Un punto de vista antropológico: La evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática

Marianna Bosch Casabò
Universidad Ramon Llull

1. MARCO TEÓRICO: LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

1.1. El programa epistemológico en didáctica de las matemáticas

La Teoría Antropológica en didáctica de las matemáticas (Chevallard, 1992, 1997, 1999; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) se inscribe dentro del programa de investigación que denominamos "programa epistemológico" (Gascón 1999) y que tiene su origen en los trabajos de Guy Brousseau iniciados a finales de los años 70 (Brousseau, 1999).

1.1.1. La característica principal del programa epistemológico consiste en considerar que el objeto primario de investigación de la didáctica es la ***actividad matemática*** tal como se realiza en distintas instituciones de la sociedad. Cuando se dice que la didáctica de las matemáticas estudia "las condiciones de difusión y transmisión del conocimiento matemático" (Brousseau 1994), no se considera el "conocimiento" desde un punto de vista psicológico, como un proceso mental de individuos aislados. El conocimiento es el producto o la cristalización de determinado quehacer humano y queda siempre caracterizado por las actividades de las que surge y por las que permite realizar.

1.1.2. Tanto el conocimiento como la actividad matemática son construcciones sociales que se realizan en instituciones –en comunidad–, siguiendo determinados contratos institucionales. Estudiar las condiciones de producción y difusión del conocimiento matemático requiere pues que seamos capaces de describir y analizar determinados tipos de actividades humanas que se realizan en condiciones particulares (por ejemplo en el aula, bajo la dirección de un profesor y siguiendo un determinado programa de estudio).

1.2. Necesidad de un modelo epistemológico explícito de la actividad matemática

El análisis de la actividad matemática requiere la utilización de nociones apropiadas que permitan describir sus distintos componentes, así como sus condiciones de producción y reproducción. Se obtiene entonces un *modelo epistemológico* de la actividad matemática, es decir, de lo que se entiende por hacer matemáticas y por producir conocimiento matemático.

1.2.1. Las componentes del modelo, que conforman, por así decirlo, la "anatomía" de la actividad matemática, deben corresponderse con las componentes del "saber matemático" entendido como organización teórica que emerge de la actividad matemática a la vez que la instrumenta.

1.2.2. Al mismo tiempo, la descripción anterior debe articularse con un modelo de la "fisiología" de la actividad, esto es, con las condiciones bajo las cuales se realiza y evoluciona, ya sea para *crear* nuevo saber matemático (la investigación pura o aplicada) o para *reconstruir* dicho saber, lo que constituye la actividad didáctica propiamente dicha.[1]

1.3. El modelo epistemológico propuesto por la Teoría Antropológica

La Teoría Antropológica describe la actividad matemática y el saber que de ella emerge en términos de *organizaciones o praxeologías matemáticas*. Una organización matemática es una entidad compuesta por: *tipos de problemas o tareas problemáticas*; *tipos de técnicas* que permiten resolver los tipos de problemas; *tecnologías* o discursos ("logos") que describen y explican las técnicas; una *teoría* que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos. Los tipos de problemas y los tipos de técnicas constituyen el "saber-hacer" matemático, mientras que los discursos tecnológicos y teóricos conformarían el "saber" matemático propiamente dicho.

1.3.1. Dentro de este modelo, "hacer matemáticas" consiste en activar una organización matemática, es decir en resolver determinados tipos de problemas con determinados tipos de técnicas (el "saber hacer"), de manera inteligible, justificada y razonada (mediante el correspondiente "saber"). Este trabajo puede conducir a la construcción de nuevas organizaciones matemáticas o, simplemente, a la reproducción de organizaciones previamente construidas.

1.3.2. "Enseñar y aprender matemáticas" corresponde a la actividad de reconstrucción de organizaciones matemáticas para poderlas utilizar en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones. La enseñanza o tarea docente consiste básicamente en dirigir dicha reconstrucción (generando en particular las condiciones que mejor la permiten), mientras que el aprendizaje puede considerarse como el fruto de la reconstrucción, ya sea individual como en grupo. Así, el objetivo de un proceso de enseñanza/aprendizaje puede formularse en térmi-

1. La Teoría Antropológica propone aquí un modelo del *proceso de estudio* de las matemáticas en términos de *momentos didácticos*. Ver Chevallard, Bosch y Gascón 1997.

nos de los componentes de las organizaciones matemáticas que se quieren reconstruir: qué tipos de problemas hay que ser capaz de resolver, con qué tipos de técnicas, sobre la base de qué elementos descriptivos y justificativos, en qué marco teórico, etc.

1.4. La "comprensión" desde la Teoría Antropológica

La Teoría Antropológica asume, como uno de sus postulados fundamentales, que toda actividad en sentido estricto, todo "saber-hacer", presupone la existencia de un "saber" o discurso justificativo-explicativo de la actividad. El término mismo de "praxeología", formado a partir de "praxis", actividad, y de "logos", discurso, atestigua la inseparabilidad supuesta entre el "hacer" y el "explicar" dicho hacer. La noción cultural de "comprensión" remite a esta dimensión de la actividad humana (que no es específica de la actividad matemática) de exigencia de producción de discursos descriptivos y justificativos de todo quehacer, entendiendo que, en muchos casos, las justificaciones producidas pueden ser muy parcas y remitirse a un simple argumento "folclórico" del tipo: "porque siempre ha sido así", "porque así funciona", etc.

1.4.1. El "incremento de la comprensión" sobre un campo concreto de la matemática o, usando la expresión de William P. Thurston (1994), el "avance de la comprensión humana de las matemáticas", corresponde, en este contexto, a la posibilidad de producir (o reproducir) un discurso tecnológico y teórico asociado a determinadas actividades de resolución de problemas, aunque algunas veces dichas actividades queden implícitas en el discurso.

1.4.2. Es importante recalcar que este discurso, cuya función principal consiste en proporcionar a la actividad descripciones, explicaciones y justificaciones válidas (para la institución en la que tiene lugar), también debe incorporar elementos de respuesta a la cuestión de las ***razones de ser*** de la actividad considerada y de las obras que ésta produce. La "comprensión" en el sentido aquí considerado incluye pues también la búsqueda de las tareas problemáticas que están (o que podrían estar) en el origen de la organización matemática considerada. ¿Para qué sirven los ángulos? ¿Y los triángulos? ¿Por qué hay que aprender a calcular con fracciones? ¿O a multiplicar números negativos? Este tipo de preguntas forma parte del cuestionamiento tecnológico-teórico y constituyen un aspecto importante de la exigencia de justificación de las actividades correspondientes.

1.4.3. En general, los elementos tecnológicos y teóricos de una organización matemática remiten a elaboraciones descriptivas y justificativas que son el fruto del trabajo matemático de varias generaciones. Pero cuando se consideran organizaciones matemáticas en proceso de construcción o reconstrucción (ya sea en manos de investigadores o de alumnos y profesores), entonces también podemos hablar de "tecnologías" y "teorías" para referirnos a discursos mucho más informales y espontáneos, producidos por los sujetos en situación de resolución de problemas para comentar, explicar y justificar su actividad. A estas tecnologías se incorporan entonces elementos que no tienen por qué ser de naturaleza matemática y que se combinan, de modo más o menos forzado, con la tecnología "estándar" de la institución matemática sabia.

1.4.4. Señalemos además que, en el marco de la Teoría Antropológica, no se hablará de "comprender un concepto", porque la unidad elemental de análisis de la actividad matemática no es el concepto sino la organización matemática o praxeología. El estudio de lo que se considera como "comprensión de un concepto" en una institución dada y para un tipo de sujetos dado requiere la explicitación de las actividades (es decir, de las praxeologías) que, en cierto sentido, dan vida al concepto mencionado, así como de la dinámica que articula entre sí unas organizaciones matemáticas con otras (incluyendo, claro está, las cuestiones problemáticas que motivan u originan dichas organizaciones).[2]

1.4.5. El cambio terminológico propuesto (que es también un cambio conceptual) no significa que se identifiquen entre sí todas las actividades matemáticas. La Teoría Antropológica (Chevallard, 1999) establece una marcada distinción entre las organizaciones matemáticas "puntuales", construidas alrededor de un único tipo de problemas, en las que las técnicas se utilizan de manera rígida y el entorno tecnológico acostumbra a ser muy pobre, de las organizaciones "locales" que se obtienen articulando entre sí –por vía de un discurso tecnológico elaborado- distintas organizaciones puntuales. Del mismo modo, la articulación de distintas organizaciones locales con un marco teórico común puede formar una organización matemática "regional".[3] En el caso de las praxeologías puntuales, la actividad se centra en la resolución de un único tipo de tareas, con poca visión de fenómenos generales y poca "productividad". Es su evolución hacia una praxeología local mediante la utilización de un mayor número de técnicas, utilizadas de manera más flexible y relacionadas entre sí, lo que conduce generalmente a la producción de nuevos elementos técnicos, nuevos discursos tecnológicos y al planteamiento de nuevos tipos de problemas.

2. INSTRUMENTOS OSTENSIVOS Y "REPRESENTACIÓN"

Que la actividad matemática se realiza mediante el recurso a una pluralidad de registros (lo escrito, lo gráfico, lo verbal, lo gestual, lo "material") no es únicamente una asunción de la Teoría Antropológica. Tampoco lo es la impor-

2. Según se desprende de Gascón (1998 y 1999), a medida que el "programa cognitivo" en didáctica de las matemáticas pone entre paréntesis las representaciones mentales (o internas) y se centra en las representaciones externas (especialmente semióticas), su objeto de estudio evoluciona del "conocimiento o comprensión de las matemáticas" entendidos como fenómenos psicológicos individuales hacia la "actividad matemática" empíricamente observable. En este punto aparece la necesidad de explicitar y refinar tanto el modelo de actividad matemática que se asume, como los términos mediante los cuales se describen los componentes de dicha actividad. Aparece en consecuencia un acercamiento entre el programa cognitivo y el programa epistemológico.

3. Por ejemplo, los problemas de proporcionalidad directa dan lugar a una organización puntual que, articulada a otras organizaciones puntuales por medio de una tecnología como la teoría clásica de las razones y proporciones, da lugar a una organización local sobre la proporcionalidad de magnitudes que, a su vez, formará parte de la organización regional de la aritmética clásica.

tancia acordada, en el análisis del funcionamiento de la actividad matemática, a las dificultades ligadas a la articulación entre diferentes registros.[4] La especificidad de la conceptualización propuesta por el enfoque antropológico se sitúa en un doble hecho. Por un lado, en la ***no-diferenciación*** entre registros desde el punto de vista de su "valor" o función en el trabajo matemático: tan importantes son a priori una figura geométrica y el discurso con el que se expresa un razonamiento, como la transformación más o menos mecánica de una expresión simbólica escrita o el gesto de tachado que permite realizar, indicar y recordar una simplificación de fracciones. Por otro lado, en la importancia acordada al ***valor instrumental*** que asignamos a los "objetos de representación" (que llamaremos, para mayor "neutralidad", objetos ***ostensivos***), frente a su ***valor semiótico*** (de signo) que es generalmente el que predomina en la visión cultural corriente.

2.1. Objetos ostensivos y objetos no ostensivos

El modelo epistemológico propuesto por la Teoría Antropológica establece una distinción dentro del conjunto de objetos que componen los distintos elementos de las organizaciones matemáticas: las tareas problemáticas, las técnicas, las tecnologías y las teorías "están hechas" de objetos ***ostensivos*** y de objetos ***no-ostensivos.*** (Bosch, 1994; Bosch y Chevallard, 1999)

2.1.1. Los ***objetos ostensivos*** (del latín "ostendere", presentar con insistencia) son aquellos objetos que se perciben: se ven, se tocan, se oyen, etc. Son, en definitiva, los objetos materiales o los objetos dotados de cierta materialidad como las escrituras, los grafismos, los sonidos, los gestos, etc. Para utilizar una expresión general, hablaremos de la "manipulación" de los objetos ostensivos aunque los ostensivos en cuestión sean escrituras, gráficos, gestos o discursos.[5]

2.1.2. Los ***objetos no-ostensivos*** son entonces todos aquellos objetos que existen institucionalmente, en el sentido en que se les atribuye una determinada existencia, pero que no se pueden percibir ni mostrar por sí mismos: las ideas, los conceptos, las creencias, etc. Lo que sí se pueden es "invocar" o "evocar" mediante la manipulación de ciertos objetos ostensivos apropiados.

2.1.3. De manera un tanto paradójica, una vez establecida esta dicotomía, se postula la coexistencia permanente de los objetos ostensivos y los objetos no-ostensivos, dentro de lo que llamamos la ***dialéctica de lo ostensivo y de lo no-ostensivo***: los objetos no-ostensivos emergen de la manipulación de objetos ostensivos pero, al mismo tiempo, dicha manipulación está siempre guiada y controlada por objetos no-ostensivos. El concepto de número entero o el de función lineal no existen sin toda una actividad manipulativa de ostensivos (tanto lingüística como gráfica, gestual y de escritura, sin olvidar en el origen la manipulación

4. Dentro del programa cognitivo, ver, por ejemplo, Duval (1996) y su noción de "registro de representación semiótica".

5. La manipulación de ostensivos incluye también su activación por medio del ordenador, actividad que pone en juego muy especialmente el registro de la escritura, aunque también el gráfico y el gestual, provocando además la creación de nuevos tipos de ostensivos y de articulaciones entre registros.

concreta de objetos materiales). Recíprocamente, toda manipulación de ostensivos viene controlada por la "activación" o "evocación" de objetos no-ostensivos cuyas características pueden verse modificadas a lo largo de la actividad.

2.1.4. Estamos pues lejos de reproducir una conceptualización simplista en la que lo ostensivo correspondería al nivel del "saber-hacer", con sus tipos de problemas y sus técnicas o procedimientos de resolución, reservándose el ámbito de los objetos no-ostensivos (conceptos, nociones, ideas, etc.) a la actividad justificativa y explicativa, es decir, el "saber" propiamente dicho. Al contrario, la distinción ostensivo/no-ostensivo afecta a *todos los elementos* que componen las organizaciones matemáticas. Es evidente, por ejemplo, que la elección de una simbolización y de una terminología adecuadas son también elementos muy importantes para la constitución y "calidad" de una tecnología o teoría. Y, de igual modo, la realización efectiva de una técnica puede variar enormemente, en términos de su eficacia y robustez, según si se activa un objeto no-ostensivo u otro. Así, por ejemplo, no es lo mismo producir una expresión simbólica como $(1+r)^2 = 1 + 2r + r^2$ a partir de una simple actividad de copia, activando no-ostensivos del tipo "igualdad entre escrituras", etc., que producirla como resultado de aplicar un desarrollo de cuadrados (un "pattern", como se diría en inglés) o como la igualdad entre una función y su polinomio tangente de orden 2 en torno a $x = 0$, que activaría no-ostensivos de muy distinto nivel.

2.1.5. Así pues, a la pregunta sobre el origen de los conceptos matemáticos (no-ostensivos) y su relación con los objetos que los representan (ostensivos), la Teoría Antropológica responde en términos de la dialéctica arriba mencionada: los conceptos surgen de la manipulación de ostensivos dentro de determinadas organizaciones matemáticas (es decir, como respuesta a ciertas tareas problemáticas y en un entorno tecnológico-teórico dado) y es esta misma práctica que, al institucionalizar u oficializarse, establece los vínculos entre ostensivos y no-ostensivos que permitirán a los primeros remitir o representar a los segundos en futuras posibles actividades.

2.1.6. Hablar de la coexistencia (o coactivación) de ostensivos y no-ostensivos en todos los niveles de organización de la actividad matemática, significa que en ningún caso se atribuye la primacía de los no-ostensivos sobre los ostensivos: no existe manipulación ostensiva (una escritura o un discurso) que sea la consecuencia directa de una supuesta "posesión" o "adquisición" de un no-ostensivo (una noción o un concepto); ni existe, en el lado opuesto, una manipulación ostensiva regulada que pueda prescindir de objetos no-ostensivos.

2.1.7. Sin embargo, la hipótesis de coexistencia entre ostensivos y no-ostensivos incluye la determinación de las relaciones que existen, en una institución dada y en un momento dado de su historia, entre determinados ostensivos y determinados no-ostensivos. Como bien puso de manifiesto la lingüística moderna desde Saussure (1962), la relación entre ostensivos y no-ostensivos se realiza de manera *arbitraria*, es decir no motivada por la naturaleza de los ostensivos, aunque sí provocada por el tipo de actividad manipulativa en la que éstos entran. Dicho de otro modo, no hay ninguna razón absoluta para que la escritura $f(x)$ se asocie al concepto de función, más que el hecho que, en la institución considerada, el ostensivo escrito $f(x)$ y el ostensivo oral "efe de equis" formen parte de las organizaciones matemáticas que se vinculan institucionalmente al no-ostensivo "función" (esto es, al no-ostensivo al que se invoca con el ostensivo oral "función").

2.2. ¿Representación? La "valencia semiótica" de los instrumentos ostensivos

2.2.1. Cuando decimos que los objetos ostensivos permiten, si no "mostrar", por lo menos "evocar" e "invocar" los objetos no-ostensivos, retomamos el punto de vista dominante sobre la actividad matemática que consiste en considerar que los objetos ostensivos son los *signos* de otros objetos, generalmente no-ostensivos, a los cuales representan. Llamamos *valencia semiótica* a esta función de los ostensivos, aunque consideraremos que lo representado no es únicamente un no-ostensivo (concepto, idea o noción), sino que está formado siempre por *complejos* de objetos ostensivos y no-ostensivos vinculados por determinadas actividades matemáticas, es decir, por organizaciones matemáticas más o menos amplias.

2.2.2. Si consideramos que los ostensivos pueden funcionar como signos de una praxeología matemática, remitiendo a varios de los elementos (ostensivos y no-ostensivos) que las componen, también está claro que esta valencia semiótica sólo se adquiere en el ámbito de la realización de una actividad. Los ostensivos no "poseen" un significado, sino que, al ser manipulados, *producen* significado evocando otras organizaciones matemáticas. Así pues, en lugar de considerar el caso más restringido en el que un ostensivo, al ser manipulado, representaría un no-ostensivo, debemos hablar, más en general, de la *representación de toda una praxeología u organización matemática* (la organización "representada") y, ello, a partir de la manipulación de un ostensivo, manipulación que, a su vez, se inscribe en otra organización matemática (la organización "representante" o *modelo* de la anterior).

2.2.3. Podemos considerar finalmente que la valencia semiótica de los objetos ostensivos es inseparable de la *relación de modelización* que une una organización matemática considerada como *sistema* que se quiere estudiar, a una organización que funciona como *modelo* de la anterior (Chevallard, 1985-1989). Obtenemos entonces una nueva interpretación de la noción de representación mediante la noción matemática de modelización. Así, por ejemplo, una figura geométrica podrá "representar" una determinada propiedad o relación entre números, en la medida en la que dicha figura forme parte de una organización matemática en torno a determinados tipos de problemas geométricos que funcione como *modelo* de una organización numérica considerada entonces como *sistema modelizado*.[6]

6. Por ejemplo, el siguiente triángulo de puntos puede funcionar como *modelo* geométrico
?
? ?
? ? ?
? ? ? ?
para "representar" la suma de los n primeros números naturales (el *sistema* aritmético modelizado) y permitir establecer, usando el cálculo del área del triángulo (la *manipulación* del modelo), que la suma es $(n+1)/2$.

2.3. Valencia instrumental y "sensibilidad" de la actividad a los ostensivos

Como ya hemos dicho anteriormente, la Teoría Antropológica atribuye a los objetos ostensivos, al lado de su valencia semiótica, una *valencia instrumental* ligada a la capacidad de los sistemas de ostensivos para integrarse en manipulaciones técnicas, tecnológicas y teóricas. Desde el momento en que se consideran los objetos ostensivos como constitutivos de las organizaciones matemáticas y los ingredientes primarios de las tareas, técnicas, tecnologías y teorías, se presentan, en primer lugar, como *instrumentos* de la actividad matemática, herramientas materiales sin las cuales no se podría realizar la actividad. Y, al igual que el albañil con su paleta (cuya valencia semiótica, dicho sea de paso, es innegable), lo que importa al realizador de la actividad matemática (y a todo aquél que debe reproducirla o hacerla reproducir), lo importante no es tanto lo que la herramienta pueda representar, sino su adecuación y efectividad en la realización de la actividad.

2.3.1. En un estudio sobre la gestión didáctica de los objetos ostensivos y su papel en el desarrollo de la actividad matemática en torno a la proporcionalidad (Bosch, 1994), la consideración de la valencia instrumental de los ostensivos permite poner en evidencia cómo pequeñas variaciones en determinados sistemas de ostensivos que, aparentemente, no afectaban excesivamente su valencia semiótica, sí podían, a largo plazo, afectar las condiciones (técnicas, pero también tecnológicas y teóricas) de realización de la actividad.

2.3.2. El análisis didáctico de las actividades matemáticas que se enseñan a los alumnos de la escolaridad obligatoria pone de manifiesto cómo, por exigencias de origen cultural, se tiende a menospreciar la valencia instrumental de los ostensivos de determinados registros, en particular el del grafismo y del lenguaje verbal), mientras que en otros registros (como el de la escritura algebraica, por ejemplo), se despoja a los ostensivos de toda capacidad significativa. El resultado es entonces una escasa atención al trabajo de manipulación del primer tipo de ostensivos (no se trabaja el discurso, se exigen gráficos muy precisos pero poco manejables, etc.) y un peso excesivo en la exigencia de interpretación del trabajo realizado con los ostensivos del segundo tipo (como el formalismo algebraico "no habla por sí mismo", se exige a los alumnos que, además de manipularlas correctamente, sean capaces de explicitar "el significado" de las expresiones algebraicas manipuladas, etc.).

3. PLURALIDAD DE REGISTROS Y REDUCCIÓN OSTENSIVA

3.1. La problemática didáctica

La didáctica de las matemáticas postula la existencia de *leyes didácticas* que rigen el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, condicionando su desarrollo en un entorno institucional concreto. Estas leyes se manifiestan en forma de *fenómenos didácticos* que, hasta cierto punto, escapan a la voluntad de los actores del proceso didáctico y que se constatan empíricamente como regularidades observables y difíciles de modificar.

3.1.1. Así, ante la constatación de alguna regularidad del tipo "se observa en la enseñanza de las matemáticas en secundaria el predominio del registro del formalismo algebraico y una marcada dificultad para articularlo con los demás registros (en particular el gráfico)", cabe preguntarse por las "razones" de la existencia de dicha regularidad o, lo que es equivalente, hay que buscar las condiciones bajo las cuales se da el fenómeno observado y aquéllas bajo las cuales podría no darse.

3.1.2. En las investigaciones que participan del ***programa cognitivo***, se considera que dichas "razones" provienen fundamentalmente del funcionamiento psicológico de los sujetos que aprenden y de los que enseñan. El ***programa epistemológico*** postula, en cambio –y ésa es sin duda una de sus hipótesis fuertes– que la naturaleza de los fenómenos didácticos es esencialmente ***matemática***, entendiendo "las matemáticas" en el sentido amplio de una actividad humana que se realiza en ámbitos institucionales concretos.

3.2. Un fenómeno didáctico: conocimientos exigidos que no son enseñados

Un tipo de fenómeno puesto en evidencia por diferentes investigaciones del programa epistemológico dentro de la Teoría de las Situaciones Didácticas concierne a las dificultades que tiene el profesor para gestionar en clase cierto tipo de conocimiento que no se considera como parte de la actividad matemática que se trata de enseñar, pero que resulta necesario para realizar las tareas que se encomiendan a los alumnos. Dicho de otro modo, el profesor se ve en múltiples ocasiones impelido a exigir de sus alumnos ciertos tipos de conocimientos que no les enseña (ni a veces les puede enseñar) pero que resultan necesarios para que se desarrolle el proceso de aprendizaje.

3.2.1. Este fenómeno se da, por ejemplo, en el caso de la utilización del razonamiento natural cuando se enseña el razonamiento lógico-matemático (Orús, 1992);[7] en el recurso a ciertos conocimientos espaciales durante el aprendizaje de la geometría elemental (Berthelot y Salin, 1992); o cuando se detecta que la actividad de estructuración y enumeración de colecciones, conocimiento que casi nunca es objeto de enseñanza explícita en la escuela obligatoria (desde la educación infantil a la ESO), constituye un conocimiento esencial para aprender a contar o a resolver problemas de combinatoria (Briand, 1993 y 1999).

3.2.2. En los casos anteriores, el problema didáctico puesto en evidencia es la dificultad de dar en clase un tratamiento explícito a conocimientos, general-

7. En este caso, el conocimiento exigido llega incluso a ser contrario al conocimiento que se pretende enseñar: son cláusulas habituales del contrato didáctico el hecho que el profesor pida a sus alumnos que generalicen una propiedad a partir de la consideración de algunos casos particulares, que no consideren el caso particular como incluido en el caso general (no es lo mismo un cuadrado que un rectángulo), etc.

mente transparentes para el profesor, cuyo estatuto (matemático) es incierto, cuando no totalmente inexistente. Su tratamiento didáctico pasa entonces por la explicitación de dichos conocimientos y por su consideración como parte integrante de la actividad matemática, es decir, por su matematización.[8]

3.3. El difícil tratamiento didáctico de ciertos registros ostensivos

El fenómeno descrito anteriormente afecta también, en cierto sentido, a la gestión didáctica de algunos registros ostensivos, debido a su difícil consideración como parte integrante de la actividad matemática (Bosch, 1994; Bosch y Chevallard, 1999).

3.3.1. Es un hecho conocido, y ampliamente puesto en evidencia, el débil recurso a determinados tipos de ostensivos en la construcción escolar de conocimientos matemáticos, en beneficio del registro de la escritura y del formalismo algebraico. Se observa, en efecto, en la matemática escolar, que los ***grafismos*** aparecen raramente en cuanto instrumentos de la actividad: su activación acostumbra a venir motivada por exigencias didácticas (hay que representar la gráfica de una función o dibujar una figura geométrica) y no por necesidades matemáticas, como herramientas para resolver problemas.

3.3.2. El registro de lo ***gestual*** queda prácticamente ignorado, y cuando se menciona (como en el gesto de "pasar un término de un lado al otro de una igualdad", para realizar un "producto en cruz" o para multiplicar dos matrices), se presenta como un "artilugio" con escasa legitimidad matemática. En ningún caso aparece como una etapa previa de un proceso de matematización que, por la vía del formalismo algebraico, "transporta" la mayoría de ostensivos gestuales en el registro de lo escrito.

3.3.3. Esta situación no debería ser considerada únicamente como una particularidad escolar. También en la matemática sabia, el reino del formalismo algebraico acaba confinando al "rincón de la pizarra" la mayoría de instrumentos gráficos y gestuales que, de hecho, y para el trabajo "privado" del investigador, resultan imprescindibles para la producción, explicación y reconstrucción de muchas demostraciones matemáticas (Guzmán, 1997).

3.3.4. En realidad, se puede mostrar que, a medida que se avanza en la construcción del conocimiento matemático, aparece un fenómeno de ***reducción ostensiva***[9] que tiende a recluir los instrumentos ostensivos utilizados al registro de lo escrito o, cuanto menos, de lo que se puede plasmar en el papel. Los demás registros, a pesar de que siguen estando presentes, quedan relegados al ámbito de "lo accesorio" y resultan difícilmente "enseñables".

8. El programa epistemológico no asume como tal la definición de "lo matemático" que nos impone la cultura, ni aquella que impera en las distintas instituciones en las que se usan, fabrican o enseñan matemáticas. En cuanto objeto primario de estudio, la definición y delimitación de la actividad matemática es algo que está siempre abierto y en constante cuestionamiento. Este cuestionamiento ("el misterio está en las matemáticas y no en los sujetos que las aprenden o enseñan") es uno de los puntos de partida del programa epistemológico en didáctica de las matemáticas. (Bosch y Chevallard 1998)

9. Ver Bosch, 1994; Bosch y Chevallard ,1999.

4. UN PROBLEMA DIDÁCTICO Y UNA PARADOJA

4.1. Cuestiones abiertas

¿Por qué si, como mantiene un gran número de investigadores, el recurso a una diversidad de registros debería facilitar el desarrollo del pensamiento matemático,[10] la evolución histórica de la actividad matemática tiende cada vez más a reducir el conjunto de ostensivos con los que se trabaja el registro de lo escrito? ¿Bajo qué condiciones se puede controlar, en el trabajo matemático de los alumnos, el uso abusivo de la escritura y de un pseudo-formalismo algebraico, en detrimento de los demás registros, en particular el de lo verbal y de lo gráfico? ¿Qué se necesita para que el recurso a estos dos registros sea realmente instrumental y no se quede, como ocurre generalmente, en el plano de la manipulación formal (por imposición cultural o didáctica, que no matemática)?

4.1.1. El programa epistemológico postula que la respuesta a dichas cuestiones debe hallarse en la naturaleza misma de la actividad matemática, en sus condiciones de génesis y de desarrollo, tanto históricas como institucionales. Si se asume que la evolución de la actividad matemática conduce a una disminución del "espesor ostensivo" de los instrumentos de trabajo mediante el proceso de algebrización o de formalización, entonces se necesita un trabajo específico de ingeniería matemático-didáctica para encontrar tipos de problemas o de situaciones problemáticas que provoquen o faciliten el recurso a la variedad de registros más adecuada en cada caso.

4.1.2. No se puede presuponer ni, por un lado, que el fenómeno de reducción ostensiva señalado tenga una causa exclusivamente didáctica y caiga bajo la responsabilidad de los profesores, ni que, por otro, esté únicamente en sus manos la solución. El trabajo de ingeniería matemático-didáctica señalado anteriormente deberá tener en cuenta, además, las restricciones específicas que pesan sobre la reconstrucción escolar de la actividad matemática, condiciones ligadas a la gestión del proceso de estudio y del contrato didáctico.

4.1.3. De todos modos, en ningún caso habría que relacionar de forma absoluta la disminución del recurso a distintos registros ostensivos con una disminución de la "comprensión" matemática. El proceso de algebrización es un caso claro de reducción ostensiva productiva de nuevos conocimientos y de mayor comprensión hacia muchos fenómenos matemáticos: la modelización algebraica, al construir modelos o "representaciones" escritas de gran número de organizaciones matemáticas (piénsese únicamente en la geometría, por ejemplo), ha permitido, y sigue permitiendo hoy día, resolver nuevos problemas, producir nuevas justificaciones y, sobre todo, establecer nuevas relaciones tanto entre tipos de problemas aparentemente dispares como entre distintas tecnologías e

10. Ésta es una hipótesis asumida por un gran número de investigaciones llevadas a cabo en el marco del programa cognitivo. Ver, por ejemplo, Duval (1994 y 1996), Hiebert y Carpenter (1992), Kaput (1992), Rico y Romero (1999).

incluso teorías.[11] Sí podríamos relacionar, en cambio, la "comprensión de fenómenos matemáticos" con la capacidad de ***construir modelos*** diversos e interrelacionados sobre sistemas cada vez más complejos.

4.1.4. Las necesidades propias a la actividad de modelización ha provocado que, en muchos campos abiertos de la investigación matemática, haya habido que volver a recurrir, y de forma demostradamente fructífera, a modelos sacados de una variedad de registros ostensivos, especialmente al del grafismo (piénsese, por ejemplo, en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, en la teoría de grafos o en los múltiples ejemplos, dentro del análisis, señalados por Guzmán (1997). Así pues, son las propias necesidades matemáticas ligadas a las organizaciones concretas que se trata de reconstruir en la escuela (y, en particular, a los problemas que en ellas se plantean) las que deberían guiar la elección de los tipos de ostensivos que se ponen a disposición de los alumnos y la importancia otorgada a los distintos registros.

4.1.5. Esta elección deberá tomar en cuenta las restricciones que afectan el recurso en el aula a los distintos registros ostensivos, restricciones que podrán ser tanto culturales (el "desprecio" al álgebra y al formalismo escrito, la supravaloración del lenguaje oral y del grafismo, etc.) como matemáticas (ausencia de técnicas o de tecnologías explícitas, o imposibilidad de ponerlas a disposición de los alumnos, etc.). [12]

4.2. La paradoja

Identificar "comprensión" con "pluralidad ostensiva" o "diversidad de registros" nos conduciría pues, de forma paradójica, a oponer el incremento de la comprensión matemática con la evolución histórica del conocimiento matemático. Estudiar, como propone la Teoría Antropológica, las condiciones de realización y evolución de la actividad matemática prestando especial atención a los instrumentos ostensivos que permiten ejercerla nos conduce, por el contrario, a poner de manifiesto determinadas necesidades matemáticas de origen didáctico que, lejos de circunscribirse al ámbito escolar, pueden llegar a afectar a todos los ámbitos de realización de la actividad matemática, incluyendo sus distintas formas de difusión, entre las que se encuentra, obviamente, el trabajo matemático de investigación.

11. Sobre la modelización algebraica y el proceso de algebrización, ver Chevallard (1985-1989) y Bolea, Bosch y Gascón (1998).

12. Ver Chevallard (1985), Bosch (1994) y Bosch y Chevallard (1999).

REFERENCIAS

Brousseau, G. (1994), Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques, *ICMI Study 94.*

Brousseau, G. (1999), *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Berthelot, J. R.& Salin, M. H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Tesis doctoral de la Universidad Bordeaux I. Burdeos: Publicaciones del LADIST.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J.(1998), The role of algebraization in the study of a mathematical organization, *Proceedings of CERME-1*.

Bosch, M. (1994), *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 77-123.

Briand, J. (1993), *L'énumération dans le mesurage de collections*, Tesis doctoral de la Universidad Bordeaux I. Burdeos: Publicaciones del LADIST.

Briand, J. (1999), Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 41-75.

Chevallard, Y. (1985-1989), Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège, *Petit x*, nº 5 (51-94), nº19 (43-72).

Chevallard, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 73-112.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17/3, 17-54.

Chevallard, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.

Duval, R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères – IREM*, 17, 121-138.

Duval, R. (1996), Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?, *Recherches en didactique des mathématiques*, 16/3, 349-382.

Gascón, J. (1998), Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1, 7-34.

Gascón, J. (1999), "Didactique fondamentale" *versus* "Advanced Mathematical Thinking": ¿dos programas de investigación inconmensurables?, *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Tomo II, 152-170.

Guzmán, M. de (1997), *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático. Elementos básicos del análisis*. Madrid: Pirámide.

Hiebert, J. & Carpenter, T.(1992), Learning and teaching with understanding. En: Grouws, D. A., (ed.), *Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Publishing Company.

Kaput, J. J. (1991), Notations and Representations as mediators of constructive processes. En: von Glasersfeld, E. (ed.), *Radical constructivism in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Orús, P. (1992), *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique ; effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*, Tesis doctoral de la Universidad Bordeaux I. Burdeos: Publicaciones del LADIST.

Romero, I. & Rico, L. (1999), Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en Secundaria. *Revista EMA*, 4/2, 117-151.

Saussure, F. de (1962), *Cours de linguistique générale*, Paris: .

Sfard, A. (1994), Reification as the Birth of Metaphor, *For the Learning of Mathematics*, 14/1, 44-55.

Thurston, W. P. (1994), On proof and progress in mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30/2, 161-177.