ILUIL, vol. 25, 2002, 17-27

DAVIET DE FONCENEX Y LAZARE CARNOT: ¿LAS RAÍCES DIMENSIONALES DE FOURIER? ALGUNOS COMENTARIOS A MARTINS, GRATTAN-GUINNES Y GILLESPIE

FRANCISCO A. GONZÁLEZ REDONDO
Universidad Complutense de Madrid

RESUMEN

Diferentes autores se han adentrado en la Historia de la Ciencia a la búsqueda de las raíces históricas de los conceptos dimensionales introducidos por Fourier en 1822. En este trabajo analizamos críticamente las conclusiones alcanzadas por algunos de ellos: Martins, Gillespie y Grattan-Guinnes, para los cuales habría que retroceder hasta Daviet de Foncenex y Lazare Carnot para encontrar los puntos de partida de Fourier.

ABSTRACT

Diferent authors have gone into the History of Science searching for the historical roots of the dimensional concepts introduced by Fourier in 1822. In this paper we analize critically some of the conclusions advanced by Martins, Gillespie, and Grattan-Guinnes. According to them, Fourier had taken as starting point for his conceptions, the contributions of Daviet de Foncenex and Lazare Carnot.

Palabras clave: Análisis Dimensional, L. Carnot, D. de Foncenex, J.B.J. Fourier, Física, Matemática, Siglo XIX.

Recibido el 14 de diciembre de 2001 *I.S.S.N. 0210-8615*

1. Consideraciones introductorias

Ha quedado firmemente establecido en la historiografía científica [GONZÁLEZ DE POSADA *et al.*, 1991] que el origen del Análisis Dimensional —en el sentido de aplicación de «lo dimensional» en Física— se encuentra en las «Consideraciones generales» de la *Teoría analítica del calor* de J. B. J. Fourier [1822]. Sin embargo, quedan pendientes diversas cuestiones. Por un lado, cabe preguntarse si ese origen es real o debe atribuirse a algún autor anterior[1]. Si las investigaciones en este sentido no modificaran sustancialmente la visión generalizada, sigue abierta, por otro lado, la cuestión de precisar los antecedentes —conocidos o no— en los que se pudo basar Fourier para enunciar sus concepciones dimensionales.

Hasta (y durante) el siglo XVII el estudio de la evolución histórica de los conceptos básicos que emplea el Análisis Dimensional (magnitudes, cantidades, unidades, medidas, leyes y ecuaciones, y ... diversos significados del término «dimensión») debe realizarse, en general, en el ámbito de la Matemática. Durante la primera mitad del siglo XVIII, en las sucesivas contribuciones de Euler a la Mecánica de 1736, 1750 y 1760 [GONZÁLEZ REDONDO y GONZÁLEZ DE POSADA, 2001], por su importante primera matematización de la Física, puede detectarse una especie de aproximación al tema del uso del término «dimensión» en Mecánica (en Física) pero, en acuerdo con los tratadistas clásicos, podría afirmase no sólo que de hecho no sale del terreno propio, o al menos prioritariamente, matemático sino que realmente tanto la primitiva Mecánica newtoniana del «punto material» como sus primeras aplicaciones naturales al sólido rígido y a los fluidos perfectos fueron consideradas más bien como partes de la Matemática.

Históricamente, desde la perspectiva social, la Física como tal nace en torno a 1800 con los trabajos anteriores de Lavoisier y Laplace sobre el calor y los relativos a la Electricidad que pondría de moda Alejandro Volta. Es en este marco y en el histórico trabajo de naturaleza prioritariamente matemática de Fourier donde con propiedad se hará uso, rigurosa y totalmente por primera vez, de «lo dimensional» en Física.

En este artículo se consideran los trabajos de dos autores franceses, Daviet de Foncenex y Lazare Carnot, no sólo como ejemplos del quehacer en Mecánica durante el último tercio del siglo XVIII, sino porque diversos autores, respectivamente, R. A. Martins [1981], y C. C. Gillespie [1971] e I. Grattan-Guinnes [1990] han considerado que en ellos se hallaban las raíces de las concepciones dimensionales de Fourier.

Analizaremos, por tanto, las obras originales de los primeros y las opiniones de los segundos, contrastándolas con nuestra visión histórica sobre el tema.

2. Foncenex: en torno a la «dimensión» de fuerza y «ángulo»

En 1760, en un artículo titulado «Sobre los principios fundamentales de la Mecánica», Daviet de Foncenex hace la siguiente reflexión al analizar la composición de dos fuerzas, que para Martins [1981, p. 334] constituye la primera aplicación del análisis dimensional.

«Si dos fuerzas iguales, cuyas cantidades y direcciones están expresadas por las líneas *CA* y *CB* actúan sobre un cuerpo cualquiera C, es evidente que el cuerpo no podrá obedecer a las dos fuerzas al mismo tiempo, pues no puede moverse al mismo tiempo según *CA* y según *CB*; tomará por tanto una dirección *CM* diferente de *CA* y *CB*, y la línea *CM* debe dividir necesariamente al ángulo *ACB* en dos de la misma forma; puesto que las fuerzas *CA* y *CB* eran iguales por hipótesis. Todo lo que tienda a aproximar CM a CA tiende igualmente a acercar CM a *CB*. Expuesto esto, es también evidente que se puede imaginar una tercera fuerza *CM* que haga sola sobre el cuerpo C el mismo efecto que *CA* y *CB* conjuntamente. Por otra parte, la cantidad de la fuerza CM no puede depender más que de la cantidad de *CA* y *CB*, y del valor del ángulo *ACB*, y por consiguiente, si se hace $CA=CB=a$, $CM=z$, $ACB=\varnothing$, se tendrá $z = f(a, \varnothing)$.

La fuerza CM, al ser de la misma naturaleza que la CA, es preciso que contenga un mismo número de dimensiones; lo que da

$$z=CM=f(a, \varnothing)=a\, f(\varnothing), \tag{31.1}$$

porque la dimensión de $\varnothing$ es nula.

Por último, si alguien no está contento con esta clase de razonamiento, se podría exponer como un principio incontestable y evidente por sí mismo que, para un mismo ángulo $\varnothing$, la fuerza z es siempre proporcional a a. Haciendo después $dz/da=y$, se obtendría y constante, y por consiguiente $z=ay$ o bien $z= a\, f(\varnothing)$».

Esta referencia permite realizar las siguientes consideraciones críticas:

1) Foncenex afirma que: a) dos fuerzas concretas, es decir, dos cantidades físicas de la misma naturaleza (pero que tienen distinta dirección, aunque aún «lo vectorial» no está desarrollado y diferenciado), deben tener el mismo número de dimensiones; y b) la dimensión del ángulo $\varnothing$ es nula. Esto, por sí solo, no sería destacable, puesto que el término «dimensión», como he señalado en la introducción precedente, había sido utilizado con diversos sentidos anteriormente por numerosos autores (realmente, desde la Grecia clásica).

2) Se detecta claramente el sometimiento de Foncenex en sus expresiones al que se está llamando Postulado General de Homogeneidad: a) sólo son comparables cantidades de la misma magnitud; y b) todos los términos de una ecuación deben ser de la misma naturaleza[2].

3) Puede observarse que, en la segunda mitad del siglo XVIII, las representaciones geométricas de las cantidades de magnitudes físicas y las relaciones entre ellas, habituales en Newton, se ven acompañadas de expresiones ecuacionales entre medidas de dichas cantidades. Se estaba produciendo el tránsito de las relaciones de proporcionalidad entre cantidades a las igualdades entre medidas, paso imprescindible para el desarrollo real del concepto de dimensión.

4) Llama la atención cómo Foncenex utiliza, en 1760, argumentaciones que hoy podríamos considerar que constituyen un precedente de «las dimensionales» con una familiaridad ciertamente sorprendente, lo que permite inferir que para él los lectores de su trabajo entenderían unas afirmaciones que, aunque probablemente originales, no serían de una novedad radical.

5) Fourier conoce este trabajo de Foncenex, pues lo cita en su primera publicación, *Mémoire sur la statique, contenant la demostration du principe des vitesses virtuelles et la théorie des moments*, publicado en 1798 [MARTINS, 1981, p. 335].

6) Las reflexiones de Fourier se hicieron con respecto a una teoría física [nueva] de su creación, la Teoría analítica del calor. Las de Foncenex se realizaron con respecto a la Mecánica, más bien que una teoría, la única Física existente, aunque propiamente, y quizá por ello, Matemática. Las de los autores posteriores a Fourier partirán de la consideración de {L, M, T}, base usual de la Mecánica, como base prácticamente universal[3].

7) Parece claro que antes de 1760 se había producido una cierta evolución en el concepto matemático (geométrico) de dimensión hacia ámbitos físicos, pero aún está lejana la formulación clara del concepto fourieriano.

3. Acerca de unas posibles consideraciones dimensionales de Lazare Carnot, de acuerdo con Grattan-Guinnes

En la dilatada y extensa tarea de investigación de naturaleza histórica necesaria para completar la Historia del Análisis Dimensional [GONZÁLEZ REDONDO, 2000], al menos hasta su establecimiento y constitución como disciplina científica, a caballo entre la Matemática y la Física, se detecta la existencia de un libro de Ivor Grattan-Guinnes [1990], *Convolutions in French Mathematics*, en el que construye una Historia de la Física Matemática francesa de la primera mitad del siglo XIX. En ella, al estudiar el cambio del siglo XVIII al XIX, destaca en la obra de Lazare Carnot [1803] unas «alusiones dimensionales» que considera precedentes de las consideraciones posteriores de Fourier, y que supone conocidas por éste. Así, al estudiar los «principios de la mecánica» de Carnot de 1803, afirma Grattan-Guinnes [1990, p. 293]:

> «Para clarificar la plétora de términos en dinámica, Carnot hizo una lista [pp. 12-13] de sus principales términos y sus dimensiones (ver Tabla 526.1)».

Para Grattan-Guinnes, en esta lista de las páginas 12-13, Carnot «representó las dimensiones mediante m (masa), e (distancia) y t (tiempo)», de modo que e/t representaría la dimensión de la velocidad, $m(e/t)$ la dimensión de la cantidad de movimiento (momento), $(e/t)/t$ la dimensión de la fuerza acelerativa (aceleración), $m(e/t^2)$ la dimensión de la fuerza motriz (fuerza), $me(e/t^2)$ la dimensión del momento de actividad (trabajo), $m(e/t)^2t$ la dimensión de la cantidad de acción, etc.

Y, en su opinión [p. 590]:

> «La publicación de la lista de las unidades de la mecánica en el libro de Carnot (1803) puede que llevase a Fourier al análisis dimensional».

De sus referencias citadas puede deducirse que, para él, la introducción de «elementos dimensionales» para su aplicación a la Física se retrotraería unos cuantos años a la obra considerada tradicionalmente pionera de Fourier: sus «consideraciones generales» en la *Teoría analítica del calor* de 1822.

Esta referencia obligaba a recurrir a la fuente citada de Carnot de 1803, los *Principes fondamentaux de l'equilibre et du mouvement*, y a los autores actuales en los que se basa Grattan-Guinnes, citándolos expresamente; en concreto C. C. Gillespie, lo que haremos en el próximo parágrafo. Reproducimos más adelante, por tanto, la tabla original de Carnot [1803, p. 13], en la que, como podrá observarse, no aparece el término lingüístico «dimensión» en ningún sitio (como tampoco a lo largo del capítulo referido ni en el resto de la obra), para a continuación realizar las oportunas consideraciones críticas a la luz de la interpretación de Grattan-Guinnes que veíamos arriba.

Comienza afirmando Carnot [1803, pp.10-12]:

«La masa de los cuerpos, el espacio recorrido y el tiempo empleado en recorrerlo se combinan de muchas maneras en la teoría del equilibrio y del movimiento».

Por lo que «en general, si *m* representa una masa, *e* un espacio o cantidad lineal, *t* un tiempo» se tiene que

ET DU MOUVEMENT. 13

Toute quantité de la forme, ou réductible à la forme $\frac{e}{t}$ s'appelle vitesse.

Toute quantité de cette forme $m\frac{e}{t}$ s'appelle quantité de mouvement.

Toute quantité de cette forme $\frac{e}{t^2}$ s'appelle force accélératrice ou retardatrice.

Toute quantité de cette forme $m\frac{e}{t^2}$ s'appelle force motrice.

Toute quantité de cette forme $m\frac{e}{t}$, ou de celle-ci $m\frac{e}{t^2}$, s'appelle simplement force ou puissance.

Toute quantité de cette forme $m\frac{e^2}{t^2}$ se nomme force vive, moment de force motrice, ou moment d'activité.

Enfin toute quantité de cette forme $m\frac{e^2}{t}$ se nomme moment de quantité de mouvement, ou quantité d'action.

Reprenons maintenant chacune de ces notions en particulier.

En consecuencia, parece que deben hacerse unas reflexiones y consideraciones complementarias, que pueden ser las siguientes:

Primera. Lazare Carnot hace una más que aceptable —a la altura de la época— relación de *magnitudes secundarias* de la Mecánica, en la que pueden observarse, visto desde la actualidad, excesivas reiteraciones magnitudinales.

Segunda. Interesa destacar la idea tan clara que tiene Carnot del concepto de cantidad física y, por ende, de los restantes elementos del conjunto de conceptos fundamentales del Análisis Dimensional: unidad, medida y magnitud. Está perfectamente clarificado el sentido matemático y el sentido físico de los cocientes de cantidades físicas expresadas mediante los números reales asociados a las medidas en las correspondientes unidades [CARNOT, 1803, p. 11]:

> «[...] una distancia cualquiera dividida por un tiempo se llama, en general, velocidad. Dado que estas dos cantidades, el espacio y el tiempo, son heterogéneas, no se está considerando el cociente de una por la otra, sino el cociente de las relaciones que estas cantidades tienen con sus unidades [...] Esto ocurre así en todas las partes de las matemáticas cuando se trata de multiplicar o dividir cantidades heterogéneas concretas. No son las mismas cantidades las que se expresan mediante los símbolos algebraicos, sino los números abstractos que forman los cocientes de estas cantidades con respecto a sus unidades respectivas».

Tercera. Si desde el punto de vista magnitudinal sí parecen resueltos los elementos conceptuales, al menos en lo fundamental, desde el punto de vista legaliforme, en los momentos en los que se escribe el tratado de Carnot aún no se ha captado o percibido la clara distinción entre las leyes fundamentales (en este caso de la Dinámica newtoniana) y las fórmulas de definición de las magnitudes secundarias. De esta manera aparecen de forma reiterada distintas expresiones en las que participa la fuerza como si la ley fundamental de la Dinámica fuera una fórmula de definición.

Cuarta. A la luz de la reflexión precedente, y desde la consideración de que las magnitudes fundamentales de la Física —longitud, masa, tiempo— constituyen una base completa y exclusiva de los fenómenos mecánicos, expresa todas las ecuaciones significativas del momento independientemente de sus diferentes naturalezas.

Quinta. Finalmente, de ninguna manera aparece nada —en contra de lo que diga Grattan-Guinness— que tenga que ver ni explícita ni tan siquiera implícitamente, con el concepto de «dimensión», ni con un sentido preciso ni con los conceptos más o menos etéreos existentes.

4. Consideraciones complementarias de crítica historiográfica: sobre la visión de C. C. Gillespie

El origen de las afirmaciones de I. Grattan-Guinnes se encuentra en los trabajos sobre Carnot de Charles C. Gillespie [1970, 1971], quien, entre otras cuestiones, identifica el sometimiento al Postulado General de Homogeneidad, con su consecuencia, el Requisito de Homogeneidad Dimensional, con las confusiones inherentes a ello.

Efectivamente, el *Essai sur les machines en général* (1783) de Carnot y la versión posterior, los *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement* (1803), analizada arriba, pueden utilizarse para ilustrar cómo, durante el siglo XVIII, los autores dedicados a desarrollar la Mecánica newtoniana sometían sus formulaciones al Postulado de Homogeneidad. De este sometimiento, y por extrapolaciones anacrónicas, surgirán las opiniones de Gillespie, puesto que aunque destaca [1971, p. 45]:

> «Contrariamente a lo que se podía esperar de un joven ingeniero, en el *Essai sur les machines* no existen problemas numéricos ni sus soluciones, igual que no existen formulaciones aplicables en general a cualquier tipo de máquina»,

no se apercibe de que en los tratados de Carnot no aparece ninguna ley relacional que imponga ligaduras a las unidades de las magnitudes que intervienen en ella, sino que solamente se estudian principios ecuacionales [de conservación], y de éstos no pueden surgir constructos dimensionales.

Comienza Gillespie [1971, p. 35] su estudio de la primera versión (1783) de la *Ciencia de las máquinas* presentando el que considera «glosario dimensional» y realmente es una relación de fórmulas de definición de las magnitudes secundarias (1803) que no aparecían en 1783 y que se ha reproducido más arriba:

> «Quizá sea útil reproducir el glosario dimensional de los *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement*, § 18, p. 13. Denotando la masa mediante *m*, la distancia lineal mediante *e* (espacio) y el tiempo mediante t [...]».

Lo considera necesario para entender todo lo consiguiente, puesto que «incluso aquellos términos que dimensionalmente son lo que podría esperarse no tenían exactamente el mismo significado que se utilizará en el futuro». Pone el ejemplo de la fuerza newtoniana («el producto de la masa por la aceleración»), que utilizó poco. Y cuando lo hizo

> « [...] normalmente empleó la expresión ampliamente utilizada en el siglo XVIII, 'fuerza motriz', dimensionalmente idéntica a la 'fuerza muerta' o presión estática».

Con estos usos de expresiones «dimensionales», a nivel simplemente magnitudinal, y tan extendidos, es fácil explicarse el origen de las confusiones incluso hoy vigentes. Éstas quedarán más claras cuando se llegue al nivel legaliforme.

Una vez establecidas las definiciones para la mecánica de las máquinas llega Carnot a enunciar su «teorema fundamental», adaptación a un sistema de fuerzas del principio de conservación del momento de la cantidad de movimiento de un sistema de cuerpos en movimiento:

«Dado un sistema de fuerzas cualquiera, tanto en estado de reposo o de movimiento, aplicado a una máquina, si se le comunica un movimiento geométrico sin alterar las fuerzas, la suma del producto de cada una por la velocidad del punto de aplicación, evaluadas en el primer instante y en la dirección de la fuerza será cero».

Del teorema y otros resultados deduce Carnot, por ejemplo:

«En una máquina movida por pesos en la cual el movimiento está cambiando en grados inapreciables, la suma de las fuerzas vivas del sistema después de un tiempo es igual a la suma de las fuerzas vivas iniciales más la suma de las fuerzas vivas que pudiera obtener si todos los cuerpos del sistema estuvieran afectadas por una velocidad común igual a la debida a la altura desde la cual ha caído el centro de gravedad del sistema».

De tal modo que Gillespie [1971, p. 88] lo interpreta afirmando:

«Carnot tenía en mente con claridad la convertibilidad de las magnitudes expresadas en las dimensiones de la fuerza viva [energía cinética], en las del momento de actividad o fuerza viva latente [trabajo o energía potencial], pero él estaba pensando en estas cuestiones dimensionalmente más que conceptualmente»[4].

Ciertamente, resulta pintoresco por anacrónico y ahistórico, atribuir a las afirmaciones de Carnot el sentido dimensional que apunta Gillespie. Eso sí, con esta obra de 1803, se llega a los umbrales de la presentación en 1807, en la Academia de Ciencias de París, del manuscrito de Fourier con una primera versión de su Teoría analítica del Calor. En las versiones posteriores de 1811 y 1822 se irá formulando el concepto actual de dimensión de las magnitudes físicas en tanto que atributo que éstas reciben por sus ligaduras con otras magnitudes en las leyes relacionales de cada teoría física concreta, y no considerado como propiedad *a priori* e intrínseca de cada magnitud. Pero ésta es otra historia que excede las pretensiones de este artículo.

NOTAS

1 Pueden verse, entre otras, las diferentes revisiones históricas de MACAGNO [1971], MARTINS [1981] y MASON [1985].

2 Acerca de las diferencias en las caracterizaciones del Postulado General de Homogeneidad y de una de sus consecuencias lógicas, el Requisito de Homogeneidad Dimensional, debe consultarse GONZÁLEZ DE POSADA [1994].

3 Sobre este tema debe consultarse GONZÁLEZ DE POSADA y GONZÁLEZ REDONDO [1994].

4 Anteriormente, había escrito GILLESPIE [1971, p. 34]: «Uno puede ver que un tratado en el que la magnitud hoy llamada trabajo (fuerza por distancia) iba a considerarse como la medida de lo que efectúan las máquinas estaba obligado a presuponer su equivalencia con la energía cinética ($1/2MV^2$). Cómo vio Carnot que debía llegarse hacia tal convertibilidad solamente puede conjeturarse. Dimensionalmente lo deducía de la equivalencia en la ley de la caída de «*mgh*» y «$1/2mv^2$», conocida desde Galileo como el medio de igualar la velocidad que un cuerpo adquiriría al caer una cierta distancia con la fuerza necesaria para volver el cuerpo al inicio».

BIBLIOGRAFÍA

CARNOT, L. (1783) *Essai sur les machines en générale*. Paris, Dijon. (2ª ed. 1786; 3ª ed. 1797).

CARNOT, L (1803) *Principes fondamentaux de l'equilibre et du mouvement*. Paris, Bachillier.

FONCENEX, D. de (1760-61) «Sur les Principes Fundamentaux de la Mechanique». *Mél. Phil. Math. Soc. R. Turin*, 2, 299-322.

FOURIER, J.B.J. (1798) «Mémoire sur la statique, contenant la demostration du principe des vitesses virtuelles et la théorie des moments». *Journal de l'Ecole Polytechnique, 5(2)*, 20-60.

FOURIER, J.B.J. (1822) *Théorie Analytique de la Chaleur*. Paris, Firmin Didot. (2ª ed., Paris, Gauthier-Villars, 1888. Ed. cast. *Teoría Analítica del Calor*. Madrid, Grupo de Trabajo de Análisis Dimensional-Universidad Politécnica de Madrid, 1992. Trad.: Mª. D. Redondo Alvarado.

GILLESPIE, C.C. (1970) «Carnot, Lazare». En: C. C. Gillespie (ed.) *Dictionary of Scientific Biography*. New York, Scribner's, vol. 3, 70-79.

GILLESPIE, C.C. (1971) *Lazare Carnot, Savant. A monograph treating Carnot's scientific work*. New Jersey, Princeton University Press.

GONZÁLEZ DE POSADA, F. (1994) *Breviario de Teoría Dimensional*. Universidad Politécnica de Madrid.

GONZÁLEZ DE POSADA, F. y GONZÁLEZ REDONDO, F.A. (1994) «El 'núcleo lógico' del Análisis Dimensional Clásico. Claves para la comprensión y para la delimitación de su ámbito de validez». En: F.A. González Redondo y P. Dávila Álvarez (eds.) *Anuario Científico 1993*. Grupo de Trabajo de Análisis Dimensional-Universidad Politécnica de Madrid, 11-16.

GONZÁLEZ DE POSADA, F., GONZÁLEZ REDONDO, F.A. y REDONDO ALVARADO, M.ªD. (1991) «El 'origen clásico' del Análisis Dimensional: Las 'Remarques générales' en la Théorie analytique de la chaleur de Fourier». En F. González de Posada y A. Cobo Escamilla (eds.) *Anuario Científico 1990*. Grupo de Trabajo de Análisis Dimensional-Universidad Politécnica de Madrid, 157-171.

GONZÁLEZ REDONDO, F.A. (2000) *Historia del Análisis Dimensional*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.

GONZÁLEZ REDONDO, F.A. y GONZÁLEZ DE POSADA, F. (2001) «La cuantificación de la Física en el siglo XVIII». *Anuario Científico 2001*. Grupo de Trabajo de Análisis Dimensional-Universidad Politécnica de Cartagena. [En prensa].

GRATTAN-GUINNES, I. (1990) *Convolutions in French mathematics 1800-1840: from the calculus and mechanics to mathematical analysis and mathematical physics*. Basel, Birkhäuser Verlag.

MACAGNO, E.O. (1971) «Historico-critical review of Dimensional Análisis». *Journ. Franklin Inst.*, *292*, 391-402.

MARTINS, R.A. (1981) «The Origins of Dimensional Análisis». *Journ. Franklin Inst.*, *311*, 331-337.

MASON, S.F. (1985) *Historia de las Ciencias*. Madrid, Alianza, vol. 2, 56-68.