

NOTAS SOBRE LAS SERIES DIVERGENTES EN LA OBRA DE JULIO REY PASTOR*

LUIS ESPAÑOL¹
CARLOS SÁNCHEZ²

1. CUESTIONES PREVIAS HASTA 1920

Los estudios universitarios no le ofrecieron a Rey Pastor la oportunidad de tratar con las series divergentes, pero completó su formación por otros medios, entre ellos dos cursos de especialización en Alemania (1911-12 y 1913-14), aunque desde 1911 era un precoz catedrático de universidad.

Rey Pastor estudió la licenciatura en Zaragoza (1904-08), donde fue el discípulo predilecto de García de Galdeano, catedrático de cálculo infinitesimal. En las obras de su maestro encontró bibliografía actualizada, presente en buena medida en su nutrida biblioteca personal. No cabe aquí hablar con detalle del doctorado, porque lo realizó en la línea de geometría proyectiva sintética dirigida por Torroja. Pero no perdió el contacto con el análisis matemático, como lo atestiguan dos recensiones de libros de análisis aparecidos el año anterior e incorporados por García de Galdeano a su biblioteca particular. En la reseña de uno de ellos (ver referencias) Rey Pastor, recién licenciado, muestra que estaba al corriente del significado de las series divergentes y conocía al menos parcialmente la obra de algunos destacados especialistas en el tema.

Mejorar su formación en geometría y análisis fue el objetivo esgrimido ante la Junta para Ampliación de Estudios (JAE) con el fin de obtener las becas que disfrutó en Alemania. Rey Pastor solicitó y obtuvo una beca en la convocatoria de 1911 y permaneció pensionado en Berlín durante el curso 1911-12; dos cursos

* Resumen de la investigación realizada por los autores con financiación del Instituto de Estudios Riojanos en la convocatoria de 1999.

1 Universidad de La Rioja (España)

2 Universidad de la Habana (Cuba)

después repitió estancia, esta vez en Gotinga. Conviene a nuestro propósito destacar que en Berlín encontró a Frobenius y Schur, y en Gotinga a Landau y Runge, todos ellos personajes importantes en la historia de las series divergentes, aunque de momento su dedicación a esta materia no tuviera reflejo en publicaciones. En 1915 la JAE creó bajo la dirección de Rey Pastor el Laboratorio y Seminario Matemático, donde se investigó en varios temas, pero no en series divergentes, las cuales no fueron un tema de investigación para Rey Pastor hasta mediada la tercera década del siglo.

No obstante, ya en alguno de sus primeros trabajos publicados (ver las referencias) se puede ver el rastro de un cierto gusto por la sumación de series y por un tipo de calculística combinatoria que está presente en los primeros desarrollos de los métodos de sumación de series divergentes. Por otra parte, en sus conferencias del Ateneo de Madrid en 1915 auguraba un "brillante porvenir" a teorías "recientes" entre las que se encontraban las series divergentes y otras relacionadas con el análisis funcional. Finalmente, en un ensayo de 1919 sobre la investigación matemática señala que ésta avanza por cuatro caminos, "anastomosis, correlación, generalización, especialización", siendo el principal la anastomosis, "la sublime cópula de ideas", para la que menciona como ejemplo la unificación de los métodos de sumación de series divergentes.

2. LAS SERIES DIVERGENTES ANTES DE REY PASTOR, PERIODO 1901-1928

Emile Borel (1871-1956) en su obra temprana de 1895 a 1901, logró llamar la atención de los más talentosos analistas de la época sobre un tema, la sumación de series divergentes, que todavía seguía siendo tan polémico como en la época de Cauchy y Abel. Para simplificar nuestro estudio vamos a circunscribirnos a las ideas centrales sobre esta teoría que se desarrollaron en el período que media entre la obra de Borel y 1928, año en que Rey Pastor hizo públicas sus ideas en el Congreso de Bolonia.

Cuatro tendencias principales cabe señalar en el desarrollo de la teoría de las series divergentes durante el primer tercio del siglo XX:

- a. Establecimiento de nuevos métodos especiales de sumación y generalizaciones diversas de métodos ya conocidos.
- b. Análisis de equivalencia o inclusión relativa entre los diferentes métodos. Comparación de la eficacia respectiva desde el punto de vista de la prolongación analítica.
- c. Aplicaciones: a las series de Fourier, a las series de Dirichlet, a las ecuaciones diferenciales, a la física teórica.
- d. Estudio de la sumabilidad de las series en su aspecto más general, propendiendo a la unificación y sistematización de métodos.

Rey Pastor siempre se pronunció por el estudio de la eficacia de los diversos métodos en conexión con el problema de la prolongación analítica, lo que era una de las líneas fundamentales de trabajo cuando comenzó a preocuparse por esta problemática. La otra línea de investigación que, en nuestra opinión, tuvo mayor influencia en Rey Pastor es la búsqueda de un enfoque generalizado a través de algoritmos lineales. Se considera que el trabajo de O. Toeplitz [1911] representa el comienzo de una sistemática en esa dirección.

3. UNA NUEVA LÍNEA DE INVESTIGACIÓN

Incorporarse a la Universidad de Buenos Aires, manteniendo su presencia en Madrid durante los veranos australes, supuso para Rey Pastor una dedicación docente muy intensa en ambas orillas. Al hilo de sus cursos de matemática superior apareció el tema de las series divergentes, que ocuparía durante varios años a Rey Pastor y a sus discípulos españoles y americanos. Rey Pastor tiene 24 trabajos dedicados a sumación de series divergentes, la mayoría de ellos artículos publicados en Argentina, Bélgica, España, Francia, Italia y Japón. Seguidamente mencionaremos los cuatro que, en nuestra opinión, representan lo más significativo entre sus obras sobre series divergentes (ver las referencias completas al final del trabajo).

3.1. La memoria de 1931

En 1925 Rey Pastor dio un curso sobre series divergentes en Madrid que repitió un año después en Buenos Aires, donde primero apareció autografiado y por fin, tras varias dificultades, publicado con el título *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y sumación*. En esta memoria se clarifican resultados anteriores de otros autores, mostrando un amplio conocimiento de todo lo que se estaba haciendo en la materia. Además, aquí se sistematizan y se amplían varios resultados anteriormente expuestos por Rey Pastor. La escasez de citas y de bibliografía torna realmente difícil un estudio afinado de las diferentes influencias que motivaron a Rey Pastor a tomar esta línea de investigación. Pero, en el panorama internacional de su tiempo, es la única obra que adopta como proyecto unificador considerar la sumación y la convergencia como algoritmos lineales, partiendo de los resultados de la escuela alemana.

3.2. La comunicación de Bolonia, 1928

Este trabajo significa el lanzamiento de las ideas de Rey Pastor a la palestra internacional y llamaba la atención sobre lo que él y sus discípulos consideraban de mayor importancia sobre el tema: la relación con el problema de la prolongación analítica. Consideramos que fue un trabajo importante para su época, no tan distante de los trabajos de la escuela británica de Hardy, ni de otros similares en las dos orillas, europea y americana. Sin embargo, nos parece algo presuntuoso en sus críticas a Borel. Rey Pastor se esfuerza en mostrar que Borel consideraba la teoría de series divergentes independiente del problema de la prolongación, lo cual no nos parece exacto [Sánchez, 1994]. En este artículo aparecen en ciernes las principales ideas de la obra de Rey Pastor y, por ser el primero de publicación internacional, tiene sobrados méritos históricos.

3.3. El artículo de Palermo, 1931

Este breve trabajo es quizás el más citado de los que Rey escribió sobre series divergentes, pues en él se establece un nuevo método y se analiza su eficacia desde el punto de vista de la prolongación analítica. Si lo destacamos es porque otros conocedores de la obra de Rey Pastor han colocado los resultados de este artículo como su aporte principal, Pero, a nuestro entender, el artículo no aporta ideas capitales en lo referente a la unificación de la teoría a través de los algoritmos lineales, que nos parece lo más importante en la obra de Rey Pastor.

3.4. El artículo de Milán, 1933

En este extenso trabajo hace una exposición sintética de resultados anteriores, pero también introduce muchas nuevas ideas que no están en trabajos anteriores, apareciendo los principales temas generales de su obra:

- Revalorización del método euleriano.
- Uso de los factores de convergencia y sumación.
- Análisis de los problemas de inclusión relativa entre diferentes métodos.
- Uso de transformaciones lineales regulares.
- Búsqueda de relaciones con el problema de la prolongación analítica.
- Vinculación entre momentos, sumación y prolongación analítica.
- Aplicaciones diversas, en particular en el estudio de las singularidades.

Consideramos que este artículo, publicado en una revista de mayor circulación internacional que las revistas argentinas y con una madura redacción, es mucho mejor que la de la memoria de 1931 y es su obra más significativa y paradigmática en cuanto a la búsqueda de una anastomosis entre las diferentes tendencias desarrolladas en la teoría de series divergentes antes de constituirse en ciencia normal.

4. CONCLUSIONES

El interés de Rey Pastor por el problema de la sumación de series divergentes se vislumbra en los primeros estadios de su carrera profesional y tuvo oportunidad de verse reforzado durante sus dos estancias anuales en Alemania, al coincidir en Berlín y Gotinga con prestigiosos especialistas en la materia.

La obra de Rey Pastor se enmarca en las líneas principales de desarrollo matemático de la época, que no había perdido interés en el momento que aparecieron sus principales obras. Si la publicación de la memoria de 1931 hubiera tenido mejor edición y difusión sería hoy justamente señalada como la monografía precursora y mejor orientada sobre el enfoque funcional de la teoría de series divergentes. Por otra parte, los tres artículos que nos parecen principales fueron publicados en revistas italianas de difusión internacional, pero en castellano, lo que les restó divulgación.

5. BIBLIOGRAFÍA

- Dou, A., 1963. "Julio Rey Pastor", *Razón y Fe* 167, 133-146 y 273-282.
- Español, L., (ed.) 1985. *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor (Logroño 28 de Octubre - 1 de Noviembre de 1983)*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos.
- Español, L., (ed.) 1990. *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962)*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos.
- Español, L., 1998. "Relaciones internas en la obra matemática de Rey Pastor hasta 1920". En GARCÍA HOURCADE, J.L. et al. (coords.) *Estudios de historia de las técnicas, la arqueología industrial y las ciencias*, Junta de Castilla y León, vol II, pp. 965-976.

- Millán, A., 1988. *El matemático Julio Rey Pastor*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos y Colegio Universitario de La Rioja.
- Rey Pastor, J., 1907. "Algunas consecuencias de la fórmula de Leibnitz", *Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza* I, 162-167.
- Rey Pastor, J., 1909. *Reseña: Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, de P. Boutroux. En *Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza* I, 94-96.
- Rey Pastor, J., 1911. "Sobre la sumación de series", *Revista de la Sociedad Matemática Española* I(1), 10-16.
- Rey Pastor, J., 1916. *Introducción a la matemática superior*, Madrid.
- Rey Pastor, J., 1919. "La investigación matemática", *Boletín de Crítica, Pedagogía, Historia y Bibliografía* I(4), 97-108.
- Rey Pastor, J., 1928. "Prolongación analítica y sumación de series divergentes", *Atti del Congressi Internazionale dei Matematici (Bologna)*, 335-347.
- Rey Pastor, J., 1931a. *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y sumación*, Univ. de Buenos Aires.
- Rey Pastor, J., 1931b. "Un método de sumación de series", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* LV, 1-6.
- Rey Pastor, J., 1933. "Aplicaciones de los algoritmos lineales de convergencia", *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano* 7(9), 191, 222.
- Ríos, S., Santaló, L. A. y Balanzat, M., 1979. *Julio Rey Pastor; matemático*, Madrid, Instituto de España.
- Sánchez Fernández, C., 1994. "Revalorización de la obra temprana de Emile Borel sobre sumación de series divergentes", *LLULL* 17, 437-467.