Enrique C. DIEZ DE CASTRO
Salvador DURBAN OLIVA
Universidad Hispalense

Una introducción a la Programación por Objetivos y su aplicación a la toma de decisiones.

En las últimas décadas, los economistas han desarrollado una serie de modelos con los que intentan explicar la realidad empresarial. No todas las modelizaciones a que aludimos encuentran el suficiente eco dentro de la empresa, son múltiples y variadas las dificultades con las que el empresario choca a la hora de llevarlas a la práctica (falta de personal técnico adecuado, lenguaje excesivamente científico, hipótesis poco reales, falta de información sobre los parámetros, etc.). En el presente artículo, intentamos acercar un poco más al empresario una técnica relativamente nueva y que ha encontrado ya múltiples aplicaciones.

Una de las decisiones, que con frecuencia, debe tomar todo empresario, se refiere a los recursos. Ya sabemos que los recursos con que cuenta la empresa son limitados; ésto nos lleva a intentar un empleo óptimo de los mismos, es decir, a lograr una distribución temporal y espacial lo más eficiente posible, orientada hacia el logro de los objetivos empresariales. Es este el problema fundamental de la planificación y programación económica, aunque no el único, pues "la planificación requiere la adopción de los objetivos de los diversos departamentos y de la empresa, así como la determinación de los medios para alcanzarlos" (1).

La aplicación de las técnicas matemáticas a la programación empresarial es relativamente reciente. Su inicio se encuentra en la Segunda Guerra Mundial. Los problemas de Planificación y Programación de medios humanos y materiales comprometidos en la misma, preocupó hondamente a los investigadores militares, llevándoles a conseguir resultados muy satisfactorios.

---

(1) Koontz, H. y O'Donnell C.; Curso de Administración Moderna; Mc Graw Hill. 1976. Pág. 115.

Entre las técnicas que llegaron a su madurez en estas fechas destacan las correspondientes a la Programación Lineal (2), base de toda la Programación matemática y la cual presenta una serie de variantes tales como:

- Programación en números enteros,
- Programación binaria,
- Programación paramétrica,
- Programación cuadrática,
- Programación no lineal,
- y, la que es objeto de nuestro estudio: la programación por objetivos (3).

¿Qué persigue la programación por objetivos?, ¿cómo se opera con ella?, ¿cuáles son sus limitaciones esenciales? He aquí algunas de las interrogantes a las que intentaremos dar respuesta seguidamente.

La Programación Lineal optimiza —maximizando o minimizando- una función lineal de varias variables a la que llamaremos función económica o función objetivo. Su expresión matemática es la siguiente [1]:

$$Z\ (\text{máx.})\ \text{ó}\ (\text{min.}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \quad [1]$$

Si el problema fuera exclusivamente este, la derivación matemática nos lo resolvería. De todos es conocido el cálculo de un máximo o un mínimo por medio de la derivación. Pero no es este nuestro caso, en la programación lineal la función económica [1] está sometida a ciertas limitaciones que en la empresa se referirán a los recursos limitados y, que nosotros, llamaremos restricciones (inecuaciones lineales expresivas de las relaciones existentes entre las variables de la función objetivo, que reflejan el ámbito empresarial). Sus expresiones matemáticas se adaptan a [2]:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_j;\ \text{para}\ j = 1,2,\ldots,m. \quad [2]$$

Por regla general expresan que el consumo de cierto factor limitado, j, debe ser menor, igual o mayor a la disponibilidad del mismo, b_j.

Ya tenemos planteado matemáticamente el programa lineal.

Ilustremos los conceptos anteriores mediante un sencillo ejemplo.

Supongamos que un empresario fabrica televisores en blanco-negro y color. Los beneficios unitarios que obtiene con cada uno de

---

(2) Charnes A., Cooper W.W. y Henderson A.; "An introduction to linear programming"; John Wiley and Sons. New York. 1953 Simmonard M.; "Linear programming"; Prentice Hall. 1966. En castellano, véanse: Suárez Suárez A.S.; "Aplicaciones económicas de la Programación Lineal"; Guadiana. Madrid. 1970. Gass S.I.; "Programación Lineal. Método y Aplicaciones". Continental. Mejico. 1975.

(3) Ijiri Y.; "Management goals and accounting for control"; North-Holland Amsterdam. 1965. Versión Española: ICE. Madrid. 1976.
Fighiera E.J. y Lee J.N.; "La programmation des objetifs. Modéles de décision adaptés aux besoins des entreprises francaises"; Publi-Union. Paris. 1974.

ellos, son, respectivamente, de 2 y 3 unidades monetarias. A este empresario, le convendrá producir el máximo número de televisores siempre que no supere las siguientes limitaciones:

— El número de televisoes en blanco-negro demandados por el mercado es de 20 unidades por mes.

— Por otra parte, la capacidad de producción para los televisores en color, está limitado a un número máximo de 16 unidades al mes.

— Además, el citado empresario no puede disponer más de un máximo de cien unidades monetarias por mes para hacer frente a la producción de los artículos tratados. De estas cien unidades, cuatro consume en la fabricación de un televisor en blanco-negro y cinco en la de un televisor en color.

— Suponemos que el objetivo del empresario consiste en maximizar el beneficio obtenido por la producción de televisores.

— Si llamamos x_i al número de televisores en blanco-negro producidos y vendidos por el empresario cada mes, y x_2 al número de los *televisores en color, podemos expresar el objetivo anterior mediante la* función siguiente [3]:

$$Z_{máximo} = 2\,X_1 + 3\,X_2 \quad [3]$$

y en cuanto a las limitaciones, tendremos:

Limitación de demanda [4]:

$$X_1 \leq 20 \; [4]$$

Limitación de capacidad [5]:

$$X_2 \leq 16 \; [5]$$

Limitación financiera [6]:

$$4\,X_1 + 5\,X_2 \leq 100 \; [6]$$

Cuando aplicamos la programación lineal a un problema económico, las variables que intervienen serán siempre positivas, por tanto, necesitamos complementar el planteamiento anterior con las llamadas restricciones de "no negatividad" [7]:

$$X_i \geq 0; \text{ para } i = 1, 2. \; [7].$$

Empleando el algoritmo simplex, nos resolvería el problema propuesto, cuyo óptimo se alcanza para los siguientes valores de las variables [8]:

$$X_1 = 5 \text{ y } X_2 = 16 \quad [8]$$

y, por tanto, el beneficio total al mes del citado fabricante será igual a (2.5 + 3. 16) cincuenta y ocho unidades monetarias. Nótese como al sustituir los valores cálculados para las variables, comprobamos el cumplimiento de todas las restricciones, algunas en forma de desigualdad (la correspondiente a limitación de demanda, la cual no cubriremos por quince unidades) y otras en forma de igualdad (como el resto de las limitaciones propuestas).

¿Qué inconvenientes presenta la Programación Lineal? Entre otros, nos interesa ahora resaltar los siguientes:

a) Supone que la empresa o departamento al que aplicamos la citada técnica, posee *un solo objetivo.* En la realidad, esto no es cierto, toda empresa posee múltiples objetivos los cuales estarán jerarquizados según su importancia.

b) Concreta el único objetivo en *maximizar o minimizar una determinada variable económica,* que generalmente suele ser el beneficio; la práctica no confirma esta hipótesis, la empresa pretenderá *satisfacer* sus múltiples objetivos en función de ciertos niveles predeterminados con anterioridad. O lo que es lo mismo, no pondrá todos sus recursos al servicio de un único objetivo, ya que le puede llevar a incumplir peligrosamente otros objetivos, sino que intentará satisfacer un nivel mínimo —ó máximo— de este objetivo compatible con los restantes sub-objetivos que considere necesarios.

c) *Subordina el objetivo a los medios,* ya que el cumplimiento de las restricciones es prioritario al valor tomado por el objetivo.

d) *Las restricciones no son fiel reflejo de la realidad económica,* pues nos expresan la imposibilidad material de modificar las disponibilidades en recursos limitados. Esto no suele ser cierto. Todo recurso puede aumentarse o disminuirse a voluntad, por encima de la disponibilidad, aunque en caso de aumento cada vez lo haremos con mayor coste marginal. Un ejemplo, lo tenemos en la restricción financiera del problema anterior, el limitar la disponibilidad monetaria mensual a 100 u.m., no es una restricción inflexible, siempre podremos conseguir más recursos financieros en el mercado, pagando lo suficiente; otro problema sería la determinación de si nos es rentable o no la utilización de esos recursos suplementarios.

Estos son algunos de los problemas de la programación lineal, los cuales *se superan* con la programación por objetivos. Veamos a continuación en que consiste la programación por objetivos y como soluciona los problemas mencionados.

Su fundamento matemático, así como el método de resolución es común a la programación lineal, lo que si incorpora es una serie de elementos nuevos, que hacen más flexible el modelo propuesto anteriormente aproximándolo más a la realidad que modeliza. Estos elementos son los siguientes:

—Restricciones no flexibles.
—Restricciones flexibles.

—Función objetivo compuesta por desviaciones.

—Ponderación de objetivos.

Examinemos cada uno de ellos:

1) *Restricciones no flexibles:* son iguales que las tratadas en programación lineal, y responden a una imposibilidad material o a una negativa de la Dirección General en cuanto a variaciones en las disponibilidades existentes.

Así, en el problema anterior, vimos que la capacidad de la fábrica para la producción de televisores en color era, como máximo, la suficiente para conseguir 16 televisores. Si es físicamente imposible, o bien, si la dirección general no quiere aumentar dicha capacidad la restricción quedaría formulada como expresamos en [9]:

$$X_2 \leq 16 \quad [9]$$

2) *Restricciones flexibles:* nos expresan las posibles desviaciones entre los objetivos de la dirección y la realidad, mediante comparación de un nivel —máximo, exacto o mínimo— de consumo para un determinado factor limitado, fijado por la dirección, con el consumo real conseguido con ese factor. Su expresión matemática es la siguiente [10]:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot x_i - b_j = \overset{+}{Y_j} - \overset{-}{Y_j} \quad [10]$$

siendo: b_j, el nivel de consumo a conseguir del factor limitado j.

$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot x_i$; el consumo real del factor limitado j.

Y_j^+ ; variable representativa de la desviación positiva del consumo real sobre el consumo propuesto por la dirección para el factor limitado J.

Y_j^- ; idem. negativa.

Como en todo problema de programación económica, las diferentes variables que intervienen en el mismo deben tomar valores positivos o nulos, pero nunca negativos; y en este caso, particularizando para las variables-desviaciones, no pueden tomar ambas valor positivo, si queremos llegar a una solución consecuente con la realidad económica. Por tanto, deben cumplir las siguientes condiciones [11]:

$$\begin{aligned} & Y_j^+ , Y^- = O \text{ para toda } J \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad [11] \\ & Y_j^+ \cdot Y^- = O \text{ para toda } j \end{aligned}$$

La solución por el método simplex, nos garantiza el cumplimiento de ambas, pues asegura la no negatividad de las variables durante todo el proceso y en el óptimo. Además, la especial estructura de los vectores que nos definen a las variables desviaciones, consigue que el método simplex nos proporcione valores positivos o como máximo una de ella por cada par.

Expliquemos mediante el ejemplo que venimos utilizando la formulación de estas restricciones. Supongamos que la dirección de la empresa define los siguientes niveles en cuanto a sus objetivos:

OBJETIVOS	**NIVELES**
Beneficio	70
Demanda TV Blanco-negro....	20
Financiación.................	100

Las restricciones nos adoptarán las siguientes formas:

$$\begin{array}{lrcll}
\text{—Beneficio:} & 2X_1 + 3X_2 - 70 & = & Y_1^+ - Y_1^- & [12] \\
\text{—Demanda:} & X_1 - 20 & = & Y_2^+ - Y_2^- & [13] \\
\text{—Financiación:} & 4X_1 + 5X_2 - 100 & = & Y_3^+ - Y_3^- & [14]
\end{array}$$

niveles conseguidos
en la realidad.

por la dirección
desviaciones

niveles propuestos

3) *Función objetivo:* con ella imponemos al programa los deseos de la dirección. Especificamos si los niveles propuestos deben ser superados, no alcanzados o conseguidos exactamente, dicho de otra forma, si las desviaciones anteriores deben ser positivas las Y_j^+, positivas las Y_j^- o ambas nulas, respectivamente.

La forma en que podemos expresar esto, puede ser mediante la minimización de las desviaciones desfavorables o la maximización de las favorables. Optemos por la primera con objeto de que el programa nos quede formulado en lo que se llama "forma standard".

Para su construcción, deberemos por tanto basarnos en las definiciones específicas de la dirección respecto a estas desviaciones, en función de los objetivos que ella se proponga. Supongamos que los deseos de la dirección vienen recogidos en la siguiente tabla:

OBJETIVO	NIVEL	DESEO DRCION.	DESVIAC. DESFAVORABLE
Beneficio	70	Alcanzar como máximo el nivel definido.	$\overset{+}{Y_1}$ (4)
Demanda TV, B,N	20	Conseguir abastecer exactamente el nivel deseado.	$\overset{+}{Y_2}$, $\overset{-}{Y_2}$
Financiación	100	No dejar ninguna cantidad de recurso financiero ocioso.	$\overset{-}{Y_3}$

La función objetivo nos quedará:

$$Z'_{min.} = \overset{+}{Y_1} + \overset{+}{Y_2} + \overset{-}{Y_2} + \overset{-}{Y_3}$$

4) *Ponderación de objetivos:* es el último de los elementos que consideramos, y aparece como complemento al apartado anterior. Se utiliza fundamentalmente cuando los objetivos son incompatibles (aquellos que no se pueden alcanzar simultaneamente) ya que entonces es indispensable establecer una jerarquía entre los mismos, la cual se reflejará en la función objetivo mediante una ponderación de las desviaciones a que da lugar cada objetivo.

Supongamos que en nuestro caso la jerarquización entre los diferentes objetivos nos viene dada en la tabla adjunta:

OBJETIVO	IMPORTANCIA RELATIVA
Financiación	Prioritario.
Beneficio	Mitad de importancia que el objetivo anterior.
Demanda TV, B,N	Igual importancia que el objetivo beneficio.

Completamos por tanto la función objetivo de la siguiente forma:

$$Z''_{min.} = M/2\ \overset{+}{Y_1} + M/2\ (\overset{+}{Y_2} + \overset{-}{Y_2}) + M\ \overset{-}{Y_3}$$

en la que hemos utilizado unos coeficientes de ponderación M y M/2 estrictamente mayores que cualquier constante o valor de las variables del problema. Con esto queremos indicar que no existe ningún número finito por el que al multiplicar cualquiera de las constantes o valores de las variables del problema, obtengamos un producto superior a los coeficientes de ponderación.

---

(4) Alcanzar como máximo el nivel de 70, indica que ($2\ x_1 + 3\ X_2$) sea inferior o igual a 70. Por tanto si alguna de las desviaciones debe tomar valor positivo, ésta será $\overset{-}{Y_1}$, debiendo ser nula $\overset{+}{Y_1}$. Es por tanto $\overset{+}{Y_1}$ la desviación desfavorable a minimizar.

El programa lineal nos ha quedado:

$$Z''_{min.} = M/2\, Y_1^{+} + M/2\,(Y_2^{+} + Y_2^{-}) + M\, Y_3^{-}$$

Sometida a: $X_2 \leqslant 16$

$$2X_1 + 3X_2 - Y_1^{+} + Y_1^{-} = 70$$
$$X_1 - Y_2^{+} + Y_2^{-} = 20$$
$$4X_1 + 5X_2 - Y_3^{+} + Y_3^{-} = 100$$
$$X_1,\ X_2,\ Y_1^{+},\ Y_1^{-},\ Y_2^{+},\ Y_2^{-},\ Y_3^{+},\ Y_3^{-},\ \geqslant 0$$

La solución por cualquiera de los algoritmos conocidos para resolver problemas lineales (Simplex, etc.) nos da el optimo siguiente:

$X_1 = 20$
$X_2 = 4$
$h_3 = 12$ (variable de holgura de la primera restricción).
$Y_1^{-} = 18$

por tanto, comprobamos que:

— Número de productos fabricados: 20 unidades de TV en ByN, y cuatro unidades en color.

— Restricción de capacidad para los TV en color: al tomar la variable de holgura correspondiente a esta restricción valor $h_3 = 12$, es éste el valor de la capacidad sin utilizar —ociosa—.

— Beneficio conseguido: Tenemos en el óptimo un valor para la desviación negativa correspondiente ,Y_1^{-}, de 18 unidades, lo cual nos indica que no alcanzamos el nivel definido por la dirección por esta cantidad, o sea, conseguimos un beneficio de 52 unidades monetarias, y por tanto cumplimos con este objetivo secundario.

— Demanda de TV en ByN: en el óptimo, las desviaciones positivas y negativas correspondientes a este objetivo son nulas, por tanto, conseguimos exactamente el nivel definido por la dirección, 20 unidades, y por tanto cumplimos este objetivo prioritario.

— Financiación: igualmente en este caso, el óptimo dá valores nulos para las dos desviaciones del objetivo financiación, con lo que conseguimos exactamente el nivel definido, 100 unidades monetarias consumidas, por lo cual, cumplimos el objetivo secundario de no dejar recursos financieros ociosos.

En el problema propuesto, los objetivos se cumplen todos, son compatibles.

CONCLUSIONES:

a) El método de resolución para la programación por objetivos es el mismo que el utilizado para la programación lineal, ya que el planteamiento de los problemas de la programación por objetivos es un programa típico de programación lineal.

b) La programación por objetivos solo presenta ventajas respecto a la programación lineal. Soluciona algunos de los inconvenientes de esta última —los que vimos anteriormente— y no presenta inconveniente adicional. Acerca por tanto, el modelo a la realidad económica.

c) Sus aplicaciones al campo económico son muy numerosas, debido a la flexibilidad que presenta el modelo. Destaca su utilidad para la planificación financiera (5).

d) Entre sus inconvenientes, derivados todos ellos de la programación lineal destacan los siguientes:

— La programación por objetivos opera solo con objetivos cuantificables.

— Las diversas relaciones entre la variables deben ser todas lineales. Este inconveniente se podría soslayar aplicando programación no-lineal.

— A veces, resulta extremadamente díficil el cálculo de las relaciones entre las diversas variables del problema a modelizar.

e) Es muy importante hacer hincapié en que las soluciones obtenidas con cualquier modelo (y particularmente con el de programación por objetivos) constituyen unicamente una ayuda para la decisión, ya que nunca podremos eliminar al sujeto decisor y desplazar la responsabilidad de la decisión sobre un modelo por muy sofisticado que sea.

(5) Mao J.C.T.; "Análisis financiero". Ateneo. B. Aires. 1974.