Deducciones estructurales y análisis de la consecuencia lógica[1]

Javier Legris[2]

Resumen

Este trabajo tiene por objetivo sugerir que la concepción de la lógica basada en la idea de deducciones estructurales representa un enfoque viable para elucidar el concepto de consecuencia lógica en una manera no objetivista. En el trabajo se discute la descripción de las constantes lógica como "signos de puntuación" debida a Kosta Dosen y se la justifica en términos de la práctica deductiva en el lenguaje.

El concepto de consecuencia lógica es el más importante de la lógica. Definirlo es definir lo que se entiende por inferencia lógica y, por lo tanto, caracterizar las prácticas deductivas que se manifiestan en cualquier contexto de la comunicación lingüística. Así pues, desarrollar una teoría que explique por qué un enunciado es consecuencia lógica de

---

[1] Este trabajo se basa en una comunicación presentada en la mesa redonda sobre consecuencia lógica en el *IV Colóquio Cone Sul - Filosofia das Ciencias Formais*, Santa Maria (Brasil), 11-15 de noviembre de 2000. La discusión de las deducciones estructurales es parte de un trabajo presentado a las *XI Jornadas de Epistemología e Historia de las Ciencias*, La Falda (Argentina), 30 de noviembre, 1 y 2 de diciembre de 2000. El trabajo se ha beneficiado con las conversaciones sostenidas por el autor con Thomas Moro Simpson. Quiero agradecer además a Abel Lassalle Casanave y José Seoane por sus críticas y comentarios a diferentes versiones del trabajo. Por cierto, ellos no tienen responsabilidad alguna en los errores que aún puedan permanecer.

[2] *Universidad de Buenos Aires y Conicet (Argentina).*

otros (y por qué otro enunciado no lo es) es el desideratum de la filosofía de la lógica. Es difícil encontrar una caracterización que sea aceptada por todos los que se ocupan o interesan por la lógica y diferentes tradiciones se han dado en la historia de esta disciplina.

Al tematizar la consecuencia lógica puede encontrarse

(a) un análisis conceptual que dé lugar a una definición;

(b) métodos para determinar que un enunciado es consecuencia de otros.

Respecto de (a), la tarea consiste en encontrar un marco conceptual adecuado para formular la definición. En cuanto a (b), se trata de construir sistemas para determinar que un enunciado es consecuencia lógica de otros. Parece razonable afirmar la primacía del análisis conceptual sobre los métodos. Sin embargo, se espera también una adecuación entre los métodos y la definición obtenida por medio del análisis conceptual. No queda claro *prima facie* en qué consiste esta adecuación. Uno podría llegar incluso a pretender que se basara en una cierta unidad teórica de ambos aspectos, en el sentido en que estos tuvieran como base una misma teoría.

En todo caso, la caracterización del concepto de consecuencia lógica exige tomar en consideración los siguientes problemas:

1. La admisión de consecuencias a partir de infinitas premisas. Este es un problema que aparece, en particular, al considerar contextos matemáticos, donde se hace referencia a conjuntos de cardinalidad infinita.

2. La dicotomía materia-forma. Se supone el carácter *formal* de la consecuencia lógica, es decir, independiente de temas, de modo que debe determinarse la *forma lógica* de los enunciados.

3. El problema de la relevancia (pertinencia). El ideal de que un enunciado sea consecuencia lógica de otros enunciados pertinentes con él.

4. La relación entre consecuencia lógica y analiticidad. Habría enunciados que se siguen analíticamente de otros, pero ¿son consecuencia lógica? (ej.: "Sócrates era varón" es consecuencia de "Sócrates era padre")

Las observaciones que siguen a continuación tienen que ver con los puntos 1. y 2., aunque también tienen consecuencias para los dos restantes.

1. La interpretación Bolzano-Tarski

En la actualidad resulta difícil hablar acerca del concepto de consecuencia lógica sin considerar la caracterización que hizo Alfred Tarski en la década de 1930, es decir a la concepción *semántica* de la consecuencia lógica. Siguiendo a Carnap, Tarski tiene por objetivo ofrecer una *elucidación* de este concepto. Carnap señalaba:

"La tarea de la elucidación [*explication*] consiste en transformar un concepto dado más o menos inexacto en uno exacto o, más bien, en reemplazar el primero por el segundo." (Carnap 1950, p. 3).

En su célebre trabajo sobre la consecuencia lógica de 1936, Tarski llevó cabo esta tarea recurriendo al concepto -más exacto- de modelo, que es definido utilizando conceptos de la teoría de conjuntos (véase Tarski 1936, p. 9).

En este mismo trabajo, Tarski comenzó criticando la manera de entender la consecuencia lógica como *derivabilidad* en sistemas deductivos formales. Los enunciados derivables en el sistema a partir de otros eran aquellos que se obtenían a partir de la aplicación sucesiva y en un número finito de reglas de inferencia. Según Tarski, muchos lógicos creían que estas reglas agotaban el "contenido", el significado, del concepto de consecuencia lógica. Contra esta concepción, Tarski argumentaba presentando un ejemplo en el que un enunciado se afirmaba como consecuencia lógica de infinitos enunciados (Tarski 1936, p. 2).

Este caso motivaba la presentación de su propia concepción. Luego de que, inmediatamente después del trabajo de Tarski, Heinrich Scholz haya hecho notar ciertas semejanzas, es un lugar común decir que el concepto de consecuencia lógica de Tarski fue anticipado por Bernard Bolzano en su obra *Wissenschaftslehre* de 1837, se puede hablar de una "definición Bolzano-Tarski" de consecuencia lógica.

Esta definición, en general, surge de afirmar dos propiedades de la consecuencia lógica: (i) la propiedad de *transmisión de la verdad* que tiene la consecuencia lógica y (ii) su universalidad (validez bajo toda circunstancia). Así, señalaba Bolzano "El enunciado conclusión será verdadero *toda vez* en que los enunciados antecedentes sean verdaderos." (Bolzano 1837, sección 223). La idea de universalidad lleva a pensar en algo que es *variable* (*veränderlich*) en los enunciados, frente a otra cosa que permanece invariables (*unverändlich*). Iniciando la tradición que se seguirá posteriormente, Bolzano decía que estos conceptos "que constituyen la parte invariable en estos enunciados, pertenecen todos a la lógica" (Bolzano 1837, par. 148). Aparece así la noción de *constante lógica* como esencial en la definición de consecuencia lógica.

Así, tenemos aquí los dos conceptos de *forma lógica* y de *sustitución* como parte de la caracterización de consecuencia lógica. Ambos conceptos parecen tener una primacía para definir la consecuencia lógica como aquella consecuencia puramente formal, independiente de cualquier contenido (así ha sido lo han sostenido diferentes intérpretes, Etchemendy entre ellos).

La definición de Tarski, además, agregó como instrumental técnico el concepto de *modelo*, respecto del cual debería interpretarse lo que es variable. Como se ha mencionado ya, la introducción de este concepto implica una relativización del dominio de cuantificación, que en casos como los de Frege y Russell se suponía siempre universal. Esta relativización reveló la paradoja de Löwenheim-Skolem, entre otros problemas[3].

Ahora bien, tanto Bolzano como Tarski no se atrevieron a delimitar claramente entre "lo variable" y "lo constante" en la forma lógica. Bolzano dice que

"Esta diferencia tiene por cierto su carácter vacilante ("sein Schwankendes"), ya que el ámbito de los conceptos que pertenecen a la lógica, no está delimitado tan nítidamente, que

[3] José Seoane discute en 1999 otros problemas ligados con la sustitución.

no pueda darse nunca una disputa acerca de esto". (Bolzano 1837, sección 148).

Y Tarski señala:

"No conozco razones objetivas, que permitan establecer un límite nítido entre ambos grupos de términos." (Tarski 1936, p. 10)[4].

La distinción corre pareja entre *formal* y *material*, entre una consecuencia formal y otra material.

2. El ideal de adecuación

Se ha mencionado al comienzo que al tematizar la consecuencia lógica, aparecen como dos aspectos diferentes un análisis conceptual, que lleva a una definición, y una explicitación de métodos para obtener consecuencias lógicas a partir de conjuntos de enunciados. Ambos podrían considerarse como medios para caracterizar un mismo concepto. Ahora bien, tal como se presenta la situación en la lógica moderna, existe un *desideratum*, que es un ideal de *adecuación* entre análisis conceptual y métodos. Los métodos se dieron en la lógica moderna a través de sistemas deductivos formales para la lógica de primer orden, en los que como ya se mencionó-las consecuencias lógicas eran determinadas fundamentalmente por aplicaciones finitas de un conjunto finito de reglas de inferencia, eventualmente aplicadas a axiomas, relativas a enunciados de un lenguaje formal.

Esta era la derivabilidad formal que Tarski objetaba en su trabajo de 1936. No obstante, esto tiene su correlato en la

---

[4] En una conferencia dada conjuntamente con Adolf Lindenbaum en 1935 en el *Mathematisches Kolloquium* de Karl Menger, Tarski manifestó algunas condiciones necesarias: "... cualquier relación entre objetos (individuos, clases, relaciones, etc.) que pueda ser expresada por medios puramente lógicos es invariante respecto de una función uno a uno del mundo (*i.e.*, la clase de todos los individuos) en sí mismo" (Tarski 1983, p.385). Sin embargo, deben tomarse en cuenta las peculiaridades del sistema que se toma en consideración: la teoría de tipos de los *Principia Mathematica* extendida.

consecuencia lógica, respecto de la cual la derivabilidad debe ser adecuada. El correlato es la *compacidad*: Si un enunciado es consecuencia lógica de un conjunto infinito de premisas, entonces lo es de un subconjunto finito de este. La compacidad se ve como una virtud para la definición de consecuencia lógica y permite la adecuación con los métodos de deducción. Si la consecuencia es compacta, tenemos a nuestra disposición métodos de derivación para todo enunciado que sea consecuencia lógica de otros. Toda relación de consecuencia lógica entre enunciados puede probarse (esta es la completitud) y dada una derivación de un enunciado a partir de otros, resultará que el primero es consecuencia lógica de los últimos (y esta es la consistencia o corrección). Pero también la compacidad aparece como una limitación tal vez indeseada, pues nuevamente surgen los ejemplos de enunciados que son consecuencia lógica de infinitas premisas. Estos casos no serían expresables en la lógica de primer orden, que es donde el ideal de adecuación puede cumplirse de manera cabal, pero no por ello dejan de ser estos casos problemáticos.

De este modo, resulta que la definición semántica de consecuencia lógica no capturaría totalmente la idea *preteórica* de consecuencia lógica. Ahora bien, cómo entender este problema de admitir infinitas premisas. Obviamente, no se debería pensar (y eso ya ha sido señalado anteriormente) en tener *efectivamente* infinitos enunciados, pues estos no podrían expresarse. Es decir, no se trata de la infinitud de las expresiones lingüísticas. Generalmente, se expresa este hecho mediante puntos suspensivos o expresiones como "y así siguiendo". Con ello se expresa la idea de un hecho o una propiedad que tiene un número infinito de elementos. Estas expresiones se refieren a un proceso recursivo o infinito, que se puede expresar mediante una *regla* (como la de inducción). En todo caso, debe quedar claro que se trata de un problema no del lenguaje, sino *de aquello que representa*, que hasta aquí, en esta discusión, está dado por los modelos. Esta es la posición que se dará por supuesto en este trabajo.

3. Tarski 1930

En este punto hay algo que me parece que vale la pena recordar. Previamente a su concepción semántica, Tarski había ofrecido una caracterización diferente de la consecuencia lógica. Me refiero a la que aparece en artículos publicados en 1930, en los que Tarski quería desarrollar una "metodología de las ciencias deductivas" y presenta una *operación* de consecuencia lógica que se aplica a conjuntos de enunciados y que se caracteriza por una serie de propiedades. Cuando esta operación es vista como una relación, entonces estas propiedades resultan ser las bien conocidas de reflexividad, transitividad y monotonía, que se usan actualmente para delimitar la relación de inferencia deductiva. A ellas se les puede agregar la propiedad de compacidad y la de sustitución uniforme. En ese momento, Tarski pretendía dar el significado del concepto de consecuencia lógica por medio de una definición "exacta" (véase Tarski 1930), considerando la operación de consecuencia lógica como un primitivo que es "caracterizado por medio de una serie de axiomas", siguiendo la idea de cuño hilbertiano de que una entidad, o conjunto de entidades, se caracteriza por medio de un sistema axiomático.

Aquí se está también frente a un caso de elucidación en el sentido apuntado anteriormente: el concepto inexacto preteórico se transforma en otro exacto, dado dentro de un marco teórico determinado (teoría de conjuntos). El concepto así definido debería ser coextensivo con el semántico (siempre que se hable de conjuntos de *enunciados*). A esta definición en términos de una operación conjuntista se la ha llamado definición *abstracta* de la consecuencia lógica (Alchourrón 1995) y pareciera tener un grado de generalidad mayor que la semántica, la cual parece ser, de un lado, sólo un caso particular de la abstracta. No obstante, de otro lado, la definición semántica parece capturar mejor el *contenido* preteórico del concepto de consecuencia lógica, al menos en tanto está más próxima a algunas ideas preformales como la de conservación de la verdad y la validez en cualquier configuración que adopte el mundo, con lo cual se presupone como indispensable algún componente ontológico en la caracterización de este concepto. Por el contrario, a la concepción abstracta se le ha objetado ser más bien una mera generalización de propiedades en un nivel superior que debe cumplir cualquier relación de consecuencia lógica. En suma, el hecho de que sea filosóficamente más satisfactoria la concepción semántica es lo que la haría preferible frente a la concepción abstracta. Pero también, cabe observar que esta última sugiere la idea de independizarse de la noción de modelo y de su peso ontológico.

4. Aristóteles de nuevo

En este momento me gustaría traer a colación a Aristóteles. Sus ideas sobre la consecuencia lógica pueden encontrarse en los *Topicos* y en los *Primeros analíticos* cuando define el silogismo: "Silogismo es un logos en el que, puestos determinados [supuestos], se sigue necesariamente, en virtud de estos supuestos, otra cosa distinta de ellos" (*Topicos* A 14, 105b 20-34). Aquí aparece el requisito de necesidad, de conclusión necesaria, como indispensable para la inferencia lógica.

Tanto Bolzano como Tarski interpretaron este requisito de necesidad en términos de universalidad: para cualquier circunstancia posible. En el caso de Tarski, se habla de validez en todos los modelos (y, como señala Seoane en 1999, cada modelo puede verse como una configuración posible de la realidad, como un "mundo posible"). Dicho de otro modo, se tiene una afirmación acerca de todos los dominios: las condiciones necesarias y suficientes para la consecuencia lógica están dados por la verdad de un enunciado universal (eventualmente en segundo orden o en un lenguaje multisurtido), cuantificando sobre dominios y sobre individuos en el dominio y en el cual lo único constante son las constantes lógicas. (Una vez más, lo decisivo es la caracterización de las constantes lógicas). Para ejemplificar: B[a] es consecuencia de A[a] si y sólo si es verdadero que $\forall x\ \forall d\ (x \varepsilon d\ \&\ A[a] \rightarrow B[a])$ (y esto puede generalizarse).

Pero esta no es la única interpretación que se debe tomar en cuenta. Esta idea de necesidad puede expresarse por el hecho de *demostrar* un enunciado a partir de otros[5]. El concepto de demostración vuelve a aparecer, pero sin entenderlo en términos de derivaciones en un sistema formal. Aquí puede objetarse que la existencia de demostraciones constituye un *criterio* para determinar que un enunciado es consecuencia lógica de otros. Pero esto es presuponer que la existencia de relaciones de consecuencia lógica es independiente de demostraciones.

Para reflexionar sobre este enfoque de una manera algo más tajante y contundente, voy a hacer una paráfrasis de una pregunta que Martin-Löf formulaba en una célebre conferencia que ofreció en Siena en 1983:

¿Hay enunciados que sean consecuencia lógica de otros, pero que no pueda demostrarse (en un sentido amplio de la palabra) que lo son? (1996, p. 37)

La respuesta a esta pregunta determina la posición que se adopte respecto de las relaciones entre consecuencia lógica y el concepto de demostración. En efecto, ¿qué sería dar una respuesta afirmativa a esta pregunta? Se puede conjeturar: Si uno responde afirmativamente, entonces debería estar en condiciones de dar cuenta de al menos un enunciado que sea consecuencia lógica de otros. ¿Sería esto equivalente a dar una demostración del mismo? En este punto surge la objeción, ahora, de que no todo método determinar que un enunciado es consecuencia lógica de otros es considerado un "método demostrativo". Piénsese en el caso, por ejemplo, del método de los *tableaux* semánticos. La respuesta a esta objeción consiste en pensar que se presuponen demostraciones en un sentido "canónico", dadas a partir de una *teoría* sobre lo que debe ser una demostración.

Así, el concepto de demostración debe ser objeto de un análisis exhaustivo, en particular el de demostración lógica, es decir de las demostraciones basadas exclusivamente en reglas y

---

[5] En los *Analitica posteriora*, Aristóteles se refiere al "conocimiento demostrativo", en el que además de presuponerse el carácter necesario de la inferencia deductiva, también las premisas de las que parte la deducción deberán ser ellas mismas necesarias, trasmitiéndose esta necesidad también a la conclusión. Este último aspecto no entra en la presente discusión.

principios lógicos. Ya dije que la derivabilidad formal se concibió como una manera de reconstruir esta idea de demostración. Pero -además de las objeciones debidas a Tarski- la derivabilidad formal tiene la desventaja de ser relativa a sistemas formales concretos, con determinados axiomas o reglas. Por el contrario, es necesario un concepto *general* de derivabilidad comparable en este sentido a la consecuencia lógica semántica. En este caso, lo que obtendríamos sería la unión de los dos enfoques o perspectivas para tratar la consecuencia lógica (concepto y métodos).

5. Reglas de inferencia y deducciones

Una solución positiva está en unir la determinación del significado de las constantes lógicas y la idea de *regla de inferencia*: el significado de las constantes lógicas estará dado mediante reglas de inferencia. Esta solución es la que presentó Gentzen con su sistema de reglas de introducción y eliminación de la deducción natural. Las reglas de introducción confieren significado a las constantes lógicas y las reglas de eliminación deben *justificarse* por las reglas de introducción. (véase Gentzen 1935). Las reglas de introducción son válidas en virtud de que establecen el significado de las constantes lógicas. Las reglas de eliminación son válidas en virtud de que puedan justificarse por las reglas de introducción por medio de procedimientos de reducción de las primeras a las últimas.

Por cierto, no es el caso que estas reglas se consideren aplicadas exclusivamente en la construcción de un sistema formal. Más bien, pueden verse asociadas a la idea preteórica, intuitiva, preformal, de demostración. En una demostración se puede aislar la *estructura deductiva* como secuencias de formas de enunciados conectados por aplicaciones de reglas de inferencia, a la que, para abreviar, llamaré *deducción*. Las reglas que generan una deducción -eventualmente a partir de premisas- son las reglas de introducción y eliminación. Estas reglas regulan -puede decirse- el *uso* de las constantes lógicas en el contexto de deducciones. Estas deducciones son válidas de acuerdo con la existencia de ciertos procesos justificatorios de las reglas de eliminación en términos de las de introducción[6].

Sobre esta base, Prawitz ha dicho (en 1985, pp. 165 y s.) que A es *consecuencia lógica* de un conjunto S de enunciados si y sólo si, existe una *deducción válida* de A a partir de S, es decir a partir de las deducciones de los enunciados en S se obtiene una deducción de A. Esta definición se basa en una definición de las constantes lógicas en términos de reglas de inferencia. Desde luego, esta definición cumple con las condiciones de reflexividad, transitividad y monotonía estipuladas por Tarski.

6. Constantes lógicas como signos de puntuación

Ahora me gustaría radicalizar un poco más estas ideas que acabo de presentar. Hasta aquí, la propuesta se basó en el concepto de regla de inferencia, teniendo a las reglas de introducción como definitorias de las constantes lógicas. Los encadenamientos A continuación, esbozaré una elucidación de las reglas de inferencia, de la función que cumplen. Con ello, se sugeriría una alternativa para caracterizar la consecuencia lógica y, en definitiva, toda la lógica.

Partamos del caso sencillo de la regla de introducción de la conjunción. Esta regla que en una deducción en la que aparezcan el enunciado A y el enunciado B (sin importar en qué orden) puede aparecer en un paso subsiguiente la conjunción A&B. Así, la aparición en una deducción de la conjunción A&B indica (*hace referencia a*) la aparición tanto de A como de B previamente en la deducción, sin importar el orden en que se

---

[6] Siguiendo las ideas de Prawitz en su trabajo de 1971, se pueden determinar deducciones canónicas a partir de ciertos procesos de normalización de deducciones. Uno puede decir, entonces que una deducción canónica de un enunciado a partir de otros es válida si, y sólo si, las subdeducciones que la componen son válidas. Dejo de lado los detalles técnicos y las definiciones precisas de deducción válida, que pueden encontrarse en Prawitz 1971 y 1985.

dan ambos enunciados. El condicional A $\rightarrow$ B se introduce en una deducción para indicar que hay una deducción de B a partir de A. La negación presenta algunos problemas. Una interpretación es que un enunciado $\neg$A se introduce en una deducción para indicar que desde el enunciado A se ha deducido una contradicción. Una disyunción A$\vee$B en una deducción hace referencia al hecho que de ella puede ser premisa de una deducción que tenga como conclusión todo enunciado que resulte como conclusión de una deducción a partir de A como a partir de B. Lo que quiero decir es que la aparición de un enunciado con una constante lógica hace referencia a la situación de sus argumentos en una deducción.

El caso del cuantificador universal es especialmente ilustrativo de esta concepción pues exige analizar nuevamente el problema de los dominios de cuantificación. Tal como se expresa en las reglas de Gentzen, la aparición de una cuantificación universal $\forall$xA[x] en una deducción querrá decir que en la deducción ha aparecido anteriormente A[c] (se ha deducido anteriormente), siendo c un parámetro que no aparece en las premisas de la deducción. Así es que c denota arbitrariamente a cualquier individuo del dominio, sin relativizar a un dominio determinado y A[c] ha sido inferido sin hacer referencia al dominio (vale para el universo entero, por así decirlo). Pero, una vez más cabe insistir, el cuantificador universal menciona el hecho de que anteriormente se ha deducido A[c].

En suma, las constantes lógicas parecen cumplir el papel de indicar ciertos rasgos de los enunciados que aparecen en deducciones. Por ello "no dicen nada acerca del mundo"; son formas de *resumir* o *reorganizar* lo que enunciados que son premisas o conclusiones de deducciones expresan. Esto hace a mi entender especialmente atractivo a este enfoque.

Esta -creo- es la idea que está detrás de la idea de Kosta Dosen de las "constantes lógicas como signos de puntuación" (Dosen 1994). Dosen parte de considerar *deducciones estructurales*, que son aquellas en las que -en el sentido que Gentzen le da al término- todo es formal o esquemático; no hay constantes lógicas. La idea es que las constantes lógicas, que determinan las deducciones no estructurales, se analizan en términos de deducciones estructurales. Las deducciones puede representarse del siguiente modo, indicando la secuencia de premisas por medio de S y la conclusión de la deducción por A:

S:A

Expresiones de este tipo se llamarán secuentes. Los enunciados de S reciben conjuntamente el nombre de "antecedente"; el de la derecha recibe el nombre de "sucedente". Debido a la existencia de un orden entre los enunciados que forman el antecedente, este puede considerarse una *estructura*. Asimismo, los dos puntos indican una relación entre el antecedente y el sucedente, de modo que un secuente puede considerarse una estructura más compleja. Puede pensarse en inferencias puramente formales, en las que todos los elementos son esquemáticos; sin constantes de ningún tipo. Estas son *inferencias estructurales*, representadas exclusivamente por secuentes. Es sobre la base de estos secuentes y de inferencias estructurales que Dosen se proponía elucidar el significado de las constantes lógicas, en el sentido de Carnap apuntado anteriormente. Dosen sostenía que toda constante lógica podía analizarse en términos de rasgos estructurales de las inferencias. Basten entre los casos que se acaba de mencionar los de la conjunción, el condicional y el cuantificador universal, los que quedan expresados por medio de las siguientes reglas de equivalencia, donde S y T representan estructuras en el antecedente, en el sentido apuntado antes (Dosen 1994, pp. 278 y ss.):

$$\frac{S : A \quad T : B}{S, T : A\&B.}$$

$$\frac{S\ A : B}{S : A \rightarrow B.}$$

$$\frac{S: A[c]}{S: \forall x A[x]}$$

(La constante de individuo c no aparece en S).

Una vez más, las constantes lógicas son signos de puntuación respecto de inferencias en el sentido de que *indican* (o *hacen referencia a*) inferencias previas, que son independientes de cada constante lógica en cuestión. Por ejemplo, en el caso de la conjunción la regla dice que una inferencia de A y otra de B (sin importar en qué orden se efectúe), equivale a una inferencia de la conjunción A&B. Así, una inferencia de la conjunción A&B indica (*hace referencia a*) una inferencia tanto de A como de B previamente (en cualquier orden). La inferencia de un condicional $A \to B$ indica que hay una inferencia de B a partir de A. La inferencia de una cuantificación universal $\forall x A[x]$ a partir de S equivale a una inferencia de A[c] a partir de S, siendo c un parámetro que no aparece en S. Así es que c denota arbitrariamente a cualquier individuo del dominio, sin relativizar a un dominio determinado y A[c] ha sido inferido sin hacer referencia al dominio (vale para el universo entero, por así decirlo). Es fácil notar que estas reglas de equivalencia pueden considerarse como una reformulación de las reglas de introducción y eliminación de la deducción natural de Gentzen, pero el marco formal en que se presentan es diferente (e inmediatamente se verá la diferencia).

Se pretende que la relación de consecuencia determinada por estas deducciones estructurales cumpla con las condiciones que Tarski postuló en su trabajo de 1930 (junto con la condición de sustitución), si hace referencia a estas estructuras finitas en lugar de conjuntos infinitos. En este caso, las condiciones definitorias se expresan a través de las que expresan las *reglas estructurales* (término tomado también de los sistemas de secuentes de Gentzen).

Pueden distinguirse dos tipos de reglas estructurales. En primer lugar, aquellas que son características de la consecuencia lógica, a saber

Reflexividad

$$\frac{}{A : A};$$

Dilución

$$\frac{S : C}{A, S : C};$$

Corte

$$\frac{S : C \qquad C, T : A}{S, T : A};$$

Finalmente, a estas reglas debe añadirse la siguiente:

Sustitución de variables de individuo

$$\frac{S : C}{S : C\ [x/y]}$$

S : C [*x*/*y*] indica el resultado de reemplazar todas las apariciones libres de la variables de individuo x por la variable y en los enunciados del secuente S : C.

En segundo lugar, cabe considerarse reglas que se limitan a manipular la información expresada por los enunciados, y son las siguientes:
Contracción

$$\frac{A, A, S : C}{A, S : C};$$

Permutación

$$\frac{S, A, B, T : C}{S, B, A, T : C};$$

Son estas reglas estructuralmente, puramente esquemáticas, las que determinan las propiedades de las constantes lógicas.

7. Las constantes lógicas y la práctica deductiva en el lenguaje

Con el fin de justificar esta concepción de la consecuencia lógica basada en las deducciones estructurales, vale la pena considerar, de una manera general, cual podría ser el *origen* de las constantes lógicas en la práctica lingüística y cómo es que hacen su aparición las reglas que gobiernan su uso. A la manera de un "experimento mental", supóngase una comunidad que habla una lengua en un estadio muy elemental de su desarrollo (para simplificar se supondrá además que la lengua es muy semejante al lenguaje de primer orden). En este estadio de la lengua, los hablantes sólo pueden expresarse mediante oraciones atómicas (del tipo de las que tiene el lenguaje de primer orden, con constantes de individuo y predicados). Estas oraciones son usadas para hacer *afirmaciones* en el contexto de la comunicación lingüística. Es decir, los enunciados tienen fuerza aseverativa. Cuando los enunciados son afirmados de manera correcta y concluyente (esto es, se tiene evidencia o razones concluyentes para afirmarlos), suele decirse que son verdaderos.

El uso de este lenguaje tiene, además, un *modo inferencial*. Esto significa que los hablantes de esta comunidad poseen la capacidad de hacer razonamientos, es decir, afirman algunos enunciados sobre la base de la evidencia otorgada por otros enunciados, de modo que es posible establecer relaciones de inferencia entre los enunciados del lenguaje. Dicho de otro modo, una vez que se afirman oraciones, se ve que otras pueden afirmarse exclusivamente sobre la base de haber afirmado aquellas. Para dar una idea, un ejemplo en castellano sería "Esto es rojo. Luego, esto es de color."

Un día, un hablante de esta comunidad cuyo lenguaje contiene solamente oraciones atómicas innova al producir un sonido "och", al que intercala entre dos enunciados A y B de ese lenguaje, indicando una concatenación entre las dos oraciones anteriores, afirmando una *nueva* oración "A och B". Los demás hablantes van adoptando esta expresión siendo conscientes de que con esa expresión se construye *una* oración a partir de otras. Ahora bien, ¿qué significa haber concatenado dos enunciados mediante "och" para producir un nuevo enunciado? En otras palabras, ¿cómo usan los miembros de la comunidad esta expresión para formar nuevos enunciados? ¿cuáles son las condiciones para hacer esos nuevos enunciados? Si los miembros de esa comunidad no tienen respuesta a estas preguntas, no podremos decir que ellos conozcan el significado de "och".

Supongamos, entonces, que los hablantes dan las siguientes condiciones para afirmar "A och B": Si se puede afirmar A de manera correcta (esto es, hay buenas razones o evidencia para afirmar A de manera concluyente) y se puede afirmar de manera correcta también B, entonces puede afirmarse A och B de manera correcta. De este modo, el significado de "och" empieza a quedar claro para los hablantes. Si se piensa bien, las condiciones para la afirmación correcta de "A och B" en esta lengua se corresponden con las que se dan en castellano para afirmar "A y B". Esto es, el significado de "och" se corresponde con el de la conjunción.

Uno puede, además, preguntarse por las consecuencias que se siguen de haber otorgado este significado particular a "A och B". En otras palabras, uno puede preguntarse qué se sigue de la afirmación de "A och B", y la respuesta sería: Si se afirma de manera correcta "A och B", entonces puede afirmarse de manera correcta tanto A como B. Es importante destacar el carácter composicional de la expresión "och": Si un hablante comienza diciendo algo de la forma "A och", quienes lo escuchen estarán esperando un enunciado de la forma B. Uno puede preguntarse por ciertas propiedades de la expresión "och". Por ejemplo, si un hablante expresara A y a continuación B, mientras que otro hablante pronunciara, en cambio, primero B y luego A, ¿podrían los demás hablantes del lenguaje hacer la misma afirmación "A och B"? Y otro problema más: si alguien afirmara repetidamente A, ¿daría el mismo efecto, sería "equivalente" a afirmar A?

Siguiendo esta descripción, cabe ahora hacer un salto e introducir la idea de que los hablantes de este lenguaje pueden hacer *afirmaciones hipotéticas*: afirmar una oración B sobre la base de *suponer* otra oración A. El modo inferencial permite pasar de A a B, pero A sólo se supone a manera de hipótesis. Aquí se puede hacer pensar en un diálogo entre dos hablantes: Si un hablante afirma hipotéticamente B sobre la base de A, es decir, infiere B a partir de la hipótesis A, y otro hablante afirma A, entonces el primer hablante tiene derecho a afirmar B. La situación que estoy describiendo es la que lleva a la aparición del condicional: "si A entonces B", que puede afirmarse a partir de afirmar B a partir de A.

Otro salto más puede hacerse al concebir la posibilidad que los hablantes de ese lenguaje puedan hacer afirmaciones arbitrarias acerca de objetos del universo, es decir, afirmaciones con *parámetros*. Esto sería cuando el hablante afirmara el predicado P de un objeto cualquiera, o sea, el hablante afirma Pc, donde c representa a un objeto cualquiera. En ese caso, c cumpliría la función de un parámetro. En esta circunstancia el hablante podría introducir en el lenguaje palabras como "todo" o "cualquiera". "Para todo x, Px" podría afirmarse a partir de haber afirmado Pc, donde c es un parámetro.

Consideraciones semejantes podrían hacerse respecto de las restantes constantes lógicas, como ser la negación, la disyunción y el cuantificador existencial. Pero basta por ahora con los ejemplos dados. Esta descripción genética es lo que Neil Tennant ha denominado "etiología del arraigo (*entrenchment*)" de las constantes lógicas (véase Tennant 1987, cap. 9) y sirve para explicar cómo las constantes lógicas adquieren significado. En este punto, cabe advertir algunos presupuestos semánticos.

En primer lugar, se supone el carácter *composicional* del significado (el significado de una expresión es función del significado de sus componentes). En segundo lugar, se presupone que el significado de cada expresión es *independiente* del lenguaje tomado en su totalidad (de modo que se rechaza un enfoque holista acerca del significado). Por último, y en conexión con lo anterior, las constantes lógicas se caracterizan de manera *separada*, de modo que es posible aislar las inferencias que conciernen exclusivamente a cada una de ellas.

Debe observarse, además, que las constantes lógicas se introducen en relación con la *afirmación* o aseveración de enunciados. En el uso del lenguaje aparece en un momento el "modo inferencial" relativo a afirmaciones: hay enunciados que se afirman sobre la base de haber afirmado otros. Una vez que se hace abstracción de los contenidos de los enunciados, ciertas inferencias resultan ser puramente formales, es decir son independientes de contenidos.

8. Conclusiones

En suma, la caracterización de las constantes lógicas en términos de deducciones estructurales puede verse como una *teoría formal* acerca de las prácticas deductivas en el lenguaje. En el caso de las reglas estructurales, estas reflejan la idea misma de inferencia deductiva, en la que se *afirma* un enunciado sobre la base de afirmar otros. Obviamente, todo enunciado se infiere de sí mismo. Además, dada una inferencia deductiva, el agregado de nuevas afirmaciones no podría alterarla. Finalmente, las inferencias pueden encadenarse, de modo que son transitivas.

Algunas de las reglas estructurales tienen que ver con la *manipulación* de los enunciados, como, por ejemplo, cambiar el orden en que son afirmados. En este contexto es donde aparecen las constantes lógicas para indicar ciertos rasgos de los enunciados que aparecen en deducciones. Como se ha señalado anteriormente, estas son formas de *resumir* o *reorganizar* lo que expresan enunciados que, según el caso, son premisas o conclusiones de inferencias. Este punto de vista acerca de las constantes lógicas queda estupendamente representado en la teoría de las deducciones estructurales.

De lo visto hasta ahora puede extraerse lo siguiente. Si se hace una teoría de las prácticas deductivas presentes en un lenguaje, la consecuencia lógica queda caracterizada recurriendo a aspectos formales de ese lenguaje. Estos aspectos formales quedan capturados por las deducciones estructurales. Sobre la base de estas deducciones es que se entiende el significado de las constantes lógicas.

Así, la teoría lógica pasa a ser una teoría sobre la manipulación simbólica considerada como una combinatoria (esta perspectiva no debería sorprender tanto, si se tiene presente el carácter puramente formal de la consecuencia lógica). Se habrá podido notar que un componente en la interpretación Bolzano-Tarski de la consecuencia lógica no ha sido mencionado. Me refiero a la *transmisión de la verdad*. Desde esta perspectiva, esta propiedad resulta secundaria respecto de la definición, en el sentido de ser una propiedad derivada.

Uno se ve tentado a interpretar esta concepción de las constantes lógicas en términos de lo que llamaré un *formalismo extremo* acerca de la naturaleza de la lógica.

En efecto, puede entenderse que las constantes lógicas son sólo índices de deducciones estructurales entendidas como *estructuras puramente simbólicas*, es decir, formadas por símbolos y determinadas por medio un cálculo formal. De este modo, las constantes lógicas funcionan como *resúmenes* o *abreviaturas* de ciertas estructuras simbólicas generadas en un cálculo formal. Dicho brevemente, el secuente S : T, A&B resume las deducciones estructurales dadas por los secuentes S:T, A y S: T, B .

Ahora bien, en esta presentación no se ha discutido la validez de principios lógicos ni se ha privilegiado lógica alguna. El hecho de haber comenzado analizando la interpretación

Bolzano-Tarski de la consecuencia lógica no significa que se presuponga la validez de la lógica clásica. Por el contrario, la presentación ha querido ser neutral respecto de "cuál lógica" es la "auténtica". Sin embargo, la concepción de la consecuencia lógica basada en las deducciones estructurales –tal como ha sido expuesta- pone en tela de juicio a la lógica clásica. Aceptando la definición dada de secuente y tomado como principios la separabilidad de las constantes lógicas y la extensión conservativa, no es posible obtener todos los principios clásicos.

Por ejemplo, la ley de Peirce, $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$, no se obtiene a partir de las reglas de equivalencia dadas anteriormente para el condicional. De todos modos, este es un problema que queda fuera de los objetivos de este trabajo[7].

La exposición precedente muestra un vínculo estrecho entre este análisis de las constantes lógicas por medio de deducciones estructurales y algunas ideas semánticas preformales tales como que los enunciados se usan para hacer *afirmaciones*. Por lo tanto, la noción de consecuencia lógica resultante elucida también el *contenido* implicado en la idea preteórica de consecuencia lógica. Pero además debe mencionarse como un resultado valioso el hecho de que esta perspectiva ofrece una teoría *única* tanto para analizar esta idea como para desarrollar métodos formales que establezcan a un enunciado como consecuencia lógica de otros. Por esta razón, no sólo se cumple el ideal de adecuación, sino que lo hace de una manera más natural. La distinción entre un enunciado y su afirmación se vuelve esencial, de modo que ocupa un lugar central y exige ser elucidado. Espero haber logrado mostrar que en la elucidación de la consecuencia lógica no es necesario

[7] Aquí se han adoptado secuentes *singulares*, con un único sucedente. Como es sabido, en el caso de emplear secuentes *múltiples*, tal como hace Dosen en 1994, las reglas de equivalencia hacen válidos enunciados clásicos como la ley de Peirce. Otro problema que es dejado de lado es el de considerar relaciones de consecuencia para las cuales no vale una o más de las reglas estructurales (que son la base para construir *lógicas subestructurales*).

recurrir a una instancia "objetivista", como la que se da en la concepción de Tarski.

Abstract

The aim of this paper is to suggest that the conception of logic based on the idea structural deductions represents a feasible approach to elucidate the notion of logical consequence from a non-objetivistic way. Besides, Kosta Dosen´s account of logical constants as "punctuation marks" is discussed and justified in terms of the linguistic deductive practice.

Referencias

Alchourrón, Carlos. E.1995: "Concepciones de la lógica". En *Lógica*, (vol. 7 de la *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*), comp. por Carlos E. Alchourrón, José M. Méndez y Raúl Orayen. Madrid, Trotta, pp. 11-47.

Aristóteles, *Topica*. En *Aristotelis Opera*, edición de Immanuel Bekker. Berlín, 1831-1870.

Bolzano, Bernard. 1837. *Wissenschaftslehre*. Sulzbach, Seidelschen Buchhandlung. Reimpresión parcial en *Bernard Bolzanos Grundlegung der Logik*, comp. por Friedrich Kambartel. Hamburg, Felix Meiner, 1978.

Carnap, Rudolf. 1950. *Logical Foundations of Probability*. Chicago, The University of Chicago Press.

Dosen, Kosta. 1994. "Logical Constants as Punctuation Marks". En *What is a Logical System?* comp. por Dov. M. Gabbay. Oxford, Oxford University Press, pp. 273-296.

Gentzen, Gerhard. 1935 "Untersuchungen über das logische Schließen". *Mathematische Zeitschrift* 39, pp. 176-210 and 405-431.

Martin-Löf, Per. 1996. "On the Meanings of the Logical Constants and The Justification of Logical Laws". *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1, pp. 11-60.

Prawitz, Dag. 1971. "Ideas and Results in Proof Theory" En *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, comp. por J. E. Fenstad. Amsterdam-Londres, North-Holland, pp. 235-307.

Prawitz, Dag. 1985. "Remarks on Some Approaches to The Concept of Logical Consequence". En *Synthese* 62, pp. 153-171.

Seoane, José. 1999. "Todos los modelos". Trabajo presentado al *III Colóquio Conesul. Filosofia das Ciencias Formais. Calcular, Construir, Demonstrar*, Santa Maria (Brasil), 19-22 de septiembre de 1999.

Tarski, Alfred. 1930. "Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaftten I". En *Monatsheft für Mathematik und Physik* 37, pp. 361-404. Trad. inglesa "Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences" en Tarski 1983, pp. 60-109.

Tarski, Alfred. 1936. "Über den Begriff der logischen Folgerung". *Actes du Congrès International du Philosophie Scientifique*. VII. Paris, Hermann & Cie., pp. 1-11. Trad. inglesa "On The Concept of Logical Consequence" en Tarski 1983, pp. 409-420.

Tarski, Alfred. 1983. *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*, comp. por John Corcoran y trad. por J. H. Woodger. 2da. ed., Indianapolis, Hackett.

Tenannt, Neil. 1987. *Anti-realism and Logic*. Oxford, Clarendon Press.