



Control de sistemas caóticos

JUAN ÁNGEL RODRÍGUEZ LIÑÁN*, JESÚS DE LEÓN MORALES*

El estudio de sistemas caóticos es de gran interés, debido a que el fenómeno de caos se presenta en sistemas o procesos dinámicos importantes. Un sistema caótico es dinámico, extremadamente sensible a sus condiciones iniciales, por lo cual su comportamiento es prácticamente impredecible. Esto significa que las trayectorias de las variables (estados) del sistema, con determinadas condiciones iniciales, son muy diferentes a las trayectorias correspondientes a un pequeño cambio en dichas condiciones iniciales, como en el caso de la turbulencia de fluidos, en la dinámica meteorológica, en algunos procesos biológicos, entre otros.¹⁻³

Por otra parte, el control de caos consiste en el diseño de estrategias que permiten asignar dinámicas deseadas a sistemas caóticos. En el control de caos existen dos problemas básicos: supresión y sincronización de caos.

La supresión de caos consiste en la estabilización de las trayectorias de un sistema caótico alrededor de algún punto de equilibrio o en una órbita periódica, y es importante debido a que las oscilaciones erráticas de un sistema caótico son impredecibles y pueden producir daños. Actualmente se estudia la supresión de caos en tratamientos de desórdenes cardíacos⁴ y epilepsia,¹ en sistemas de láser,⁵ en mecatrónica⁶ y otros.

La sincronización de caos consiste en un régi-

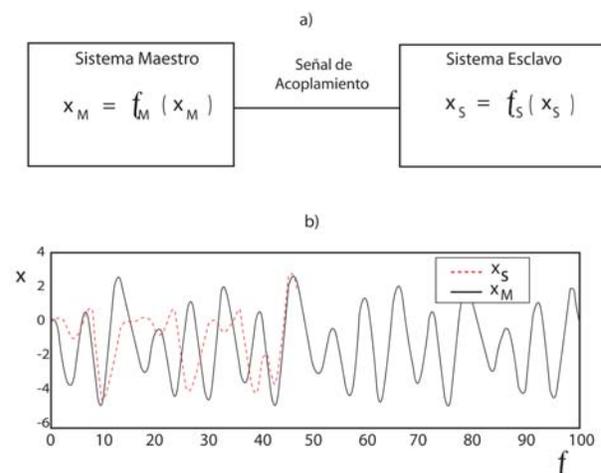


Fig. 1. a) Esquema de sincronización, b) trayectoria del esclavo x_S sincronizada con la trayectoria del Maestro x_M .

men en el cual dos sistemas caóticos acoplados (uno llamado maestro y otro llamado esclavo), después de un tiempo de transición, exhiben oscilaciones caóticas idénticas (ver figura 1). Este comportamiento aparece en muchos procesos naturales, como la relación entre las neuronas¹ y la sincronización del corazón y los pulmones,^{4,7} por citar algunos. La sincronización puede resolverse, desde el punto de vista de control, diseñando el sistema esclavo mediante un observador de estados, el cual es dinámico y capaz de estimar las variables del sistema maestro. Existe gran interés en la sincronización de

* Doctorado en Ingeniería Eléctrica, FIME-UANL.
Correo electrónico: angelrdz@gmail.com, drjleon@hotmail.com

sistemas caóticos, ya que es deseable realizar importantes aplicaciones para transmisión segura de información^{1,8} en servicios como: enlaces de comunicación militar y empresas privadas, transacciones financieras, operaciones comerciales con firmas electrónicas por Internet, entre otros (ver figura 2);

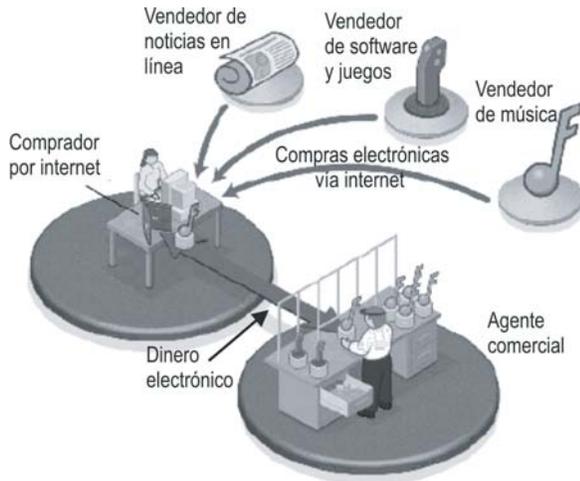


Fig. 2. Esquema comercial que requiere seguridad informática.

información de todos los estados del sistema para aplicar alguna estrategia de control, aunque no siempre es el caso. En muchos casos prácticos sólo se dispone de información parcial de los estados. El problema se agudiza cuando se desconocen algunos parámetros del sistema.

Para evitar estas limitaciones, en este trabajo se estudia un esquema de control basado en observadores adaptables para supresión y sincronización de caos en una clase de sistemas denominada clase P. En este estudio se considera que la incertidumbre o indisponibilidad de los estados y parámetros se compensa mediante un observador adaptable, lo cual permite realizar sincronización de caos en la clase de sistemas estudiada, diseñando el sistema esclavo como el observador adaptable. Por otra parte, basados en los estados y parámetros estimados, se diseña un controlador que permite la supresión de caos en dicha clase de sistemas. Este artículo se organiza así: en la sección 2 se presenta la clase de sistemas considerada en este trabajo; en la sección 3 se diseña un observador adaptable que permite la sincronización de una clase de sistemas mediante la estimación de sus estados y parámetros desconocidos; en la sección 4 se presenta una estrategia de

control que permite suprimir la dinámica caótica de la clase de sistemas P; en la sección 5 se implementa el esquema de control presentado para un sistema de la clase considerada en este trabajo; en la sección 6 se muestran resultados de la implementación del esquema mediante simulaciones y pruebas experimentales; finalmente se exponen algunas conclusiones.

Sistemas caóticos de clase P

Malasoma,⁹ considerando el trabajo de J. Sprott,¹⁰ reportó seis ecuaciones diferenciales de la forma $\ddot{x} = J(x, \dot{x}, \ddot{x})$, con soluciones caóticas, cada una de éstas definida por una función polinomial constituida por tres monomios, incluida una no-linealidad cuadrática. Dos de estas ecuaciones son polinomios no lineales de la forma:

$$(1) \quad \ddot{x} + \alpha \dot{x} + x - \varphi(x, \dot{x}) = 0$$

donde $\varphi(x, \dot{x}) = \dot{x}^2$ o $\varphi(x, \dot{x}) = x\dot{x}$. La ecuación (1) puede ser escrita en una representación en espacio de estados como un sistema dinámico polinomial, definiendo $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, y $x_3 = \ddot{x}$. De esta manera, (1) constituye una familia de sistemas con cinco monomios en su lado derecho, con cuatro coeficientes que pueden ser ± 1 por escalamiento de las tres variables y el tiempo, y con un parámetro único relacionado al amortiguamiento $\alpha > 0$. Entonces, se deriva una colección⁹ de sistemas dinámicos de (1). Todos estos sistemas pueden agruparse en una clase, mediante C^k -equivalencias de campos vectoriales,¹¹ llamada clase P. Además, todos estos sistemas exhiben comportamiento caótico⁹ para el mismo rango del parámetro α , que se encuentra en el intervalo: $2.0168 < \alpha < 2.0577$.

Diseño de un observador adaptable afín en el estado

El problema de sincronización de sistemas caóticos puede resolverse como un problema de observación, si se diseña el sistema esclavo como un observador del sistema maestro, y se considera el error de estimación como el error de sincronización. Un observador adaptable es un sistema dinámico, cuya función es estimar tanto el vector de estado como el

vector de parámetros a partir de las señales de entrada y salida del sistema observado (Planta), (ver figura 3).

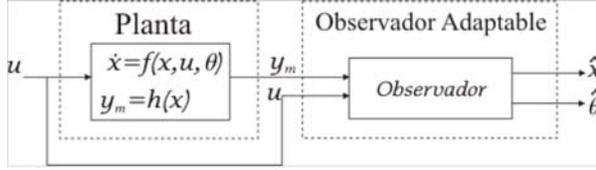


Fig. 3. Esquema de un observador adaptable.

Entonces, se presenta el diseño de un observador adaptable para el caso de sistemas afines en el estado que dependen de parámetros desconocidos en una forma afín, con la finalidad de utilizarlo en los sistemas caóticos clase P. Suponiendo que sólo se tiene un parámetro desconocido, se parte de resultados anteriormente obtenidos^{12,13} para diseñar un observador adaptable para un sistema afín en el estado (con parámetros inciertos) descritos por

$$\begin{cases} \dot{x} = A(u, y_m)x + \varphi(u, y_m) + \Phi(u, y_m)\theta \\ y_m = Cz \end{cases} \quad (2)$$

donde las componentes de la matriz $A(u, y_m)$ y de los vectores $\varphi(u, y_m)$ y $\Phi(u, y_m)$ son funciones continuas uniformemente acotadas dependientes de la entrada u y la salida y_m , y θ algún vector de parámetros desconocidos. Ahora, se introducen las siguientes suposiciones, con el fin de establecer los resultados concernientes al diseño del observador adaptable.¹⁴

Suposición 1. Existe una matriz variante en el tiempo acotada $K(t)$ tal que el sistema $\dot{\eta} = (A(t) - K(t)C(t))\eta(t)$ es exponencialmente estable.

Suposición 2. La solución $\Lambda(t)$ de $\dot{\Lambda}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\Lambda(t) + \Phi(t)$ es excitada persistentemente en el sentido de que existen α_1, β_1, T_1 , tales que:

$$\alpha_1 I \leq \int_{t-T_1}^{t+T_1} \Lambda(\tau)^T C^T \Sigma C(\tau) \Lambda(\tau) d\tau \leq \beta_1 I \quad (3)$$

para alguna matriz definida positiva acotada Σ .

Suposición 3. La entrada u es una excitación persistente en el sentido que existen $\alpha_2, \beta_2, T_2 > 0$ y $t_0 \geq$ tales que:

$$\alpha_2 I \leq \int_{t-T_2}^{t+T_2} \Psi_u(\tau, t)^T C^T \Sigma C(\tau) \Psi_u(\tau, t) d\tau \leq \beta_2 I \quad (4)$$

$\forall t \geq t_0$, donde Ψ_u denota la matriz de transición para el sistema $\dot{x} = Ax$, $y = Cx$, y Σ alguna matriz definida positiva acotada.

Suponiendo la condición de excitación (4) para la estimación del estado por una parte, y una condición adicional de la forma (3) con $K = S^{-1}C^T$ y S es solución de

$$\dot{S} = -\rho S - A(u, y_m)^T S - SA(u, y_m) + C^T \Sigma C$$

Entonces, un observador adaptable para (2) es dado por:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = A(u, y_m)\hat{z} + \varphi(u, y_m) + \Phi(u, y_m)\hat{\theta} \\ \quad + \{\Lambda S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T + S_z^{-1} C^T\} \Sigma (y - C\hat{z}) \\ \dot{\hat{\theta}} = S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T \Sigma (y - C\hat{z}) \\ \dot{\Lambda} = \{A(u, y_m) - S_z^{-1} C^T C\} \Lambda + \Phi(u, y_m) \\ \dot{S}_z = -\rho_z S_z - A(u, y_m)^T S_z - S_z A(u, y_m) \\ \quad + C^T \Sigma C \\ \dot{S}_\theta = -\rho_\theta S_\theta + \Lambda^T C^T \Sigma C \Lambda \end{cases} \quad (5)$$

donde $S_z(0) > 0$ y $S_\theta(0) > 0$, ρ_z y ρ_θ son constantes positivas suficientemente grandes y Σ una matriz definida positiva. Nota: si las suposiciones 2 y 3 son verificadas, entonces se asegura la invertibilidad de las matrices S_z y S_θ , las cuales son matrices simétricas definidas como positivas. Ahora, podemos establecer el siguiente resultado:¹⁵

Lema: considérese el sistema (2) y se cumplen las suposiciones 1, 2 y 3. Entonces, el sistema (5) es un observador adaptable para el sistema (2). Además, el vector de error de estimación ($e_z := \hat{z} - z$, $\epsilon_\theta := \hat{\theta} - \theta$) converge exponencialmente a cero a una razón dada por $\rho = \min(\rho_z, \rho_\theta)$.

Es claro que el sistema caótico (1) puede representarse en la forma general:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x; \alpha) \\ y_m = Cx \end{cases} \quad (6)$$

donde x es el vector de estado, y_m es la salida medida, y α es un parámetro real e incierto. Mediante un cambio de coordenadas ($z = Q(x)$), (6) puede ser transformado en un sistema afín en el estado (2),

para el cual es posible diseñar el observador adaptable (5), con el fin de estimar sus estados y el parámetro desconocido, lo cual es considerado como la sincronización de (5) a (6).

Control para supresión en los sistemas clase P

En esta sección se diseña un control linealizante por retroalimentación de estados que permite la supresión de la dinámica caótica en la clase de sistemas estudiada. Para esto, considérese un sistema caótico clase P escrito en la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x; \alpha) + g(x; \alpha)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

donde x , u , y y son los vectores de estado, entrada y salida a controlar del sistema, respectivamente. Si el sistema tiene puntos de equilibrio en su dominio y es de grado relativo $\delta=n$, puede ser estabilizado mediante un control por retroalimentación de estado dado por:

$$u = \frac{-L_f^\delta h(x) + v}{L_g L_f^{\delta-1} h(x)} \quad (7)$$

con $v = -k_1 y - k_2 \dot{y}^{(1)} - \dots - k_\delta y^{(\delta-1)}$, donde los valores de las constantes k_i ($i = \{1, 2, \dots, \delta\}$) deben ser tales que $s^\delta + k_\delta s^{\delta-1} + \dots + k_2 s + k_1$ sea un polinomio Hurwitz¹¹.

Implementación del esquema de control de caos

Ahora, con el fin de ilustrar la implementación del esquema presentado, se considera el siguiente sistema caótico descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\alpha x_3 - x_1 + x_1 x_2 + u \end{cases} \quad (8)$$

donde se hace la suposición de que $y_m = x_2$ es la única variable medible. La salida $y = x_1$ es la variable a estabilizar en el origen y u es la entrada de control, actuando en el lado derecho de (1). Entonces, para implementar el esquema control propuesto al sistema (8) se procede de la siguiente manera:

En el caso de sincronización, es necesario transformar el sistema (8) en (2), mediante un cambio de coordenadas $z = Q(x)$:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\alpha z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3(z_1 - 1) + u \\ \dot{z}_3 = z_1 \end{cases} \quad (9)$$

para el cual es posible diseñar un sistema esclavo dado por el observador adaptable(5).

Por otra parte, para el diseño del control, el sistema (8) tiene la forma (6), el cual es de grado relativo $\delta=n=3$. Entonces, la ley de control u que estabiliza al sistema (8) en el origen está dada por:

$$u = \alpha x_3 + x_1 - x_1 x_2 - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3$$

Puesto que se supuso que no se dispone de todas las componentes del vector de estados ni del parámetro, entonces es necesario reemplazarlas por sus valores estimados proporcionados por el observador, esto es:

$$u = \hat{\alpha} \hat{x}_3 + \hat{x}_1 - \hat{x}_1 \hat{x}_2 - k_1 \hat{x}_1 - k_2 \hat{x}_2 - k_3 \hat{x}_3 \quad (10)$$

Simulaciones y pruebas experimentales

A continuación se presentan resultados obtenidos al realizar la implementación del esquema de control-observador propuesto para sincronización y supresión de caos en el sistema (8). Primeramente, se muestran resultados en simulación, donde se consideró lo siguiente:

Las condiciones iniciales del vector de estados $x_1(0) = -1, x_2(0) = -1, x_3(0) = 1$.

El valor del parámetro $\alpha(0) = 2.02$.

Las condiciones iniciales del observador adaptable:

$$\hat{z}_1(0) = -5, \quad \hat{z}_2(0) = 1, \quad \hat{z}_3(0) = 5, \quad \hat{\alpha}(0) = 0.$$

$$S_z(0) = I, \quad S_\theta(0) = I, \quad \Sigma = I,$$

$$\Lambda(0) = [10 \quad 10 \quad 10], \quad \rho_z = \rho_\theta = 10.$$

Las constantes k_i , del polinomio $s^3 + k_3 s^2 + k_2 s + k_1$, fueron elegidas $k_1 = 1, k_2 = 3$ y $k_3 = 3$, tales que las raíces del polinomio son colocados en $s_1 = -1, s_2 = -1$ y $s_3 = -1$.

La figura 4 muestra la sincronización de los estados de del sistema esclavo (5) con los estados del

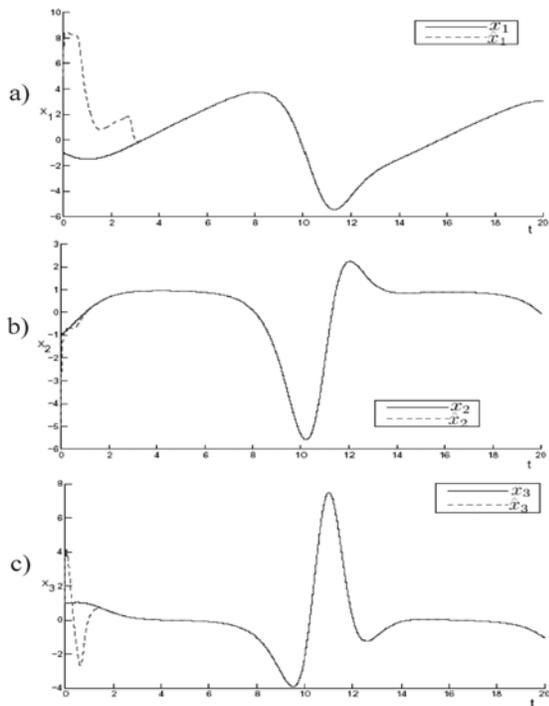


Fig. 4. Estados de (5) sincronizados (línea punteada) con los estados de (8) (línea continua), caso en simulaciones.

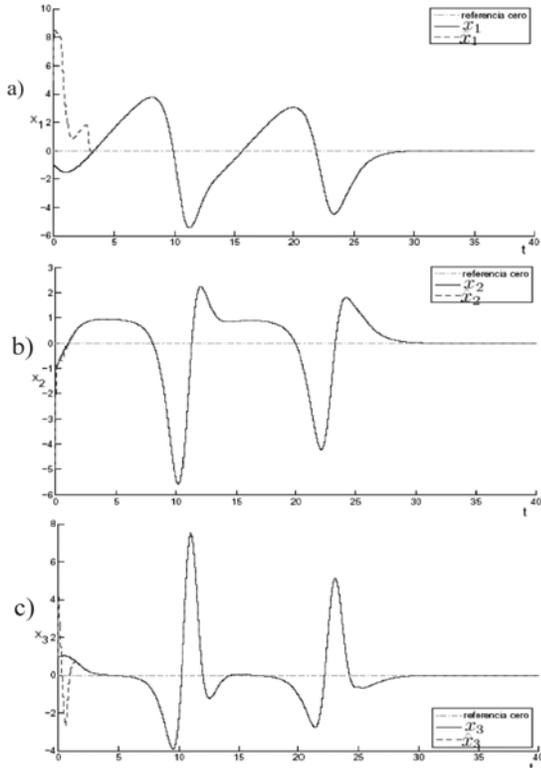


Fig. 5. Supresión de caos en (8) y estabilización en el origen a partir de $t=25$, caso en simulaciones.

sistema maestro (8). La figura 5 muestra la supresión de caos en los estados del sistema (8) mediante el esquema de control dado por (5) y (10).

A continuación se muestran los resultados obtenidos en pruebas experimentales. Se implementó el sistema (8) mediante un circuito electrónico y el esquema de control (5) y (10) en un equipo de control computacional dSpace, ilustrados en las figuras 6 y 7, respectivamente.

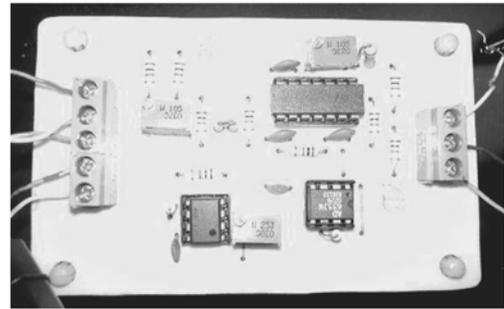


Fig. 6. Sistema (8) implementado con Op-Amps.



Fig. 7. Equipo de control dSpace.

En la figura 8 se muestra la sincronización de las trayectorias de (5) a las trayectorias de (8), donde el error de sincronización es muy cercano a cero; esto es, que la diferencia entre la línea continua y la línea punteada es prácticamente cero.

La figura 9 muestra la supresión de caos en el sistema (8) dado por el circuito de la figura 6; esto significa que, al aplicar la señal de control u dada por (5) y (10) durante un intervalo de tiempo de 14.5 a 19.5 seg., es eliminado el comportamiento caótico de las variables y éstas son llevadas al origen, es decir, a cero.

Conclusiones

En este trabajo se presentó una estrategia de control de caos para los sistemas caóticos de clase P. Puesto que la sincronización puede resolverse me-

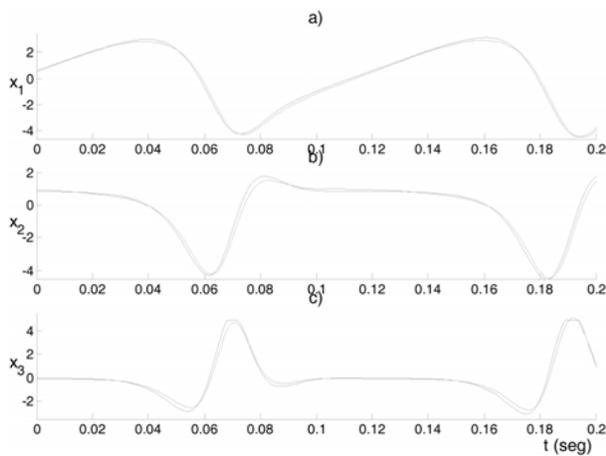


Fig. 8. Estados de (5) sincronizados (línea punteada) con los estados de (8) (línea continua), pruebas experimentales.

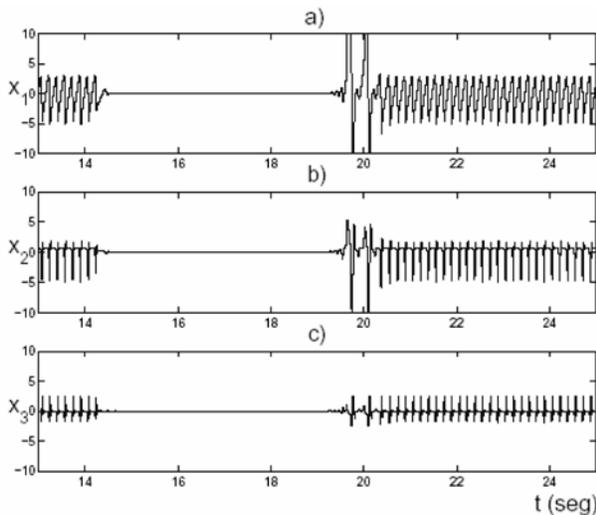


Fig. 9. Supresión de caos en (8) durante un intervalo de tiempo, pruebas experimentales.

dianete observadores, se diseñó un sistema esclavo como un observador adaptable, el cual se sincroniza con algún sistema maestro de clase P. Además, utilizando una ley de control linealizante por retroalimentación de estados, que depende de las variables estimadas por el observador, se realiza supresión de caos en la clase de sistemas estudiados. Se presentan resultados, en simulación y mediante pruebas experimentales, que muestran la eficiencia del esquema de control propuesto.

Resumen

Se presenta una estrategia para control de caos (supresión y sincronización) en una clase de sistemas.

Los sistemas estudiados, conocidos como clase P, son los más simples que exhiben caos. Se diseña un observador adaptable para una clase de sistemas afines en el estado, el cual se sincroniza con los sistemas clase P al estimar sus estados y parámetros desconocidos. Además, se considera una ley de control, dependiente de las estimaciones del observador, que permite realizar supresión en la clase de sistemas estudiada. Se presentan resultados mediante simulaciones y pruebas experimentales para ilustrar el desempeño de dichos esquemas. Finalmente se exponen algunas conclusiones.

Palabras clave: Sistemas caóticos, Supresión de caos, Sincronización de caos, Observadores adaptables, Retroalimentación de estado.

Abstract

A strategy is presented for chaos control (suppression and synchronization) in a class of systems. The studied systems, called P-class, are the simplest of those which exhibit chaos. An adaptive observer for a class of state affine systems is designed, which is synchronized with the P-class systems by estimating the immeasurable state and the unknown parameter. Moreover, a control law is considered, dependent of observer estimations, which allows chaos suppression in the studied class of systems. Simulations and experimental results are presented in order to illustrate the performance of this scheme. Finally, conclusions are exposed.

Keywords: Chaotic systems, Chaos suppression, Chaos synchronization, Adaptive observers, State feedback.

Referencias

1. B.R. Andrievskii and A.L Fradkov. 2003. "Control of chaos: Methods and applications", Automation and Remote Control, Vol. 64, No. 5, pp. 673-713.
2. J.D. Phillips. 2006. "Deterministic chaos and historical geomorphology: A review and look forward", Geomorphology, Vol. 76, pp. 109-121.

3. Weitong Huang Weimin Xue Mingyu Lu. 2006. "Analysis on Chaotic Characteristics of Weather System", The Sixth World Congress on Intelligent Control and Automation, Vol. 1, pp. 4800-4803, Dalian, China.
4. Giovanni Imponente. 2004. "Complex dynamics of the biological rhythms: gallbladder and heart cases", Physica A, Vol. 338, pp. 277-281.
5. R. Meucci et al. 2004. "Global manifold control in a driven laser", Physica D, Vol. 189, pp. 70-80.
6. O. Peñaloza, J. Álvarez, "Supresión de caos en un manipulador planar subactuado", Revista IEEE América Latina, Vol. 2, No. 1, 2004.
7. C. Schafer et al. 1999. "Synchronization in the human cardiorespiratory system", Phys. Rev. E, Vol. 60, No. 1, pp. 857-870.
8. Ángel Rodríguez, Jesús de León. 2007. "Sincronización de caos mediante observadores para cifrado en comunicaciones", Ingenierías, Vol. X, No. 34, pp. 44-50.
9. J. M. Malasoma. 1997. "A New Class of Minimal Chaotic Flows", Phys. Lett. A, Vol. 305, pp. 52-58, 2002.
10. J.C. Sprott, "Simplest Dissipative Chaotic Flow", Phys. Lett. A, Vol. 228, pp. 271-274.
11. S. Wiggins. 1990. "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos", Springer-Verlag, New York, USA.
12. Q. Zhang. 2002. "Adaptive observers for MIMO linear time-varying systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 47, No. 3, pp. 525-529.
13. H. Hammouri and J. De León-Morales. 1990. "Observers synthesis for state affine systems", in Proceedings of the 29th IEEE Conference of Decision and Control, pp. 784-785, Honolulu, Hawaii.
14. G. Besançon, J. De León-Morales, and O. Huerta. 2005. "On adaptive observers for state affine systems", Internal Report, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, France.
15. A. Rodríguez-Liñán, J. De León-Morales, R. Femat. 2007. "Chaos supresión based on adaptive observers for a P-class of chaotic systems", Chaos, solitons and fractals, Vol. 32, pp. 1345-1356.

Recibido: 7 de febrero de 2007

Aceptado: 16 de agosto de 2007