

JUL. / 2002. 1995

Ángela Maria Paiva Cruz  
Departamento de Filosofia UFRN

## ASPECTOS DA LÓGICA RELEVANTE NUMA PROVA POR REDUÇÃO AO ABSURDO<sup>1</sup>

ÂNGELA MARIA PAIVA CRUZ\*

DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA DA UFRN

### RESUMO

Neste trabalho analisam-se as fórmulas geradoras de paradoxos presentes na Prova por Redução ao Absurdo. A definição clássica do condicional ( $\rightarrow$ ) não traduz satisfatoriamente a noção de implicação. Tal fato dá origem aos paradoxos da implicação material, cujas conseqüências podem ser analisadas em todos os contextos que dele se utilizam. Em particular, a prova por redução ao absurdo utiliza-se de algumas fórmulas geradoras de paradoxos. Coloca-se a Lógica Relevante (que teve origem nos trabalhos de ACKERMANN (1956)) como uma forma de superação de tais paradoxos, uma vez que esta lógica constitui-se numa teoria da implicação e como tal procura estabelecer as condições necessárias e suficientes para se afirmar que "um enunciado A implica um enunciado B". Por fim, considerando-se que os matemáticos, sempre que necessário, usam o referido tipo de prova, aponta-se a necessidade da construção de uma matemática relevante.

### 1. A DEFINIÇÃO CLÁSSICA DO CONDICIONAL E OS PARADOXOS DA IMPLICAÇÃO MATERIAL

Toda estrutura das provas matemáticas se fundamenta na Lógica Clássica e dentre os conectivos desta lógica (ou seja, dentre a

\* Membro da base de pesquisa em Lógica e Epistemologia.  
Especialista em Lógica.

<sup>1</sup> Comunicação apresentada na VI Semana de Matemática da UFRN, realizada em setembro de 1994.

negação, a conjunção, a disjunção, o condicional e o bicondicional) o condicional ( $\rightarrow$ ) é o mais importante. Este conectivo é expresso por “se ... então ...”, e lido muitas vezes como “implica”.

Define-se o condicional da seguinte forma:

Sejam A e B enunciados simples. O condicional de A e B é um enunciado falso quando o valor lógico de A é verdadeiro e o valor lógico de B é falso e é um enunciado verdadeiro nos demais casos. Representa-se o condicional de A e B por  $A \rightarrow B$ , onde A é o antecedente e B é o conseqüente (MENDELSON, 1987:11).

Esta definição diz que:

1. sempre que o conseqüente é verdadeiro, o condicional é verdadeiro independente do valor lógico do antecedente;
2. sempre que o antecedente é falso, o condicional é verdadeiro, independente do valor lógico do conseqüente.

Se o condicional é interpretado como implicação (ou imposição) a definição acima tem as seguintes conseqüências:

- a) o verdadeiro implica o verdadeiro
- b) o verdadeiro não implica o falso
- c) o falso implica o verdadeiro
- d) o falso implica o falso:

Em forma de tabela de verdade isto significa:

A	$\rightarrow$	B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

Prova-se através de tabelas de verdade que as fórmulas:

- 1)  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

$$2) (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim A \vee B)$$

$$3) (A \wedge \sim A) \rightarrow B$$

são válidas, isto é, são verdadeiras para toda atribuição de valores de verdade e pode-se interpretá-las como segue:

1' A ser verdadeiro implica que qualquer enunciado B implica A

2' A implica B se, e somente se, A é falso ou B é verdadeiro

3' Uma contradição  $(A \wedge \sim A)$  implica qualquer enunciado B.

Esta interpretação não traduz a noção intuitiva de implicação. Tal situação caracteriza o que os lógicos chamam de "paradoxos da implicação material" (COPL, 1978:255).

Analisando-se a estrutura lógica da prova por Redução ao Absurdo<sup>2</sup> percebe-se que nela utiliza-se as fórmulas (1) e (2), geradoras dos paradoxos. Discute-se a seguir as conseqüências da utilização destas fórmulas na referida prova.

Diante dos paradoxos tem-se duas considerações possíveis:

1) os paradoxos são inócuos, e assim não há problema algum a ser resolvido;

2) os paradoxos não são inócuos, isto é, existe pelo menos um problema que pode ser apontado: o condicional clássico não traduz satisfatoriamente a noção intuitiva de implicação.

Admitindo a possibilidade (2) pode-se apresentar duas formas de superação dos paradoxos:

2.1) Considerando-se a posição dogmática, que defende a unicidade da lógica efetua-se modificações na definição do con-

<sup>2</sup>A estrutura de uma Prova por Redução ao Absurdo encontra-se no Artigo intitulado "A Prova por Redução ao Absurdo na Lógica Clássica", desta Revista.

dicional ou explicita-se melhor o seu significado sem mudar a lógica;

2.2) Considerando-se a posição dialética, que defende a pluralidade da lógica percebe-se a necessidade de uma lógica desviante<sup>3</sup> que traduza de modo mais adequado a noção de implicação (COSTA, 1980:17).

Adota-se neste trabalho a posição (2.2) e estuda-se a lógica relevante como forma de superar os paradoxos.

## 2. A LÓGICA RELEVANTE

As lógicas relevantes introduzidas por ACKERMANN (1956) e desenvolvidas por ANDERSON e BELNAP (1975) pretendem constituir-se numa teoria da implicação, ou seja, elas tentam estabelecer as condições necessárias e suficientes para afirmar-se que "um enunciado A implica um enunciado B" ou "A impõe B".

Colocam-se aqui as idéias básicas destas lógicas. Quando a expressão "se A então B" significa que "B se infere de A", então  $A \rightarrow B$  deve ser verdadeiro somente quando "A é relevante para B".

Segundo ANDERSON e BELNAP (1975: 3 - 106) a implicação  $A \rightarrow B$  deve satisfazer duas condições essenciais:

1. Condição de relevância: Se  $A \rightarrow B$  é demonstrável<sup>4</sup> então A e B têm pelo menos uma variável proposicional em comum.

2. Condição de necessidade: Se  $A \rightarrow B$  é verdadeira, então ela o é necessariamente, pois depende de fatores lógico-formais.

<sup>3</sup> Considera-se lógica desviante toda lógica que derroga pelo menos um dos princípios básicos da lógica clássica, ou seja, toda lógica onde não vale o princípio da identidade, ou o princípio do terceiro excluído, ou o princípio da não contradição.

<sup>4</sup> O conceito de demonstrabilidade é definido de modo usual, sugere-se ver MENDELSON, p. 28.

Apresenta-se a seguir o sistema de lógica relevante  $E_1$  ( cujos postulados são aqueles do sistema E de ANDERSON e BELNAP, p. 231, retirando-se o E7 ) que constitui-se dos seguintes itens:

**LINGUAGEM:**

**Conectivos lógicos:**  $\sim$  ( negação ),  $\wedge$  ( conjunção ),  
 $\vee$  ( disjunção ),  $\rightarrow$  ( condicional )

**Símbolos auxiliares:** ( , )

**Conjunto infinito enumerável de variáveis proposicionais.**

**A noção de fórmula é definida de modo usual.**

**POSTULADOS ( axiomas e regras de inferência):**

$$P1. ((A \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow B$$

$$P2. (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$P3. (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$P4. A \wedge B \rightarrow A$$

$$P5. A \wedge B \rightarrow B$$

$$P6. (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$$

$$P7. A \rightarrow A \vee B$$

$$P8. B \rightarrow A \vee B$$

$$P9. (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$$

$$P10. A \wedge (B \wedge C) \rightarrow (A \wedge B) \wedge C$$

$$P11. (A \rightarrow \Box \sim A) \rightarrow \Box \sim A$$

$$P12. (A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow \sim A)$$

P13.  $\sim\sim A \rightarrow A$

P14.  $A, A \rightarrow B / B$  (Regra de Modus Ponens)

P15.  $A, B / A \wedge B$  (Regra da Conjunção)

As noções de prova e teorema são definidas de modo usual.

### 3. CONCLUSÃO

Neste sistema não valem as fórmulas 1)  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ , 2)  $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim A \vee B)$ , 3)  $(A \wedge \sim A) \rightarrow B$ , entre outras, que são geradoras de paradoxos. Assim elas não podem ser utilizadas nas provas por redução ao absurdo de fórmulas da linguagem do sistema  $E$ .

Portanto, as provas por Redução ao Absurdo estão de certo modo "destruídas". O que pode significar a inexistência desta técnica de prova na matemática relevante.

A reconstrução das provas matemáticas com base na lógica relevante não é tarefa fácil, no entanto, tal reconstrução extrapola o âmbito desta discussão.

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ACKERMANN, W. *Begründung einer strenger implikation*. The Journal of Symbolic Logic, v.21, 1956, 113 - 128.
2. ANDERSON, A.R., BELNAP, N.D. *Entailment, the logic of relevance and necessity*. Princeton: Princeton University Press, v.1., 1976.
3. COPI, Irving M. *Introdução à lógica*. São Paulo: Mestre Jou, 1978.
4. COSTA, N.C.A. da. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. São Paulo: HUCITEC USP, 1980.

5. MENDELSON, Elliot. *Introduction to mathematical logic*.  
3 ed, California: Wadsworth, 1987.