o recíprocas.
- *CT*. Son las respuestas relativas a la cuantificación de las acciones mediante el esquema de transformaciones.

Respecto a cada una de las tareas señaladas realizamos la categorización de respuestas expuesta en la tabla 3.

Al igual que hicimos en el ámbito familiar, con la escala de 0 a 3, podemos medir de la menos a la más evolucionada según el orden natural.

TABLA 3. Codificación y categorización de respuestas en las distintas tareas en el ámbito escolar

AQ	AQ0	No sabe o no contesta
	AQ1	Al azar
	AQ2	Contestan correctamente cuando el estado inicial es de menos de 5 elementos, estado de duda con más de 5
	AQ3	Cuantifican la acción incluso con más de 5 elementos
R(A-Q)	R(A-Q)0	No sabe o no contesta
	R(A-Q)1	Al azar
	R(A-Q)2	Contestan correctamente cuando el estado inicial es de menos de 5 elementos y la cantidad que se añade y se quita es igual o menor que 2, estado de duda en otros casos
	R(A-Q)3	Cuantifican las acciones recíprocas con más de 5 elementos como estado inicial y la cantidad que se añade o se quita es mayor que 2
CT	CT0	No sabe o no contesta
	CT1	Describe una única secuencia de la transformación
	CT2	Describe dos secuencias de la transformación
	CT3	Describe y cuantifica toda la transformación

En la tabla 4 se recogen las respuestas de cada uno de los niños según las tareas y codificaciones consideradas.

Las respuestas del bloque AQi son más evolucionadas (en la escala de 0 a 3, considerando i=3 como la que más) que las del R(A-Q)i; ocurre lo mismo al comparar las respuestas del bloque R(A-Q)i con CTi. Esto se visualiza en la tabla observando que a medida que nos movemos en los bloques de izquierda a derecha, las casillas señaladas en cada bloque de una misma fila se mueven en sentido contrario o bien permanecen constantes.

El paso del bloque AQ al CT significa: «Realización de la cuantificación de las acciones de añadir y quitar aplicando el esquema de transformaciones de cantidades discretas».

Según podemos observar en la tabla 4, para los niños entrevistados es condición necesaria la realización de las acciones de añadir y quitar para establecer relaciones pero no es condición suficiente. Esto se manifiesta claramente en los niños de cinco años en los que todos responden correctamente a la cuestión AQ y sin embargo no todos están en la categoría de respuesta CT3. Los niños de esta categoría alcanzan el

Tabla 4. Distribución de respuestas de cada niño en cada una de las tareas en el ámbito escolar

	AQ0	AQ1	AQ2	AQ3	R (A-Q)0	R (A-Q)1	R (A-Q)2	R (A-Q)3	CT0	CT1	CT2	CT3
Ma. 3,1	■				■				■			
La.. 3,2	■				■				■			
Mar. 3,3		■			■				■			
Lu. 3,4			■			■			■			
Luc. 3,9			■				■		■			
Ir. 3,9			■				■			■		
Mi. 3,10				■				■				■
Nu. 3,11			■				■			■		
Pa. 4,0				■				■				■
Al. 4,1		■			■				■			
An. 4,3			■				■			■		
Be. 4,6		■			■				■			
Mi. 4,6			■				■			■		
Ra. 4,8			■				■			■		
Sal. 4,11				■			■			■		
Ma. 4,11				■				■				■
Jav. 5,0				■			■				■	
La. 5,2				■				■				■
An. 5,2				■				■				■
Pe. 5,5				■				■				■
Ant. 5,9				■			■			■		
Mar. 5,9				■								■
Par.5,11				■			■			■		
Mab. 5,11				■				■				■

éxito operatorio en las operaciones de suma y resta puesto que si aplican el esquema de transformación es porque establecen relaciones numéricas y cuantifican la acción.

Conclusiones/síntesis

A modo de síntesis, destacamos los siguientes puntos:

- Los niños de tres años son capaces de cuantificar las acciones de añadir y quitar cuando la diferencia entre el estado inicial y final es de 1. Se trata de añadir 1.
- El paso previo hacia la cuantificación es el principio de cardinalidad. Por consiguiente, es necesario trabajar con los niños, mediante situaciones didácticas, (por ejemplo situaciones que conllevan el esquema lógico-matemático deseado) este principio simultáneamente con las acciones de añadir y quitar.
- El proceso de recuento es un indicativo de que se está iniciando el camino para cuantificar las acciones de añadir y quitar. Se da a la edad promedio de cuatro años y dos meses.
- Los esquemas lógicos-matemáticos que subyacen a la suma y la resta son el esquema de transformaciones y el parte-todo. Para que se den estas operaciones deben presentarse simultáneamente estos esquemas lógicos matemáticos y la cuantificación. Dicha simultaneidad lleva al establecimiento de relaciones numéricas.
- El uso por parte del niño del recuento progresivo y recuento completo son indicios de que se empiezan a establecer relaciones numéricas.
- Los niños consiguen describir las tres partes de una transformación a la edad promedio de cuatro años y medio.

En definitiva, las operaciones de sumar y restar se deben abordar en Educación Infantil. Sobre cómo hacerlo, tenemos que conseguir que el niño adquiera el principio de cardinalidad y una vez hecho esto debemos hacer que establezca relaciones numéricas trabajando el esquema de transformaciones de cantidades discretas y el esquema parte-todo.

Referencias bibliográficas

Aubrey, C. (1993). An Investigation of the Mathematical Knowledge and Competencies Which Young Children Bring into School. *British Educational Research Journal,* vol. 19, nº 1, 27-41.

Bermejo, V (1990). *El niño y la aritmética.* Barcelona: Paidós Educador.

Brannon, E. M. (2002). The Development of Ordinal Numerical Knowledge in Infancy. *Cognition,* 83, 223-240.

Brown, M. (1978). *Number Operations.* National Foundation for Educational Research.

Canobi, K.; Reeve, R. y Pattison, P. (2003). Patterns of Knowledge in Children's Addition. *Developmental Psychology,* vol. 39, nº 3, 521-534.

Candobi, K.; Reeve, R. y Pattison, P. (2002). Young Children's Understanding of Addition Concepts. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology,* vol. 22, nº 5, 513-532.

Canobi, K. (2004). Individual Differences in Children's Addition and Subtraction Knowledge. *Cognitive Development,* vol. 19, nº 1, 81-93.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1982). The development of Addition and Substraction Problem-Solving Skills. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective?* Hillsdale, N. J.: Erlbaum.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1979). *An Investigation of the Learning of Addition and Subtraction.* Madison, Wisconsin: Research and Development Center for Individualizad Schooling.

CARPENTER, T. P.; FENNEA, E. *et al.* (1999). *Children's Mathematics. Cognitively Guided Instrction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

CARPENTER, T. P.; HIEBERT, J. y MOSER, J. M. (1979). The effect of problem structure on first-graders´initial solution processes for simple addition and substractions problems (Tech. Rep. 516). Madison, Wisconsin: Research and Development Center for Individualizad Schooling.

CASTRO, E.; RICO, L y CASTRO, E. (1987). *Números y operaciones.* Madrid: Síntesis.

COHEN, L. B. y MARKS, K. S. (2002). How Infants Process Addition and Subtraction Events. *Developmental Science,* vol. 5, 186-212.

DESOTO, M. (2004). Strategy Choices in Simple and Complex Addition: Contributions of Working Memory and Counting Knowledge for Children with Mathematical Disability. *Journal of Experimental Child Psychology,* vol. 88, nº 2.

DICKSON, L., BROWN, M. y GIBSON, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Cerdanyola: Editorial Labor.

DIENES, Z. P. (1981). *Las seis etapas del aprendizaje en matemáticas.* Barcelona: Teide.

DIENES, Z. P. (1970). *La construcción de las matemáticas.* Barcelona: Vicens Vives.

FERNÁNDEZ, C. (2003a). *Didáctica del número natural versus metodología creativa.* En A. GERVILLA (ed.). *Creatividad aplicada, una apuesta de futuro.* Málaga: Dykinson.

FERNÁNDEZ, C. (2003b). *Pensamiento numérico y su didáctica (3-6 años).* Málaga: Dykinson.

FERNÁNDEZ, C. (2002a). *Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica: en niños de 3 a 6 años.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Málaga: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Málaga.

FERNÁNDEZ, C. (2001a). Aprendizajes numéricos en el ámbito familiar. En A. GERVILLA, M. BARREALES *et al.* (eds.). *Familia y educación. Educación Infantil y formación de educadores.* Universidades de Andalucía.

FERNÁNDEZ, C. (2001b). Análisis operatorio de algunas situaciones espontáneas de los niños referentes al número natural. En A. GERVILLA, M. BARREALES *et al.* (eds.), *Familia y educación. Educación Infantil y formación de educadores.* Universidades de Andalucía.

FERNÁNDEZ, C. (1999). Los esquemas lógicos-matemáticos implicados en la construcción del número en la infancia. En A. GERVILLA, M. BARREALES (eds.), *Un mundo para el niño. Innovaciones curriculares.* Málaga: CEDPM.

FERNÁNDEZ, C. (1997). Razonar jugando. En A. GERVILLA (ed.), *Eduacación infantil: metodología lúdica. Educación Infantil y formación de educadores.* Universidades de Andalucía.

FISCHER; FLORENCE, E. (1990). A Part-Part-Whole Curriculum for Teaching Number in the Kindergarten. *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 21, nº 3, 207-215.

FUSON, K. (1988). *Children´s Counting and Concepts of Number.* Nueva York: Spriger-Verlag.

GEARY, D. (1996). *Children´s Mathematical Development.* London: American Psychological Association.

GIFFORD, S. y WILSON, P. (1995). Number in Early Childhood. Beecholme Nursery Number Project. *Early Child Development and Care,* vol. 109, 95-132.

GINSBURG, H. y PAPPAS, S. (2004). SES, Ethnic, and Gender Differences in Young Children's Informal Addition and Subtraction: A Clinical Interview Investigation. *Journal of Applied Developmental Psychology,* vol. 25, nº 2.

GRECO, P. (1960). Recherchers sur quelques formes d´inferénces aritméthiques et sur la compréhension de l´itération numérique chez l´enfant. En P. GRECO, S. PAPERT y J. PIAGET, *Próblemes de la construction du nombre (Etudes d´epistémologie génetique, XIII).* París: Presses Universitaires de France.

GREENSPAN, S. (2006). Meeting Learning Challenges: Working with the Child Who Has ADD. *Early Childhood Today (1),* vol. 20, nº 6, 16-17.

HATANO, G (1982). Learning to Add and Subtract: A Japonese Perspective. En T. P. CARPENTER, J. M. MOSER y T. A. ROMBERG (eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective.* Hillsdale, N. J.: Erlbaum.

HUGHES, M. (1981). Can Pre-School Children Add and Subtract? *Educational Psychology,* vol. 1, nº 3, 207-219.

IBARRA, C. G. y LINDVALL, C. M. (1982). Factors Associated with the Ability of Kindergarten Children to Solve Simple Arithmetic Story Problems. *Journal of Educational Research,* vol. 75, 149-155.

KAMÍI, C. (1986). *El niño reinventa la aritmética.* Madrid: Visor.
KAMÍI, C. (1982). *El número en la Educación preescolar*. Madrid: Visor.
KOBAYASHI, T.; HIRAKI, K.; MUGITANI, R. y HASEGAWA, T. (2004). Baby Arithmetic: One Object Plus One Tone. *Cognition,* vol. 91, B23-B34.
MCCRINK, K. y WYNN, K. (2004). Large, Number Addition and Subtraction by 9-Month-Old Infants. *Psycological Science,* vol. 15, 776-781.
MIALARET, G. (1984). *Las matemáticas cómo se aprenden, cómo se enseñan.* Madrid: Aprendizaje Visor.
NAITO, M. y MIURA, H. (2001). Japanese Children's Numerical Competencies: Age and Schooling-Related Influences on the Development of Number Concepts and Addition Skills. *Developmental Psychology,* vol. 37, nº 2, 217-230.
PIAGET, J. (1961). *La formación del símbolo en el niño.* México: Fondo de Cultura Económica.
PIAGET, J. y INHELDER, B. (1956). *El desarrollo de las cantidades en el niño.* Textos de psicología del niño y del adolescente.
PIAGET, J. y INHELDER, B. (1976). *Génesis de las estructuras lógicas elementales: clasificaciones y seriaciones.* Buenos Aires: Guadalupe.
PIAGET, J. y SZEMINSKA, A. (1982). *Génesis del número en el niño.* Buenos Aires: Guadalupe.
ROBINSON, K. (2001). The Validity of Verbal Reports in Children's Subtraction. *Journal of Educational Psychology,* vol. 93, nº 1, 211-222.
SASTRE, G. y MORENO, G. (1980). *Descubrimiento y construcción de conocimientos.* Barcelona: Gedisa.
SCHWARTZ y SYDNEY, L. (1995). Early Childhood Corner: Authentic Mathematics in the Classroom. *Teaching Children Mathematics,* vol. 1, nº 9, 580-584.
SOPHIAN, C. (1995). Representation and Reasoning in Early Numerical Development: Counting, Conservation, and Comparisons between Sets. *Child Development,* vol. 66, nº 2, 559-577.
STARKEY, P. y GELMAN, R. (1982). The Development of Addition and Subtraction Abilities Prior to Formal Schooling in Arithmetic. En T. CARPENTER, J. MOSER y T. ROMBERG (comps.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective.* Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 99-116.
SEGOVIA, I. (1995). *Estimación de cantidades discretas. Estudio de variables y procesos.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada.
STEFFE, L. P. y JOHNSON, D. (1971). Problems-Solving Performances of First-Grade Children. *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 2, 179-181.
VERGNAUD, G. (1985). *L´enfant, la mathématique et la réalité.* New York: Peter Lang.
VILETTE, B. (2002). Do Young Children Grasp the Inverse Relationship between Addition and Subtraction? Evidence against Early Arithmetic. *Cognitive Development,* vol. 17, 1.365-1.383.
WAKELEY, A.; RIVERA, S. y LANGER, J. (2000). Can Young Infants Add and Subtract? *Child Development,* vol. 71, nº 6, 1.525.
ZENER, R. (1994). Extensions in the Mathematics Area of the Children's House. *NAMTA Journal,* vol. 19, nº 1, 11-23.
ZUR, O. y GELMAN, R. (2004). Young Children can Add and Subtract by Predicting and Checking. *Early Childhood Research Quarterly,* vol. 19, nº 1, 121-137.

Abstract

How and when to introduce methods of addition and subtraction operations?

We will see in this essay that the origin of the operations of addition and subtraction in children is conditioned to the actions of adding and taking which are developed in a process of mental construction of the logical-mathematical patterns of transformation of discreet amounts and according to Piaget´s scheme part-all.
These operations are fundamental in all the mathematical constructions of arithmetic and they are an object of study of many researches on child psychology and mathematical education.
Our work is innovating in the way we tackle addition and subtraction in child education. It is a question of searching in the logical-mathematical patterns underlying the construction of these arithmetical operations by the little child, in order to get to the quantifications of the actions of adding and taking, with the consequent determination of numerical relations and conceptualization of the operations. All this will contribute to elaborate an appropriate didactic of addition and subtraction for three to six years old school children, considering their capacity and everyday situations that imply quantitative transformations and the inclusion of classes.

Key words: *Number, Arithmetic, To sum, To subtract, To add, To take, Arithmetical transformation, Quantification, Relation part-all.*