

# Aplicación del programa *Mathematica* a las prácticas de cálculo en el primer año universitario<sup>1</sup>

Ángel Contreras de la Fuente  
Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Jaén

Vicenç Font Moll  
Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Barcelona

Manuel García Armenteros  
Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Jaén

Lorenzo Luque Cañada  
IES (Jaén)

Marta Marcolini Bernardi  
Matemática Aplicada. Universidad de Jaén

Lourdes Ordóñez Cañada  
IES (Mengíbar, Jaén)

Manuela Ortega Carpio y Carmen Sánchez Gómez  
Matemática Aplicada. Universidad de Jaén

## **Resumen**

*En este trabajo se describe una investigación acerca de las prácticas de Cálculo realizadas por estudiantes universitarios de primer curso en entornos informáticos en los que se utiliza el programa MATHEMATICA. Se analizan los errores y dificultades que aparecen en las contestaciones a las cuestiones planteadas en una prueba de evaluación. Todo esto dentro del marco teórico del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino, 2002). Los análisis indican que el uso de dicho entorno informático no garantiza unos resultados satisfactorios, en cuanto a la enseñanza-aprendizaje de los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función.*

## **Abstract**

*In this paper we describe a research about practices of calculus made by first year university students at informatics environments using the MATHEMATICA programme. We analyze mistakes and difficulties which appear into the answers of an assessment instrument. All using the ontological and semiotic model for mathematical knowledge (Godino, 2002). Analysis shows that using this informatic environment doesn't guarantee satisfactory results, for teaching and learning the concept of limit, continuity and derivate.*

---

<sup>1</sup> Este trabajo se ha elaborado en el marco del proyecto I+D: MEC-FEDER: SEJ2004-06637/EDUC: "Uso de la tecnología informática en la formación matemática de estudiantes universitarios", concedido a los autores por la Dirección General de Investigación (2004-2007).

## Introducción

En esta comunicación, se presenta una investigación que actualmente se desarrolla en el Departamento de Didáctica de las Ciencias de la Universidad de Jaén, la cual está relacionada con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que se imparten en el primer curso de la licenciatura de LADE y que se desarrolla utilizando el programa informático MATHEMATICA. Un primer trabajo de investigación fue presentado en el XIX Congreso del Seminario Inter-Universitario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIIDM), celebrado en Córdoba en 2003 ([www.ugr.es/~jgodino/siidm/cordoba\\_2003/acontrerasdoc.doc](http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cordoba_2003/acontrerasdoc.doc)). Un segundo trabajo, Contreras y Ortega (2004), se presentó en el I Congreso sobre la teoría de las funciones semióticas.

Como primer paso de la investigación, se ha buscado caracterizar las prácticas que constituyen el significado institucional de los objetos límite, continuidad y derivada, correspondiente a la asignatura de Matemáticas I de la licenciatura LADE, impartida utilizando el programa informático MATHEMATICA. Se hace la hipótesis de que el uso del ordenador, simplemente como amplificador cognitivo, aporta muy pocos elementos de transformación a la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario; en cambio, una utilización de la informática de tipo cualitativo, que incida mucho más en los procesos de modelización y construcción de las matemáticas, representa para el estudiante un poderoso medio de transformación en su modo de entenderlas y desarrollarlas.

Un segundo paso de la investigación se centra en la caracterización de las prácticas que constituyen a los significados personales del alumnado. Para ello, se efectúa primero un análisis ontosemiótico a priori de las tareas propuestas en los módulos de trabajo que desarrollan en los cursos de matemáticas de la licenciatura de LADE.

Posteriormente, se diseñarán nuevos módulos de prácticas matemáticas en los que se utilizará el programa informático citado. Por último, la experimentación en el aula y la evaluación posterior de dichos módulos permitirá terminar de diseñar las propuestas didácticas sobre prácticas significativas con ordenador.

En este trabajo, por razones de limitaciones de espacio, sólo se analizan las prácticas matemáticas que forman parte de los significados personales de los estudiantes del primer curso de la licenciatura de LADE de la Universidad de Jaén presentes en las respuestas a una prueba de evaluación desarrollada con el programa MATHEMATICA, respecto a los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función.

La comunicación se ha organizado en cinco apartados: en el primero se hace una introducción, en el segundo se revisan las principales investigaciones sobre el uso de los ordenadores en la formación matemática de alumnos universitarios y se comenta el marco teórico utilizado. En el tercero se presenta la metodología y los objetivos de la investigación. En el apartado 4, se expone el análisis de los datos y, por último se termina en el apartado 5 con algunas consideraciones finales.

## Marco teórico

En los últimos años se han desarrollado tres grandes líneas de investigación en informática y Análisis; por una parte, la seguida por los miembros que participan en diversos proyectos RUMEC sobre distintas ramas de las matemáticas, los cuales utilizan la teoría APOS (Dubinsky, 1996) como marco conceptual. Entre ellos destacamos el proyecto titulado "The development of students' graphical understanding of the derivate" (Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf, 1997), cuyo antecedente es el trabajo de Asiala y als. (1996) sobre el aprendizaje de la derivación. También son relevantes en esta línea de investigación los trabajos de Bishop (1996) y Clark (1997).

La segunda línea de investigación está relacionada con los trabajos de investigadores franceses sobre la informática en la enseñanza de las matemáticas, la cual viene reflejada en Guin y Trouche (2002), donde los autores destacan los aspectos de los cambios cualitativos que la informática debe representar

para la enseñanza de las matemáticas. En esta línea de investigación hay que resaltar los trabajos de Artigue (2002) y Kendal, Stracey y Pierce (2002).

Una tercera línea de investigación esta relacionada con la visualización matemática de los conceptos del Análisis matemático, su representación y las nuevas tecnologías (Gutiérrez, 1997; Hitt, 1998; Queralt, 2000; Camacho y González, 2001 y Afonso, 2003), la cual pone de manifiesto la importancia de la articulación entre las distintas representaciones semióticas de los conceptos matemáticos.

Sin embargo, se reconoce la necesidad de realizar investigaciones didácticas sobre el uso del ordenador. Así, en el libro de Guin y Trouche, se señala: “Los cambios producidos por la nueva tecnología originan una evolución notable de la práctica matemática en el dominio profesional; una evolución que, hasta ahora, no ha provocado una adaptación correspondiente en la enseñanza de la matemática.” Es necesario, por tanto, realizar un análisis crítico de las principales aportaciones existentes y hacer una selección de las experiencias innovadoras que se efectúan en investigaciones reconocidas, concretando en *módulos de prácticas* los contenidos Análisis Matemático.

Dicho análisis crítico lo realizamos en esta investigación en el marco del enfoque ontosemiótico (Godino, 2002). Esta línea de trabajo ha sido asumida por otros investigadores y recientemente se ha aplicado a la didáctica del análisis matemático (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa).

De los diferentes constructos elaborados por el enfoque ontosemiótico en esta comunicación nos centraremos fundamentalmente en las entidades primarias (lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades, acciones y argumentaciones).

## Objetivos y metodología de la Investigación

### *Objetivos*

El objetivo general de la investigación es experimentar y evaluar estrategias metodológicas para la formación inicial en matemáticas de los estudiantes de primer año de la licenciatura LADE, haciendo uso de las posibilidades ofrecidas por los entornos informáticos. De manera más específica nos proponemos:

- Estudiar y analizar los módulos de trabajo de los bloques temáticos del currículo de matemáticas que actualmente se desarrollan dentro de la asignatura de Matemáticas I de la licenciatura de LADE de la Universidad de Jaén, a fin de detectar posibles errores y dificultades potenciales de los alumnos en el uso del programa informático *MATHEMATICA*, en cuanto al aprendizaje de los conceptos matemáticos implicados y a las interrelaciones con el currículo matemático que no utiliza el ordenador como recurso de estudio.
- Detectar, utilizando en enfoque ontosemiótico, fenómenos asociados a las situaciones didácticas informáticas planteadas.

En este trabajo se desarrolla únicamente este segundo objetivo de la investigación. En el enfoque ontosemiótico se utiliza la metáfora vectorial para sintetizar un fenómeno didáctico (Wilhelmí, Godino y Font en prensa). Todo fenómeno queda descrito como una  $n$ -tupla, donde cada componente representa una característica del mismo. Las *características* o *variables* pueden considerarse en la investigación desde dos puntos de vista diferentes: uno, como *variables explicadas* ( $v_1, \dots, v_r$ ), que son problematizadas por la perspectiva teórica utilizada para analizar el proceso de estudio; otro, como *variables explicativas* ( $w_1, \dots, w_s$ ), que se usan para describir las explicadas en dicha perspectiva y predecir su comportamiento en situaciones “controladas” (generalmente de forma parcial). De esta manera un fenómeno es:

Fenómeno  $\equiv (w_1, \dots, w_s; v_1, \dots, v_r)$ ; donde donde las  $v_j$  quedan explicadas por las  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, r$

### *Metodología*

#### *Población y muestras*

La población objeto de estudio son los estudiantes de la licenciatura LADE. La muestra la constituyen los estudiantes de la licenciatura LADE de la Universidad de Jaén.

#### *VARIABLES CONSIDERADAS*

Las variables *explicativas* consideradas en el análisis, diseño y evaluación de los módulos de prácticas las hemos agrupado en dos grupos:

Primer grupo:

- Bloque temático: Análisis Matemático (límites, continuidad y derivada);
- Centro geográfico de procedencia (estudiantes de LADE en la Universidad de Jaén).
- Método de enseñanza: presencial.

Segundo grupo:

- La no consideración de la complejidad semiótica asociada a los objetos límite, continuidad y derivada en el proceso de estudio realizado utilizando el programa MATHEMATICA.

La variable *explicada* considerada en el análisis, diseño y evaluación de los módulos de prácticas es:

- Errores en el uso de lenguaje, acciones, conceptos, proposiciones y argumentaciones utilizados en las tareas matemáticas de los módulos de prácticas (límites, continuidad y derivadas). Se tendrá en cuenta básicamente la metodología cualitativa (qué conceptos y técnicas usan y tipos de errores)

El fenómeno didáctico considerado se puede sintetizar de la siguiente manera:

Fenómeno EOS = (estudiantes de LADE en la Universidad de Jaén, límite, continuidad, derivada, complejidad semiótica asociada a los objetos límite, continuidad y derivada; errores relacionados con: lenguaje, acciones, conceptos, proposiciones y argumentaciones)

### *Diseño*

Puesto que las muestras son intencionales, la posibilidad de generalización a otras muestras quedará limitada por esta opción, que asumimos debido a las dificultades de índole prácticas y económicas que tendría un muestreo de tipo aleatorio. Se trata de un diseño cuasi-experimental apoyado por la descripción detallada del estudio de algunos casos.

#### *Métodos de recogida de datos*

- Protocolos producidos por los alumnos con sus soluciones a tareas matemáticas propuestas en cada sesión y en la evaluación final (producidas en la interacción con el ordenador, o bien tareas de papel y lápiz propuestas en las sesiones en clase ordinaria).

### **Análisis de datos**

Para el análisis de las respuestas de los protocolos producidos por los alumnos en las tareas matemáticas se efectuó un análisis cualitativo de los tipos de errores cometidos según las entidades primarias presentes en la actividad matemática.

La experiencia, que corresponde al objetivo segundo descrito anteriormente, se efectuó con estudiantes del primer cuatrimestre del primer curso de la licenciatura de LADE y consistió en la realización de un análisis de las respuestas a las cuestiones planteadas en una prueba de evaluación realizada a 32 estudiantes que habían realizado prácticas con el programa *MATHEMATICA*. Antes de la prueba de evaluación, se desarrollaron prácticas con dicho programa, las cuales fueron analizadas en Contreras y Ortega (2004).

La asignatura de Matemáticas I es troncal y consta de seis créditos, de los cuales tres son prácticos y tres teóricos. Los temas de Análisis corresponden a los objetos matemáticos de función, límite, continuidad, derivada e integral, de una variable; constituyen el 50% del currículum de matemáticas. La distribución horaria de los temas de Análisis es la siguiente: 15 horas de prácticas con ordenador, 15 horas de prácticas sin ordenador y 30 horas de teoría.

Matemáticas I es una de las seis asignaturas de la carrera que se imparten en el primer cuatrimestre. Los estudiantes que ingresan provienen del Bachillerato de Ciencias Sociales por lo que su formación en matemáticas es incompleta.

La prueba de evaluación consistió en 2 ejercicios, sobre el teorema de Bolzano, derivabilidad, derivación y límites, y aparece en el Anexo 1.

Los estudiantes dispusieron de 40 minutos para contestar cada uno de los ejercicios propuestos. La tabla 1 muestra una síntesis de las 32 tablas construidas para analizar semióticamente los resultados correspondientes a las contestaciones de dichos estudiantes.

Tabla 1. Resultados de las contestaciones

	ERRORES EN LENGUAJE	ERRORES EN ACCIONES	ERRORES EN CONCEPTOS	ERRORES EN PROPOSICIONES	ERRORES EN ARGUMENTACIONES
EJE. 1.a	- Transcribe mal la función (9%)	- No realiza el límite lateral (12,5%)	- Redundancia de órdenes en el cálculo de los límites laterales (3%)	- Sólo se estudia una de las hipótesis del teorema de Bolzano (19%)	- Mezclar las hipótesis del teorema de Bolzano en sus argumentaciones (3%)
B= 16%	- La gráfica da los límites laterales (3,1%)	- No estudia la continuidad (12,5%)	- Confunde los límites laterales con el límite (41%)	- No aplica las hipótesis del teorema de Bolzano (6%)	- No detectar que hay que calcular límites laterales (6%)
PB= 28%	- Considera mal la dirección de la derivada lateral (3%)	- No calcula el valor de la función en el punto (22%)		- Confunde las hipótesis del teorema de Bolzano (3%)	- No detectar el intervalo en que hay que hacer el estudio (3%)
M= 56%		- Realiza acciones sin sentido (3%)		- No considera que la función es a trozos (6%)	- No detectar que $f(4).f(-4)<0$ (3%)
				- Confunde las hipótesis de la continuidad (3%)	- No detectar que hay que aplicar la continuidad (3%)
					- Confundir la condición necesaria con la suficiente (3%)

<p>EJE. 1.b</p> <p>B= 22%</p> <p>PB= 9%</p> <p>M= 69%</p>	<p>- Error en la escritura informática de la función (19%)</p> <p>- Considera mal las direcciones de los límites laterales (9%)</p>	<p>- Uso de un orden erróneo para la función definida a trozos (3%)</p> <p>- No realizar la derivada lateral (6%)</p> <p>- No calcula la derivada (6%)</p> <p>- No calcula las derivadas laterales (6%)</p> <p>- Cálculo de valores sin sentido (3%)</p>	<p>- Error en la definición de derivada (16%)</p> <p>- Hacer el estudio sólo en uno de los trozos (3%)</p> <p>- Redundancia de órdenes al realizar la derivada lateral (25%)</p> <p>- Error al sustituir en la definición de derivada (6%)</p> <p>- Afirmar la derivabilidad, a pesar de tener las laterales distintas (9%)</p> <p>- Error al hacer las derivadas laterales (3%)</p> <p>- Error al hacer la derivada en un punto con el programa (3%)</p> <p>- Confundir límite con derivada (3%)</p> <p>- Confundir límite con límites laterales (6%)</p>		<p>- No detectar que hay que calcular las derivadas laterales (3%)</p> <p>- Creer que la continuidad implica la derivabilidad (3%)</p> <p>- No detectar que se está analizando sólo una parte de la función (3%)</p> <p>- La función en el punto no tiene por qué coincidir con los valores de las derivadas laterales (3%)</p>
<p>EJE. 2.a-f</p>	<p>- Error en la escritura informática (9%)</p>				
<p>EJE. 2.a-g</p> <p>B= 38%</p> <p>PB= 53%</p> <p>M= 9%</p>	<p>- Error en la escritura informática (53%)</p>				
<p>EJE 2.a-h</p>	<p>- Error en la escritura informática (28%)</p>				

EJE 2.b	Error en el uso de las variables “x” y “X” (3%)	- No cargar el paquete de límites (13%)	- Considerar la lateralidad en el límite en el infinito (41%)		- No detectar el problema de aparecer “X” en la solución (3%)
B= 44%	- Error al transcribir la función (3%)				
PB= 6%	- Mal uso del paquete <<Calculus Limit (6%)				
M= 50%					

Puede observarse que en el ejercicio 1a, sobre el teorema de Bolzano, de la prueba de evaluación un 56% de los estudiantes lo contestan erróneamente. Los errores más destacables, que superan el 10% de porcentaje de error, corresponden a: *no calcular el valor de la función en el punto al estudiar la continuidad*, un 22%; *confundir los límites laterales con el límite de la función*, en un porcentaje muy estimable del 41%; *estudiar sólo una hipótesis del teorema de Bolzano*, en un 19%; *no realizar el límite lateral*, en un 12,5%; por último, *no estudiar la continuidad*, en un 12,5%.

A pesar de ser un ejercicio realizado en las prácticas con el *MATHEMATICA*, además de estudiado en las clases de teoría, los estudiantes muestran grandes dificultades en realizar correctamente la tarea, cometiendo errores relacionados en la argumentación en un 21%, en los conceptos en un 44% y en las acciones en un 47%.

En el ejercicio 1b, sobre la derivabilidad, el 69% de los estudiantes lo contestan erróneamente. Los errores más frecuentes, que superan el 10% de porcentaje de error, corresponden a: *errores en la escritura informática*, en un 19%; *error al definir la derivada*, en un 16%; por último, *redundancia de órdenes al efectuar la derivada lateral*, en un 25%;

Sorprende el alto porcentaje de error en este ejercicio, el 69%, cuando se trata de un ejercicio realizado en las clases con el *MATHEMATICA*. Los estudiantes cometen errores de lenguaje en un 28%, en las acciones un 24%, en los conceptos un 74% y, por último en las argumentaciones, en un 12%.

En el caso del ejercicio 2a, con tres funciones a derivar, los errores disminuyen, sólo un 9%, aunque aumenta espectacularmente los casos que se han denominado “parcialmente bien” (que muestran errores no graves, propios de una escritura algo imperfecta), en un 53%. El único error, que corresponde a un error en la escritura, tanto en la función f, como en las otras dos, tiene un porcentaje de error del 90%, lo que muestra la importancia del interface en las prácticas con el ordenador, capaz de evitar la perfección en ejercicios aparentemente tan simples como el que se comenta.

Por último, en el ejercicio 2b, el porcentaje de estudiantes que contestan erróneamente es del 50%, donde aparentemente sólo han de seguir las instrucciones precisas del lenguaje del *MATHEMATICA*. En este caso, los errores más frecuentes están relacionados con los conceptos, con un 41% de error al *considerar la lateralidad en el infinito*; los otros errores –*no cargar el paquete de límites y error en la escritura*– tiene porcentajes de error del 13% y 12%, respectivamente.

Para dar una evidencia empírica de los resultados obtenidos, en el Anexo 2 se describen las respuestas de uno de los estudiantes a las dos cuestiones planteadas en el examen, así como la corrección dada por el profesor.

### Consideraciones finales

Los resultados parciales que se presentan muestran que estudiantes universitarios de primer curso que

han realizado el proceso de estudio en entornos informáticos en los que se utiliza el programa MATHEMATICA cometen errores importantes en sus respuestas a las cuestiones planteadas en una prueba de evaluación sobre límites, continuidad y derivadas. Este hecho, nos lleva a afirmar que uso de dicho entorno informático no garantiza unos resultados satisfactorios, en cuanto a la enseñanza-aprendizaje de los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función. La variable explicativa que se utiliza en el enfoque ontosemiótico es que, a pesar del uso del programa MATHEMATICA, el proceso de instrucción que han seguido estos alumnos no ha tomado en consideración la complejidad semiótica asociada a los objetos límite, continuidad y derivada. Por otra parte, estos resultados apoyan la conjetura de que determinados usos del ordenador aportan muy pocos elementos de transformación a la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario.

### Referencias bibliográficas

- Afonso, R. M. (2003). Problemas de convergencia en un contexto de software educativo, *Números*, 56, 3-40.
- Artigue, M. (2002). L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire: les leçons de quelques ingénieries didactiques, en Guin y Trouche (Coords.), *Calculatrices symboliques: Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique*, Grenoble : La Pensée Sauvage, Éditions, (277-349).
- Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. Y Schwingendorf, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative, *Journal of Mathematical Behavior*, 16, 399-431.
- ASIALA Et Als. (1996). A Framework for research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education, en Jim Kaput, Alan H. Schoenfeld, Ed. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. II*, Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education, Volume 6, (1-32).
- Bishop, A. Et Als. (Eds.) (1996). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer (Cap. 29, 30, 31, 32 y 33), incluyen surveys sobre el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas).
- Camacho, M. Y González, S. (2001). Una aproximación geométrica al cálculo de primitivas utilizando la TI-92, *Números*, 45, 61-68.
- Clark, J.M. Y Als. (1997). Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule, *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 345-364.
- Contreras, A.; Font, V. ; Luque, L. ; Ordóñez, L. (en prensa). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*
- Contreras, A. y Ortega, M. (2003). El objeto tecnológico MATHEMATICA en la enseñanza del Análisis, ¿es sólo un amplificador cognitivo?, *XIX Congreso del Seminario Inter-universitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM)*, Córdoba.
- Contreras, A. y Ortega, M. (2004). Los estudiantes, las instituciones y el programa MATHEMÁTICA, *I Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*, pp. 1-10.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria, *Educación Matemática*, 8, 3, pp. 25-41.
- Godino, J.D. (2003). Un enfoque semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactiques*

en *Mathematiques*, 22 (22), 237-284.

Guin, D. y Trouche, L. (2002). Calculatrices symboliques: Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique, Grenoble : La Pensée Sauvage, Éditions.

Gutiérrez, A. (1997). Fronteras en el uso de las calculadoras gráficas, *Números*, 32, 54-66.

Hit, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y °currículum, *Educación Matemática*, 10 (2), 23-45.

Kendal, M.; Stacey, K. Y Pierce, R. (2002). L'influence des environnements de calcul formel sur les modes de travail des enseignants, en D. Guin y L. Trouche (Eds.), *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique*, (117-146).

Queralt, T. (2000). Las matemáticas con tecnología entran, *Números*, 14, 23-36.

Trouche, L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique, en Guin y Trouche (Coords.), *Calculatrices symboliques: Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique*, Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditions, (187-213).

Wilhelmi, M. R. ; Godino, J.D.; Font, V. (en prensa). Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques: réflexions sur la théorie de situations didactiques et le point de vue ontologique et sémiotique. Actas del *Colloque International « Didactiques : quelles references epistemologiques ?*, Bordeaux, France.

Anexo 1

Ejercicio 1.- Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \leq 0, \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- (a) ¿Satisface  $f$  las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo  $[-4, 4]$ ?  
 (b) ¿Es  $f$  derivable en el punto  $x=0$ ?

Ejercicio 2.-

- (a) Sean  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas, respectivamente, por:

$$f(x) = e^{5x^2}, \quad g(x) = \operatorname{sen}(3x + 1)^3 \quad \text{y} \quad h(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1},$$

siendo  $\ln \sqrt{x^2 + 1}$  el logaritmo neperiano de  $\sqrt{x^2 + 1}$ . Halla las funciones derivadas de  $f, g$  y  $h$ .

- (b) Calcula  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{2x+1} + 4^{x^2}}{5^{x+2}}$ .

Anexo 2

**Ejercicio 1**

Alumno:

1.

$$f [x_] := \text{Wich} [x \leq 0, 2x+4, x > 0, (x-2)^2]$$

**a)**

$$f [4]$$

$$4$$

$$f [-4]$$

$$-4$$

Se cumple el teorema de Bolzano ya que un elemento  $f(a)$  dentro del intervalo  $[a,b]$  que tiene distinto signo de  $f[b]$ , por lo tanto existe un  $f(c)$ .

Profesora Correctora:

Sólo estudia una de las hipótesis del teorema.

Alumno:

1.

**b)**

$$f [x_] := \text{Wich} [x \leq 0, 2x+4, x > 0, (x-2)^2]$$

$$D [f[x], x]$$

$$\text{Wich} [x \leq 0, 2, x > 0, 2(x-2)]$$

$$\text{Limit} [ ((2h+4)-1) / h, h \rightarrow 0, \text{Direction} \rightarrow 1]$$

$$- \infty$$

$$\text{Limit} [ (h-2)^2 / h, h \rightarrow 0, \text{Direction} \rightarrow -1]$$

La Función  $f(x)$  no es derivable en el punto  $x = 0$

Profesora correctora:

Utiliza una orden errónea para el cálculo de la derivada de una función definida a trozos.

Error en la definición de derivada.

Redundancia de órdenes en el cálculo de derivadas laterales.

## Ejercicio 2

Alumno:

- a) Correcto
- b) Limit [  $(3^{2x+1} + 4^{x^2}) / (5^{x+2})$ ,  $x \rightarrow \text{Infinity}$  ]

0

Profesora correctora:

Error al transcribir la función.