

# CONSTRUCCIÓN Y RAZONAMIENTO DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

María Candelaria Espinel Febles

mespinel@ull.es

Universidad de La Laguna

## RESUMEN

La comunicación efectiva a través de gráficas es una habilidad necesaria para todo ciudadano y debe formar parte de una cultura estadística. Nos preguntamos si los contenidos curriculares actuales son suficientes para interpretar las gráficas estadísticas que aparecen en los medios de comunicación. En esta presentación se muestran algunos resultados de nuestras investigaciones sobre las dificultades que presentan algunos gráficos para los estudiantes futuros profesores de primaria. En primer lugar, se recogen varios errores frecuentes que se cometen en la construcción de ciertas gráficas y en segundo lugar, las dificultades que encuentran cuando razonan sobre representaciones de distribuciones de datos.

## ABSTRACT

*Effective communication through graphs is a necessary ability for all citizens and should be part of a statistical culture. We ask ourselves if the present curricular contents are sufficient to interpret the statistical graphs that appear in mass media. In this presentation some results of our investigations about the difficulties that some graphs present for future primary teachers are shown. We firstly present several frequent errors that are committed in the construction of certain graphs and, secondly the difficulties that students find when reasoning about representations of distributions of data.*

---

### INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI

María Candelaria Espinel Febles (2007). CONSTRUCCIÓN Y RAZONAMIENTO DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES, pp. 99-119.

INTRODUCCIÓN

Uno de los retos de la enseñanza está en conectar con la realidad y con lo que demanda la sociedad en cada momento. Los que nos dedicamos a la enseñanza, con frecuencia tenemos la impresión que vamos por detrás de lo que la sociedad reclama. Hay que tener en cuenta que en ocasiones existe un distanciamiento importante entre la escuela y la vida cotidiana y que uno de los puentes entre ambas son los medios de comunicación. En el caso de la enseñanza de la estadística la distancia era clara, pero parece que con las distintas reformas del currículo se están dando pasos para acortar el camino.

En nuestro país, se espera que cualquier persona después de pasar por una enseñanza básica, hasta los 16 años, tenga una cultura estadística que le permita ser capaz de leer e interpretar los datos que encuentre en la prensa. Esto no siempre es así, de hecho hay gráficos y nociones elementales que utiliza la prensa que no se suelen enseñar en la escuela. Señalamos dos casos que podemos encontrar casi a diario en la prensa escrita:

- *Gráficos no cartesianos:* Hay últimamente un uso frecuente de gráficos no cartesianos, como son los círculos proporcionales colocados en un mapa, y que difiere de los clásicos sectores circulares (ver figura 1, El País, 14.5.2006).



Figura 1. Ejemplo de gráfico no cartesiano en la prensa diaria

El diseño de los círculos supone cierta dificultad, ya que se ha de elegir una escala que permita distinguir los valores más pequeños de los más grandes (Carrera y otros, 1988). En el caso de los círculos hay una proporcionalidad lineal (k) en los diámetros y cuadrática (k<sup>2</sup>) en el área. Se trata de diseñar figuras cuyas áreas son proporcionales a las cantidades que representan. Tal técnica de construcción no se contempla en estadística, ni en geometría y tampoco en otras áreas de ciencias sociales. Por otro lado, existe un problema de percepción pues el área de la figura es proporcional al cuadrado del radio (Cleveland y McGill, 1984).

Lo que está ocurriendo es que, la disponibilidad de programas informáticos lleva a que la prensa utilice una gran variedad de gráficos que muchas veces no son los gráficos cartesianos que se enseñan en las aulas. En la figura 1, se muestra una radiografía de las tiendas "todo a cien" (fuente Ministerio de Industria, Turismo y Comercio), recurriendo a todo un abanico de gráficos, pues además de los círculos proporcionales, aparecen sectores circulares y tres clases de gráficos de barras (diagrama de rectángulos para variables cualitativas, rectángulo dividido y diagrama de barras con datos agrupados en intervalos).

- *Interpretar porcentajes:* La prensa diaria nos brinda pérdidas o ganancias expresadas en porcentajes, esto es, cambios sufridos por una variable, generalmente a través del tiempo (ver figura 2, El País, 25.6.2006).



Figura 2. Ejemplo de cambio de porcentaje dado en la prensa

En la figura 2 se muestra información sobre el crecimiento de un 7% en la retribución de los consejeros. La interpretación de este gráfico es un misterio para los alumnos de 15 años, ya que no forma parte de una fórmula rutinaria a la que estén acostumbrados. Claro que alguno lo adivina por ensayo y error. La situación es que, casi a diario, la prensa escrita muestra las pérdidas o ganancias, los crecimientos o las variaciones, en forma de porcentajes que pocas personas saben interpretar y, a veces, ni calcular. Los textos escolares soslayan este tratamiento de los porcentajes, con algunas pocas excepciones como Nortés Checa (1996). Claro que, según Schield (2006), leer un “tanto por ciento” es más difícil que calcularlo.

Volviendo al tema que nos ocupa, el conocimiento de la estadística elemental y de los gráficos en la formación de los profesores de primaria, en Espinel (2000) se reflexiona sobre una posible pedagogía de los gráficos en la formación de profesores, realizando un recorrido por la fenomenología social y una reflexión epistemológica. También se incluye un análisis sobre percepción, memorización y lenguaje gráfico, desde la psicología cognitiva, para terminar con una propuesta de secuenciación del currículo en este tema.

En esta ponencia se resumen dos investigaciones sobre gráficos. La primera sobre construcción y evaluación de histogramas, desarrollada en dos fases. Y la segunda investigación, sobre representación de distribuciones de datos y razonamiento estadístico, cuyos resultados son aún provisionales.

En ambos estudios participan estudiantes para profesores de primaria de distintas especialidades de la Universidad de La Laguna (Tenerife, España). Todas las pruebas se realizan en una sesión de clase de la asignatura de Matemáticas, al finalizar el tema de estadística. En dicho tema los alumnos han trabajado sobre estadística descriptiva, aproximadamente diez horas, estudiando los gráficos estadísticos.

#### UNA EXPERIENCIA SOBRE ERRORES DE CONSTRUCCIÓN Y DIFICULTADES DE COMPRESIÓN DE LOS HISTOGRAMAS

En lo que sigue, describimos de forma breve la primera de las investigaciones citadas, que fue desarrollada en dos fases.

### Primera Fase de la Investigación

La primera fase de la investigación partía de la hipótesis inicial de que la habilidad para representar números en la recta numérica condiciona la comprensión y la realización de gráficas estadísticas. Agrupar números que tengan varios decimales en clases, para construir un histograma, requiere un claro conocimiento del orden de los números. A partir de esta hipótesis, se diseñó una prueba escrita con dos objetivos de investigación. Primero, observar cómo influye el dominio de la recta numérica en la habilidad para realizar gráficas estadísticas; y segundo, estudiar si los profesores en formación tienen dificultades para representar números decimales. Los datos para las preguntas de la prueba se tomaron de la prensa escrita, en concreto sobre el precio de los carburantes en los 25 países de la Unión Europea. La prueba constaba de seis preguntas, pero aquí sólo comentaremos la relativa a histograma y polígono de frecuencias. La prueba escrita la contestaron 39 alumnos estudiantes para profesores y los resultados se pueden encontrar en Bruno y Espinel (2005).

**Pregunta 1.** Con los datos de la gasolina 95 del “El mercado de carburantes”<sup>1</sup>, construye una tabla con las frecuencias absolutas y relativas, en la que se agrupen los datos en intervalos de igual longitud, tomando como valor mínimo 0,600 y máximo 1,300. A continuación, construye el histograma correspondiente utilizando las frecuencias relativas.

En la pregunta 1, se pide construir la tabla de frecuencias absoluta y relativa y realizar un histograma usando las frecuencias relativas con intervalos de igual amplitud. Se les pide a los futuros profesores realizarlo con la frecuencia relativa para observar cómo representaban los números decimales en el eje vertical y poder contrastar con las preguntas de la recta numérica en las que debían representar decimales con la recta horizontal.

Tabla 1. Frecuencias de respuestas a la pregunta 1

Correcto	Incorrecto			Blanco
	Tabla	Histograma	Tabla e histograma	
8	4	16	5	6

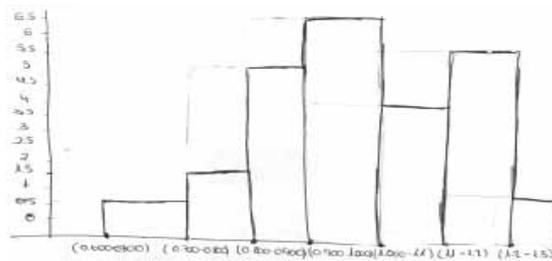
En la tabla 1 se observa que, de los 39 alumnos que participan en la experiencia, sólo 8 alumnos contestan de manera correcta esta pregunta. Entre los que responden de manera incorrecta están los que fallaron al elaborar la tabla, los que lo hacen al construir el histograma, o en ambos aspectos. Otros alumnos dejaron la pregunta en blanco. La mayoría construye el histograma con 7 intervalos y un alumno construye 4 intervalos. Solo 11 alumnos utilizan la frecuencia relativa que es la que se pedía.

En este caso, los alumnos no tuvieron dificultades para representar los números decimales en el eje vertical, sin embargo, encontramos que los alumnos tienen dificultades para colocar valores en el eje de la X, aún siendo capaces de agrupar los datos en intervalos.

Varios alumnos colocan las modalidades sin tener en cuenta que se trata de una variable agrupada en intervalos, o bien, todo el intervalo en un punto (ver figura 3), pero sin utilizar la marca de clase.

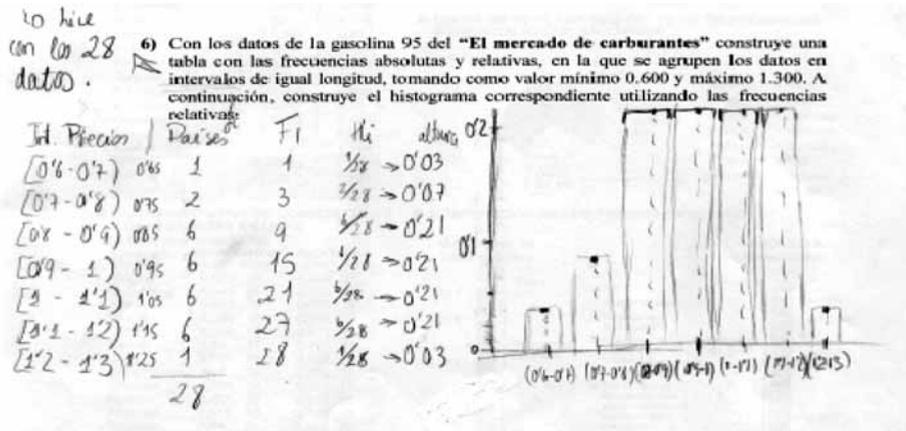
<sup>1</sup> Se proporcionó a los alumnos una tabla de precios de los carburantes de los países de la Unión Europea tomados de la prensa (El País, 10.11.2004).

Figura 3. Respuesta incorrecta de un alumno en la construcción del histograma



Los alumnos, aún siendo concientes de que están trabajando con una variable continua, representan barras no solapadas (ver figura 4).

Figura 4. Respuesta incorrecta de un alumno en la tabla y en el histograma



En resumen, los resultados de esta primera fase del estudio ponen de manifiesto que los alumnos no mostraban dificultad en leer los datos desde la prensa, ni se encontró respuestas que evidenciasen poco dominio de la recta numérica. Sin embargo, aparecen algunos errores en las gráficas, en particular, en los histogramas, que no son atribuibles a las recta numérica. Estos resultados nos llevaron a una segunda fase del estudio en la que se diseñó una prueba específica sobre histograma y polígono de frecuencias, cuyos resultados se muestran a continuación.

**Segunda Fase de la Investigación**

Se diseñó una segunda investigación utilizando una prueba escrita con dos cuestiones. En la pregunta 2 se pide construir un histograma y un polígono de frecuencias, a partir de una tabla de datos agrupados en intervalos, y en la pregunta 3 pide la evaluación de distintas representaciones gráficas. Se presentaron cinco gráficas construidas por alumnos (también futuros profesores de primaria): Cuatro de estas gráficas contenían errores y una gráfica era

correcta. Se pidió evaluarlas como *buena*, *regular* o *mala*, en función del número de errores (0, 1, 2 o más), señalando los errores observados. Las gráficas a evaluar aparecen en los resultados de la pregunta 3.

**Pregunta 2.** En un test de actitudes, puntuado de 0 a 60, pasado a 30 personas para ocupar un puesto en una empresa, se han obtenido los siguientes resultados:

Puntuación	[0-10)	[10-20)	[20-30)	[30-40)	[50-60)
Frecuencia	1	2	8	15	4

Realiza un *histograma* y un *polígono de frecuencias* con los datos anteriores.

**Pregunta 3.** En un test de actitudes, puntuado de 0 a 50, pasado a 30 personas para ocupar un puesto en una empresa, se han obtenido los siguientes resultados:

Intervalo	[0-10)	[10-20)	[20-30)	[30-40)	[40-50)
Frecuencia	1	2	8	15	4

A continuación, te mostramos las respuestas de cinco alumnos a la pregunta de realizar un *histograma* y un *polígono de frecuencia* con los datos anteriores. Evalúa la respuesta de cada alumno. Para ello, debes:

a) señalar los errores que encuentres y b) puntuar cada representación como buena, regular o mala.

El objetivo del trabajo es evaluar cómo los futuros profesores construyen un histograma (pregunta 2), clasificar sus errores, y a continuación, contrastar si dichos errores se ven ratificados en la pregunta 3, cuando evalúan las representaciones realizadas por otros estudiantes. La pregunta 3 se plantea con el objetivo de ver si los errores de construcción son persistentes, y si la lectura reflexiva de un gráfico erróneo demuestra que los futuros profesores conocen los aspectos básicos de la construcción de un histograma.

Obsérvese que las tablas de datos de las preguntas 2 y 3 cambian de recorrido. En la pregunta 2, el recorrido es de 0 a 60 con un intervalo de frecuencia nula, y el recorrido de los datos de la pregunta 3 es de 0 a 50. Esta prueba fue contestada por 29 estudiantes futuros profesores de primaria.

Los resultados divididos en tres partes se recogen en Bruno y Espinel (2007). En este trabajo, en primer lugar, se analizan los errores de los estudiantes en la construcción del histograma, en segundo lugar, se estudian las evaluaciones realizadas a cada representación de los cinco planteadas, y, por último, en una tercera parte, se muestran algunos casos de repuestas de alumnos relevantes por sus coherencias, o bien, por sus incoherencias en las respuestas. En esta ponencia mostramos algunos resultados de dicha investigación.

En la tabla 2 se muestra el número de respuestas correctas e incorrectas de los alumnos en la construcción del histograma y del polígono de frecuencias de la pregunta 2.

Tabla 2. Repuestas correctas e incorrectas de la pregunta 2

Polígono de frecuencias			
Histograma	Correcto	Incorrecto	Total
Correcto	1	9	10
Incorrecto	4	15	19
Total	5	24	29

Los datos indican que sólo un alumno representó correctamente los dos gráficos, 15 alumnos cometen errores en ambos gráficos, el resto de los alumnos, cometen errores en el histograma, o en el polígono de frecuencias.

Los principales errores en la construcción del histograma pueden agruparse en tres clases: construir el histograma con barras separadas (ver figura 5), etiquetar las barras (ver figura 5 y figura 6) y omitir el intervalo de frecuencia nula.

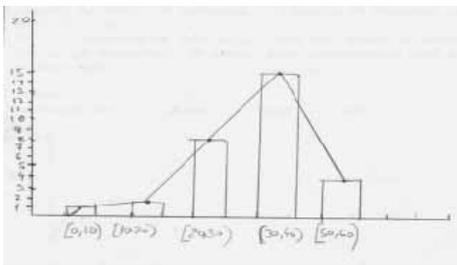


Figura 5. Histograma con barras separada

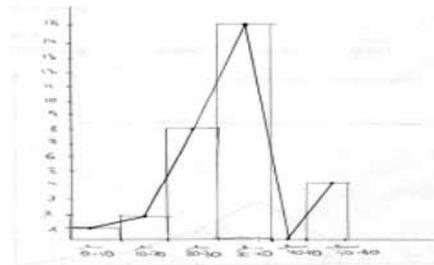
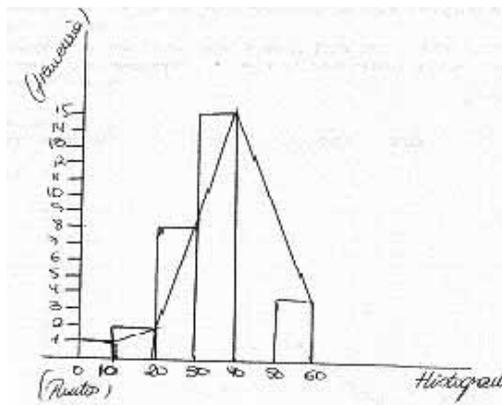


Figura 6. Incorrecta notación de los intervalos

En cuanto al polígono de frecuencias los errores más frecuentes son: no unir por las marcas de clase (figura 7), omitir el intervalo de frecuencia nula en el polígono (figura 7) y confusión entre la frecuencia y los intervalos.

Figura 7. Omisión del intervalo en blanco en el polígono



En la tabla 3, se resumen el número de alumnos que cometieron los distintos errores en la construcción de ambos gráficos.

Tabla 3. Frecuencia de alumnos que cometen errores en los gráficos

Gráfico con errores	Tipo de error	Frecuencia
Histograma	Histograma barras separadas	6
	Etiquetar las barras	9
	Omitir el intervalo nulo	4
	No unir por las marcas de clase	4
Polígono de frecuencias	Omitir intervalo de frecuencia nula	16
Ambos	Varios errores	5

En la pregunta 3, se presentó a los futuros profesores la respuesta de cinco estudiantes a una actividad en la que se pedía construir un histograma y un polígono de frecuencias, a partir de los datos de una distribución. Se les pidió que evaluaran cada representación, señalando si la creían correcta o buena, regular o mala y que señalaran los errores. El objetivo de presentar esta actividad era contrastar si los errores que cometen en la construcción de histogramas y polígonos de frecuencias se ven ratificados cuando evalúan las gráficas estadísticas elaboradas por otras personas. De las cinco representaciones presentadas, cuatro eran incorrectas y una correcta. Veamos las respuestas de los alumnos a la gráfica correcta (ver figura 8), cuya representación se espera que los alumnos la evalúen como Buena.

Figura 8. Representación correcta de las cuestión 3

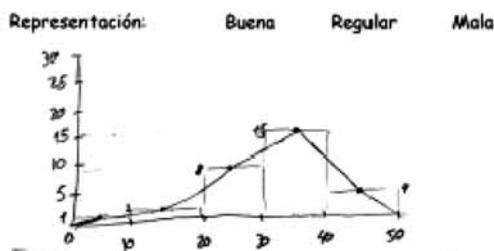


Tabla 4. Evaluación de la representación (Figura 8)

	Evaluación			
	Buena	Regular	Mala	Blanco
Nº alumnos	10	12	6	1

Los resultados se muestran en la tabla 4. Sólo hay 10 alumnos que encuentran correcto este gráfico, aunque algunos de los 12 alumnos que marcan Regular, lo justifican por la “calidad del gráfico”, en el sentido de que la escala no es apropiada, lo cual es una observación adecuada y por consiguiente podemos decir que sólo 7 alumnos hacen una evaluación incorrecta.

Lo más destacado de la evaluación de esta representación es que hay 7 alumnos, de entre los que la señalan como regular o mala, que persisten en advertir que “los intervalos están mal denotados”, requiriendo que las barras tuvieran una etiqueta. Especialmente preocupante es el caso de los alumnos que cometen errores en la construcción al responder a la cuestión 1, y luego ratifican esos errores en la evaluación de la representación de la cuestión 2. Es el caso del alumno que realiza la representación de la figura 6 con una incorrecta notación en el eje de abscisas, cuando hace su construcción del histograma, y le exige lo mismo a la representación de la figura 8, ya que la señala como Mala y lo justifica por “no estar representados los intervalos”, es decir, necesita ver las etiquetas de las barras en forma de intervalo.

A modo de reflexión, y con cierta preocupación, encontramos que a partir de un determinado momento hay conceptos que se consideran asimilados, y ese es el argumento que se esgrime para no explicar representaciones gráficas en la enseñanza universitaria. Posiblemente, tendemos a pensar que los futuros profesores de primaria han adquirido, a lo largo de su proceso de formación, una cultura estadística y, por tanto, que son conscientes que cuando se dibuja un histograma o un polígono de frecuencias a partir de un conjunto de observaciones, se obtiene una figura representativa de la manera en que se extienden, o distribuyen las observaciones a lo largo del eje X, en otras palabras, se ve la forma de la distribución. Sin embargo, sin contradecir la afirmación anterior, encontramos errores de carácter técnico, que además son persistentes como son:

- Colocar etiquetas en las barras del histograma,
- Representar histogramas con barras separadas,
- Tazo del polígono de frecuencia incompleto o
- Falta de atención a los datos atípicos.

Y lo que es más preocupante, encontramos también errores conceptuales, como no discernir lo discreto y lo continuo en el ámbito estadístico. Otros investigadores han encontrado varios de los errores mencionados en distintos niveles educativos (Biehler, 1997; Friel y otros, 2001). En particular, Lee y Meleteu (2003) indican algunas concepciones erróneas en estudiantes de universidad que coinciden con nuestra investigación.

#### RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO. DIFICULTADES PARA LEER, INTERPRETAR Y RAZONAR SOBRE GRÁFICAS DE DISTRIBUCIONES

Los errores detectados en la construcción de histogramas, en la primera investigación descrita, pensamos no tienen por qué impedir que los alumnos lean e interpreten correctamente una distribución de datos. Para analizar, si los estudiantes para profesores, son capaces de leer e interpretar histogramas correctamente, utilizamos una prueba sobre razonamiento estadístico, diseñada en el proyecto ARTIST (Assessmet Resource Tools for Improving Statistical Thinking) (delMas, Garfield y Ooms, 2005) de la que se seleccionaron y adaptamos algunas cuestiones.

Las preguntas de dicha prueba están relacionadas con representaciones gráficas de distribuciones de datos y son de dos clases, unas se refieren a *cultura estadística* y otras a *razonamiento estadístico*. Estos términos, de cultura y razonamiento estadístico han sido ampliamente debatidos y hoy se consideran consensuados por distintos investigadores (delMas, 2002). La *cultura estadística* implica conocer y utilizar el lenguaje y las herramientas básicas de la estadística, tales como media, símbolos estadísticos, además de ser capaz de

razonar y de interpretar representaciones de datos. El *razonamiento estadístico* es la forma en que las personas manejan las ideas estadísticas y dan sentido a la información estadística. Este razonamiento supone conectar un concepto estadístico con otro (por ejemplo, centro y dispersión) y puede combinar ideas sobre datos y azar.

La prueba original en la que nos basamos consta de 14 preguntas de respuestas múltiples. En la investigación de delMas y otros, se recogieron datos de estudiantes de la escuela superior y de “college” y universidades de USA en el año 2005. Para la investigación, que se recoge a continuación, adaptamos cinco preguntas de dicho cuestionario, dos sobre cultura estadística, dos de razonamiento y una sobre ambos aspectos.

En este estudio se presentan cada una de las cinco preguntas propuestas, acompañada de la tabla de resultados de delMas y otros (2005) en los “college”, para una muestra de 345 estudiantes americanos, y los resultados de la investigación en futuros profesores, para una muestra de 137 estudiantes españoles. Para cada una de las cinco preguntas hay una tabla de resultados que recoge en la primera columna las opciones que tienen los estudiantes para elegir, y está marcada la respuesta correcta con negrita. Las dos columnas siguientes de las tablas, con las etiquetas “College” y Maestros, presentan la proporción de estudiantes americanos y españoles, respectivamente, que han elegido cada una de las opciones.

Los datos de estudiantes para profesores de la Universidad de La Laguna (Tenerife) corresponden el curso 2007 y es una experiencia en la que se está trabajando en la actualidad. Las cinco preguntas con los resultados se presentan agrupadas según evalúen la cultura estadística, razonamiento estadístico o ambos.

#### Cultura estadística. Leer un gráfico

En la pregunta 4 se presenta un histograma para leer la frecuencia. En los “college” sólo una cuarta parte de los estudiantes americanos contestan correctamente y hay un 40% que dejan la pregunta sin contestar. Por el contrario, muy pocos (2%) son los estudiantes para profesores que dejan esta pregunta en blanco. Parece que muchos suman sencillamente la frecuencia de las dos últimas barras ( $3+4 = 7$ ) y, por tanto, eligen como respuesta correcta la opción b. Algunos alumnos eligen la respuesta c, pero sin tener constancia de si llegan a utilizar las frecuencias acumuladas. El éxito, casi un 40%, entre los futuros profesores es notable y, de hecho, es la única pregunta en la que tienen mejores resultados que en los “college” (24%). DelMas y otros, consideran que los estudiantes de los “college” tienen dificultades para leer frecuencias en el histograma en esta pregunta por estar los datos agrupados en intervalos, y también por no aparecer en el eje de abscisas el valor 15 de la pregunta.

**Pregunta 4.** La puntuación de una prueba se calcula por el número de respuestas correctas. El siguiente gráfico muestra los resultados de un grupo de alumnos en la prueba. ¿Cuántos alumnos han obtenido una puntuación por encima de 15?

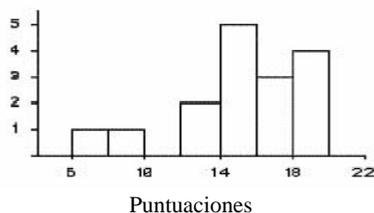


Tabla 5. Frecuencias de respuestas a la Pregunta 4

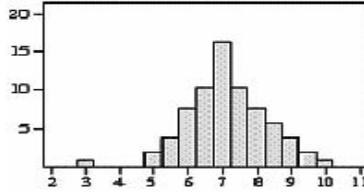
Respuesta	“College”	Maestros
a. 6	4,1	5,8
<b>b. 7</b>	<b>23,8</b>	<b>39,4</b>
c. 12	30,4	48,2
d. 15	1,4	4,4
Blanco	40,0	2,2

Desde nuestro punto de vista, la dificultad se encuentra en que la pregunta plantea leer una variable discreta, el número de respuestas correctas, que está representada como variable continua mediante un histograma. Los alumnos que consideran la variable como discreta, es decir, sólo consideran la posibilidad de un número de puntos enteros, eligen la opción b. Mientras que si la variable se ve como continua y agrupada en intervalos, se pueden hacer dos interpretaciones diferentes: la primera que la barra del intervalo  $[14,16)$  tiene frecuencia cero, para el caso pedido en la frase del enunciado de la pregunta “por encima de 15”, lo cual es correcto. O bien, no ven, ninguna de las cuatro opciones a elegir como respuesta correcta, y recurren a las frecuencias acumuladas o al polígono de frecuencia acumuladas, e interpolan. En este caso, la respuesta es que hay 9 o 10 alumnos con más de 15 puntos, solución que no está en las elegibles. Pensamos que quizás el alto porcentaje de blancos, 40%, en los “college” se debe a que, en esta interpretación, la respuesta correcta no está entre las elegibles. En el caso de los estudiantes para profesores, ante este dilema de no encontrar la respuesta correcta entre las cuatro presentes, muchos alumnos, casi la mitad, se inclinan por elegir la opción c, que es el número que más se aproxima a leer el histograma de una variable continua, si se hace la anterior interpretación.

### Cultura estadística. Interpretar un gráfico

En la pregunta 5, se muestra un gráfico de una distribución de datos y se pide elegir la interpretación estadística más apropiada, entre una serie de frases dadas. La mayoría de los estudiantes eligen la interpretación más adecuada al histograma y que describe mejor la distribución teniendo en cuenta la forma, centro y recorrido de los datos. Tanto en los “college” (73%), como en los estudiantes para profesores (53%), fue una pregunta con un alto grado de éxito. Es posible que este buen resultado esté influenciado porque en la respuesta d, opción que se considera correcta, aparece el contexto del enunciado. Es llamativo que para los estudiantes americanos la segunda más elegida es la opción b, mientras que para los españoles es la opción a (25%). Que aproximadamente una cuarta parte de los estudiantes para profesores interpreten este gráfico como una “fotografía” es uno de los errores frecuentes ya detectados en los estudios sobre graficas de funciones (Shell Centre for Mathematical Education, 1993).

**Pregunta 5.** El siguiente gráfico muestra el número de horas que durmió ayer por la noche un grupo de estudiantes de universidad.



De las afirmaciones que se recogen a continuación selecciona la que da una mejor descripción estadística de los datos<sup>2</sup>.

Tabla 6. Opciones y frecuencias de respuestas en la pregunta 5

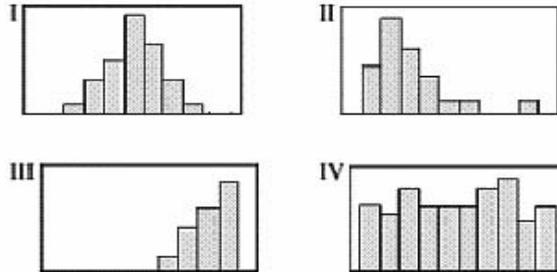
Respuesta	“College”	Maestros
a. Las barras van de 3 a 10, aumentando en altura hasta 7, después disminuyen hasta 10. La barra más alta está en 7. Hay un vacío entre tres y cinco.	4,5	24,8
b. La distribución es normal, con media alrededor de 7 y una desviación típica cerca de 1.	19,5	12,4
c. La mayoría de los estudiantes parece que duermen suficiente en la noche, pero algunos estudiantes duermen más y otros menos. Sin embargo, un estudiante deber haber permanecido despierto hasta muy tarde y ha dormido muy pocas horas.	3,1	8,8
<b>d. La distribución de horas de sueño es simétrica y tiene forma de campana, con un valor atípico en 3. La media de horas de sueño es 7 y el recorrido es 7.</b>	<b>72,9</b>	<b>53,3</b>
Blanco		0,7

### Razonamiento estadístico. Emparejar un gráfico con una descripción

En este caso (Pregunta 6) se describen tres contextos que los estudiantes han de emparejar con alguna de las cuatro gráficas mostradas. Esta pregunta es la de mayor dificultad de las planteadas en la prueba. Puede que esta complejidad la determinen los contextos y también el hecho de que en las gráficas no aparezcan escalas o valores para asociar a los contextos. De los contextos, la primera descripción (A), que alude a los puntos de un cuestionario, es la que resulta más fácil para ambos colectivos. La descripción (B) en el cuestionario original expresa: “último dígito de una muestra de los números de teléfono de una guía”. En el caso de los estudiantes para profesores, se cambió el enunciado por el último dígito de los números de lotería, ya que este contexto de lotería parece más sencillo.

<sup>2</sup> Se presenta a los estudiantes las opciones incluidas en la tabla 10.

**Pregunta 6.** Asocia cada histograma con la descripción que consideres apropiada.



Descripción A. Puntos de un cuestionario en el que las preguntas eran fáciles.

Descripción B. El último dígito del número ganador de la lotería durante un año.

Descripción C. El peso medio de un adulto sano recogido todos los meses a lo largo de dos años.

Aún así (Tabla 7), pocos alumnos asocian la descripción (B) con la distribución uniforme (IV), y no se dan cuenta que ésta presenta diez barras, asociada a los dígitos posibles. Al contrario, parece que el hecho de que aparezca en el enunciado de la pregunta la frase “último dígito”, lleva a emparejar con la distribución (II) que muestra un valor atípico, algo sin sentido. La descripción (C), sobre el peso medio de un adulto, tampoco se asocia con una curva normal y parece que la poca variabilidad del peso de un adulto es lo que les lleva a elegir la distribución uniforme (IV). En definitiva, esta pregunta muestra unos resultados muy bajos en los futuros profesores, para las tres descripciones, algo que también ocurre en los “college”, aunque en menor medida.

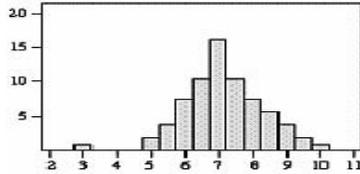
Tabla 7. Frecuencias de respuestas en la pregunta 6

Gráfico	Descripción asociada					
	A		B		C	
	“College”	Maestros	“College”	Maestros	“College”	Maestros
I	5,4	19,0	26,1	16,8	<b>24,7</b>	<b>10,2</b>
II	7,2	6,6	21,8	39,4	8,3	2,9
III	<b>69,4</b>	<b>35,0</b>	7,2	21,2	7,3	5,8
IV	18,1	32,1	<b>44,8</b>	<b>5,1</b>	59,7	62,1
Blanco		7,3		17,5		19,0

#### Razonamiento estadístico. Emparejar gráficos distintos contruidos con los mismos datos

En esta pregunta los alumnos han de razonar para elegir el gráfico de cajas correcto para emparejar con el histograma. Dos de las opciones muestran gráficos de cajas parecidos, con un valor atípico que también está en el histograma. Así que los alumnos tienen que fijarse en el límite inferior y en la asimetría para discernir la elección correcta.

**Pregunta 7.** El siguiente gráfico muestra el número de horas que durmió ayer por la noche un grupo de estudiantes de universidad.



¿Cuál de los siguientes gráficos de caja representa los mismos datos que el histograma?

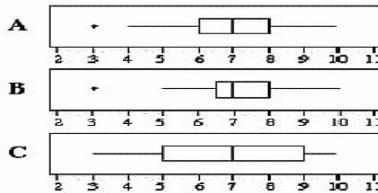


Tabla 8. Frecuencias de respuestas en la pregunta 7

Respuesta	“College”	Maestros
A	30	24,1
B	55,8	45,3
C	14,2	29,2
Blanco		1,4

El resultado (Tabla 8) es relativamente bueno, eligen la respuesta correcta, en los “college” casi un 56%, y en el caso de los estudiantes para profesores un 45%. Hay que señalar que los estudiantes para profesores no han trabajado en su formación previa a la universidad el gráfico de cajas, mientras que los histogramas es un gráfico conocido.

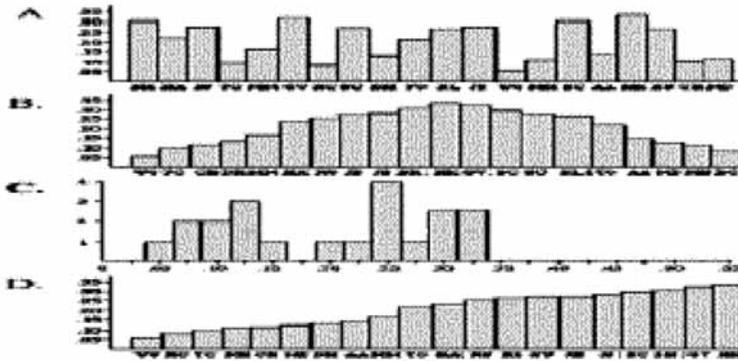
#### Cultura y razonamiento estadístico

En esta última pregunta (Pregunta 8), se pide a los estudiantes que elijan el gráfico que mejor caracterice la distribución de los datos. Y se aclara que sea el mejor gráfico para mostrar la forma, centro y recorrido de unos datos.

**Pregunta 8.** Un entrenador de baloncesto quiere tener una idea de cómo funcionó su equipo durante la pasada temporada. Para ello, registró la proporción entre los aciertos de cada jugador y el número de tiros a canasta. Los datos aparecen en la siguiente tabla:

Jugador	Proporción de aciertos	Jugador	Proporción de aciertos	Jugador	Proporción de aciertos
BH	0,305	SU	0,270	BC	0,301
HA	0,229	FH	0,136	AA	0,143
JS	0,281	TO	0,218	HK	0,341
TC	0,097	RL	0,267	RS	0,261
MM	0,167	JB	0,270	CR	0,115
GV	0,333	WG	0,054	MD	0,125
RC	0,085	MH	0,108		

¿Cual de los siguientes gráficos describe mejor la distribución de los datos, si lo que le interesa al entrenador es la media y la amplitud de la proporción de aciertos?



Esta pregunta resultó sorprendentemente, muy difícil; responden correctamente, en los “college” un 21% y en de los estudiantes para profesores sólo un 16%. Los alumnos tienden a elegir un gráfico de barras, tomando como modalidades los nombres de los jugadores, en lugar de un histograma que represente la distribución de puntos de los deportistas. Tanto los estudiantes para profesores, un 38%, como en los “college”, un 56%, se muestra una tendencia a elegir la forma de la distribución normal, que es lo único que justifica el alto porcentaje de elección de la opción B.

Tabla 9. Frecuencias de respuestas en la pregunta 8

Respuesta	“College”	Maestros
A	11,8	21,9
B	55,9	37,9
<b>C</b>	<b>20,9</b>	<b>16,1</b>
D	11,3	21,2
Blanco		2,9

Para resumir, la tabla 10 permite comparar los resultados de los alumnos de “college” con los estudiantes para profesores, en el conjunto de preguntas. Se observa que los estudiantes de ambos colectivos tienen dificultades para razonar sobre gráficos. Especialmente difícil resulta asociar un texto con la forma de una distribución, como se pide en la pregunta 6. Queremos señalar el carácter no convencional de esta pregunta para los futuros profesores, ya que están acostumbrados a mostrar el gráfico de la distribución de datos en un sistema cartesiano.

**Tabla 10.** Comparación de frecuencia de resultados correctos en las dos muestras

		% Correcto	
Contenido		«College»	Maestros
Cultura	Pregunta 4	23,8	39,4
Cultura	Pregunta 5	72,9	53,3
Razonamiento	Pregunta 6 A	69,4	35,0
Razonamiento	Pregunta 6 B	44,8	5,1
Razonamiento	Pregunta 6 C	24,7	10,2
Razonamiento	Pregunta 7	55,8	45,3
Cultura y Razonamiento	Pregunta 8	20,9	16,1

Las respuestas del cuestionario original con 14 preguntas, según delMas y otros (2005), indican que la mayoría de los estudiantes son capaces de interpretar los histogramas y también emparejar gráficos que corresponden a los mismos datos. Tienen dificultades para leer histogramas cuando las barras comprenden varios valores y el final de los puntos no se encuentra marcado en cada barra. Y tienden a interpretar los histogramas como gráficos de barras.

En el caso del cuestionario adaptado que responden los estudiantes para profesores, se puede observar que se comparten varias de las conclusiones anteriores. Si bien, la confusión entre gráfico de barras e histograma, que ya se había señalado en el primer estudio, parece que no impide traducir los datos del histograma a otro gráfico que esté construido con los mismos datos. Sin embargo, les resulta muy difícil razonar sobre la forma de las distribuciones a partir de una descripción.

## REFLEXIONES

De las dos investigaciones presentadas se puede deducir que hay dificultades en los futuros profesores para las construcciones de gráficas que son esenciales en estadística. Así en el primer estudio, se encontraron errores como mostrar un histograma con barras separadas

o mal etiquetados de los intervalos en el eje de abscisas. Del segundo estudio, se observa que no todos los estudiantes leen e interpretan los histogramas correctamente, si bien una amplia mayoría asocian la información proporcionada por la gráfica con un texto y también son capaces de emparejar con gráficos diferentes que representen los mismos datos. Sin embargo, hay un amplio fracaso en reconocer patrones de comportamiento de variables, que se acentúa por la dificultad de no disponer de valores en los ejes o alguna otra referencia, como una escala.

Para el desarrollo profesional, el profesor necesita conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico y conocimiento pedagógico del contenido (Estrada y otros, 2004; Shulman, 1986; Margolinas y otros, 2005). En el caso de los gráficos se observa como, aún después de un proceso de formación, el futuro profesor encuentra dificultades. Pensamos pues que, en su formación como profesional, hay que hacerle reconocer la importancia de sus dificultades. A continuación, señalamos, de forma somera, los errores y dificultades que son suficientemente conocidos, unos desde la perspectiva de la experiencia y otros por resultados de distintas investigaciones.

Las razones por las que el *histograma*<sup>1</sup> se confunde con el diagrama de barras son varias. Los diagramas de barras se vienen trabajando desde la escuela y se convierte en un gráfico familiar. El histograma se presenta, con frecuencia, como “un caso particular” de diagrama de barras o rectángulos (ver [//descartes.cnice.mecd.es/Estadística/unideimensional-ibarrios/graficos-est.htm](http://descartes.cnice.mecd.es/Estadística/unideimensional-ibarrios/graficos-est.htm)). El histograma es un gráfico difícil, por varias razones. La primera razón porque oculta los datos, y la segunda, porque la forma de un histograma puede ser muy distinta para los mismos datos, simplemente variando el número de clases, por lo que la elección del número de clases debe hacerse con cuidado. Es preciso tener habilidades para agrupar números, e implica dominar el orden en los números decimales. Aparte de la dificultad de representar áreas, está el efecto de la variación del tamaño de las clases.

Consideramos que es necesario trabajar más con el polígono de frecuencias. Es importante pasar a la curva de densidad mediante el ordenador, dar oportunidad de observar la forma de distintas distribuciones y reconocer los patrones de comportamiento de distintas variables (Bakker, 2004). Hay que incentivar la predicción de comportamiento que presentan distintas variables (Gravemijer y Bakker, 2006).

En el gráfica de *tallos y hojas*, al quedar representado cada uno de los valores, sin la pérdida que significa agruparlos, supone una ventaja. En realidad, es una combinación de tabla con gráfico de barras (Tufte, 1997). Sin embargo, a veces, los alumnos tienen dificultades para su construcción cuando los datos tienen un solo dígito. Las variables que muestran cantidades con dos o tres dígitos no presentan problemas de construcción, si acaso saltarse en el tallo los valores que no se presentan, por lo que se pierde la comprensión de la idea de “valor atípico”.

El *gráfico de caja* vincula los conceptos de mediana, cuartiles, valor mínimo y máximo que los alumnos manejan individualmente, pero no en forma global. Permite fraccionar los datos, y se ven la mediana y los cuartiles, lo cual es una ayuda para evitar que se confunda, el valor de la mediana (Me) con la posición de la mitad de los datos (N/2) (Cobo y Batanero, 2000). El principal problema en este gráfico está en elegir la escala apropiada (Bakker y otros, 2004). Las gráficas de caja son muy útiles para hacer comparaciones por grupos, mostrando cajas paralelas. Pero tienen como desventaja que oculta la forma de la distribución. Distribuciones bimodales pueden mostrar el mismo gráfico de caja que una distribución de una sola moda (Cohen y Cohen, 2006).

---

1 “Histograma” etimológicamente significa “levantar un gráfico” o “gráfico levantado”.

Creemos que es necesario mostrar las distintas formas de representar la información, incentivando el uso de distintos gráficos que representen los mismos datos (Carrión y Espinel, 2005a, 2005b, 2006). Encontramos que los libros de texto de primaria y secundaria enseñan la construcción de gráficos, pero trabajan muy poco lo que es valorar e interpretar gráficos y, aún menos, el paso de una representación a otra (Carrión y Espinel, 2007).

Desde nuestra modesta contribución, estamos trabajando en la comprensión de los gráficos estadísticos en la formación de los profesores dentro del Proyecto SEJ2006-10290/EDU (MEC). En nuestra investigación tratamos de compaginar algunos puntos de los distintos modelos de pensamiento estadístico (Pfannkuch y Wild, 2002). En concreto, del modelo propuesto por Wild y Pfannkuch (1999) nos interesa especialmente la transnumeración, como indicativo de la comprensión que puede surgir al cambiar la representación de los datos. Del modelo matricial por niveles, que trabajan Jones y otros (2000), y de los cuatro procesos (describir, organizar, representar y analizar datos) nos centramos principalmente en representar datos.

Hay muchas tareas pendientes en la investigación estadística, como ya se apunta en el documento de discusión del Estudio de ICMI /IASE “Educación Estadística en la Matemática Escolar: retos para la Enseñanza y la Formación del Profesor” (Batanero y cols., 2006; traducción española publicada en *Unión*, 6, 2006). Sin llegar a esos grandes retos, anoto algunas pequeñas tareas, que se podrían iniciar para cambiar la situación de las gráficas en la enseñanza.

Una primera tarea es buscar una forma de secuencias el aprendizaje de los distintos gráficos; describir cuáles son los más adecuados de acuerdo a la edad de los estudiantes y el tipo de preguntas que se debe formular, para que permitan una mejor comprensión. Parece aceptable comenzar en la escuela por pictogramas donde el niño se identifica (Socas y otros, 1996). Pero por qué aparecen tan pronto en el currículo los gráficos de sectores, siendo de difícil construcción y, sabiendo que hay una dificultad de percepción gráfica de los ángulos.

Otra tarea es conseguir que en los textos de primaria y secundaria obligatoria se unifique el vocabulario. Los distintos nombres de los gráficos, a veces, se deben a la traducción que cada autor ha creído conveniente. El caso de “stem and leaf” llevo a todo un popurrí de traducciones, tales como tallo-hoja, tronco y hojas e incluso, árbol. Y lo que es más importante, que en los distintos documentos escolares, no aparezcan errores, como, por ejemplo, citar a los gráficos de barras como histogramas. O bien que cuando aparecen errores, el profesor esté formado para poderlos detectar.

El desarrollo y prestigio que han adquirido los gráficos estadísticos en la publicaciones científicas (Cleveland, 1987; Wilkinson, 2006) y su auge en los medios de comunicación, principalmente prensa escrita, aconseja dedicar mas tiempo y esfuerzo en la formación del profesorado en este tema.

**Nota:** Parte de esta investigación ha sido realizada en el marco del Proyecto de Investigación SEJ2006-10290 (Ministerio de Ciencia y Tecnología, Madrid, Programa del Plan Nacional de I+D+I)

## REFERENCIAS

- Bakker, A. (2004). Reasoning about shape as a pattern in variability. *Statistics Education Research Journal*, 3 (2), 64-84. On line: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications>

- Bakker, A., Biehler, R. y Konold, C. (2004). Should young students learn about box plots? *IASE*, 163-173. En G. Burrill & M. Camden (Eds.), *Curricular Development in Statistics Education. Proceedings of the: International Association for Statistical Education (IASE) Roundtable*. On Line: [www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/rt04/4.2\\_Bakker\\_etal.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/rt04/4.2_Bakker_etal.pdf).
- Batanero, C., Albert, A. Ben-Zvi, D., Burrill, G., Connor, D., Engel, J., Garfield, J., Hodgon, B., Li, J., Pereira-Mendoza, L., Ottaviani, M. G., Pfannkuch, M., Polaki, V. Rossman, A. y Reading, C. (2006). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Discussion Document*. ICMI e IASE: On line: [http://www.ugr.es/~icmi/iase\\_study/](http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/)
- Biehler, R. (1997). Students' difficulties in practising computer supported data analysis- Some hypothetical generalizations from results of two exploratory studies', in Garfiel & Burrill (Eds.), *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning statistics* Voorburg: International Statistical Institute. On line: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications>.
- Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática VII*, 57-85.
- Bruno, A. y Espinel, M. C. (2007). Construcción y evaluación de histogramas en la formación de profesores. (En proceso de revisión).
- Carrera, C., del Castro, C., Gutiérrez, J., Méndez, R. y Pérez, M. C. (1988). *Trabajos prácticos de geografía humana*. Madrid: Síntesis.
- Carrión, J. C. y Espinel, M. C. (2005a). Aptitudes and difficulties of 10 to 12 years old students when translating information between different types of statistical representations. *Proceedings of the 55<sup>th</sup> Session of the International Statistical Institute*. Sydney. Australia. On line: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications>.
- Carrión, J.C. y Espinel, M. C. (2005b). Comprensión gráfica e implicaciones en la enseñanza. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 7, 183-196.
- Carrión, J.C. y Espinel, M. C. (2006). Una investigación sobre la traducción e interpretación de gráficas y tablas estadística por estudiantes de educación primaria. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Brazil*: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. On line: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase>
- Carrión, J.C. y Espinel, M.C. (2007) (En prensa). Análisis del tratamiento del proceso didáctico de las gráficas estadística en los libros de texto en la educación primaria. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 8.
- Cohen D. J. y Cohen, J. (2006). Statistical computing and graphics. The sectioned density plot. *American Statistical Association*, 60, 2, 167-174.
- Cleveland, W. y McGill, R. (1984). Graphical perception: Theory, experimentation, and application to the development of graphical methods. *Journal of the American Statistical Association*, 79, 386, 531-554.
- Cleveland, W. (Ed.) (1987). Research in statistical graphics. *Journal of the American Statistical Association*, 8, 398, 419-47.
- Cobo, B. y Batanero, C. (2000). La mediana en la educación secundaria obligatoria: ¿un concepto sencillo? *UNO*, 23, 85-96.

- delMas, R.C. (2002). Statistical literacy, reasoning, and learning. *Journal of Statistics Education [On line]*, 10 (3).
- delMas, R., Garfield, J. y Ooms, A. (2005). Using assessment items to study students' difficulty reading and interpreting graphical representations of distributions. *Proceedings of the Fourth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy. University of Auckland*. On line: [https://app.gen.umn.edu/artist/articles/SRTL4\\_ARTIST.pdf](https://app.gen.umn.edu/artist/articles/SRTL4_ARTIST.pdf).
- Espinel, M. C. (2000). Gráficas estadísticas: perspectiva desde la educación matemática. *El Guinigiada*, 8/9, 445-464.
- Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacía la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias*, 22, 2, 263-274.
- Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, 32, 2, 124-158.
- Gravemeijer, K. y Bakker, A. (2006). Design research and design heuristics in statistics education. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Brazil: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education*. On line: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase>.
- Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W., Mooney, E. S., Wares, A. y Perry, B.. (2000). A framework for characterizing children's statistical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 2, 269-307.
- Margolinas, C. Coulange, L. Bessot, A. (2005). What can the teacher learn in the classroom? *Educational Studies in Mathematics*, 59, 205-234.
- Nortes Checa, A. (1996). *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Madrid: Santillana.
- Lee, C.; Meletiou, M. (2003). Some difficulties of learning histograms in introductory statistics. *Joint Statistical Meetings- Section on Statistical Education*. On line: <http://www.statlit.org/PDF/2003LeeASA.pdf>
- Pfannkuch, M. y Wild, C. (1999). Statistical thinking: How can we develop it? On line: [www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/3/3235.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/3/3235.pdf).
- Schild, M. (2006). Statistical literacy survey analysis: reading graphs and tables of rates percentages. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. On line: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase>.
- Shell Centre for Mathematical Education (1993). *El Lenguaje de las funciones y las gráficas*. Bilbao: Universidad del País Vasco.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Socas, M., Noda, A., Espinel, M.C. y González, M. D. (1996). *Lectura e interpretación de gráficas cartesianas y estadísticas*. Cuadernos de Aula. Gobierno de Canarias.
- Tufte, E. R. (1997). *The visual display of quantitative information*. Cheshire, CT: Graphics Press.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67, 3, 223-295.

Wilkinson, L. (2006). Presentation graphics. *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences*.