

COMENTÁRIO A “LA ENSEÑANZA DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO
EN EL BACHILLERATO Y PRIMER CURSO DE UNIVERSIDAD. UNA
PERSPECTIVA DESDE LA TEORÍA DE LOS OBSTÁCULOS
EPISTEMOLÓGICOS Y LOS ACTOS DE COMPRESIÓN”

LURDES SERRAZINA

Escola Superior de Educação de Lisboa

O projecto de investigação “Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático (límite, continuidad, derivada e integral) en manuales y en estudiantes del Bachillerato-LOGSE y de primer curso universitario” parece muito interessante nomeadamente quando pretende estudar os problemas relacionados com o ensino e aprendizagem da Análise Matemática nos dois anos do Bachillerato e no primeiro curso da Universidade, e juntar na mesma equipa professores dos dois níveis de ensino envolvidos. O facto de se ligar o ensino da Análise Matemática no pré-universitário e no universitário é um aspecto inovador na investigação em educação matemática.

O problema da investigação bem como a motivação dos investigadores pelo tema são apresentados numa forma clara. Os conceitos envolvidos são o de limite, continuidade, derivada e integral. Considera-se como um dos fenómenos didácticos fundamentais dentro do ensino da matemática o da “algebrização do cálculo diferencial escolar” que se manifesta num enfoque algébrico e reducionista do cálculo e se baseia nas operações algébricas com limites, derivadas e integrais, o que, para o autor implica tratar numa forma simplista as ideias e técnicas específicas da análise. A partir deste fenómeno emerge, na sua perspectiva, um problema didáctico-matemático que se propõe investigar uma vez que é considerado que as tarefas propostas não são inocentes.

O projecto tem um duplo objectivo:

- a identificação dos factores e fenómenos didácticos que influenciam uma adequada compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos fundamentais da Análise Matemática: limite, continuidade, derivada e integral;
- o conseguir uma harmonização do ensino, através de estratégias de ensino e aprendizagem situações didácticas adequadas, nos cursos que existem nos dois níveis educativos (Bachillerato-Logse e Universidade).

Foram definidos os seguintes objectivos específicos:

1. Análise epistemológica da evolução e génese histórica das distintas noções objecto de estudo.
2. Análise comparativa de livros de texto actuais, segundo autor e nível de ensino, em relação aos conceitos de limite, continuidade, derivada e integral.
3. Estudo qualitativo-quantitativo da evolução de concepções e obstáculos dos alunos, através de questionários aplicados antes e depois do ensino dos conceitos.
4. Realização de um diagnóstico, considerando os resultados obtidos, sobre os conteúdos e o tipo de ensino a realizar em ambos os níveis de ensino com o objectivo de conseguir a sua harmonização.

Segundo os autores, esta investigação assenta em duas ideias fundamentais: a de obstáculo epistemológico e a de acto de compreensão. A noção de obstáculo epistemológico está inserida numa perspectiva da matemática como um sistema cultural (Sierspinka, 1994) estando os elementos deste sistema divididos em três níveis: o formal, o informal e o técnico. No nível formal estão elementos como crenças e julgamentos sobre o que é a matemática e quais os métodos que são aceitáveis para prova em matemática; ideias sobre como se dá a evolução da matemática, por exemplo, se por acumulação ou através da prova-refutação (Lakatos, 1976); atitudes filosóficas e intuições culturais. No nível informal encontra-se localizado o saber implícito que permite aos matemáticos pôr e resolver problemas. No nível técnico encontram-se as teorias matemáticas e os conhecimentos verbalizados e validados. Alguns elementos do nível formal e informal podem ser fontes de obstáculos epistemológicos, que têm de ser ultrapassados pelos alunos se um novo conceito é para ser desenvolvido (Sierspinka, 1994).

O projecto propõe-se “estudar a evolução das concepções dos alunos”, mas não fala de concepções alternativas (*alternative frameworks*), embora considere que “as respostas erróneas dos alunos não ocorrem ao acaso, mas estão associadas aos distintos obstáculos inerentes aos conceitos e aos processos de transposição didáctica”. Não é clarificado o que se entende por ‘respostas erróneas’, nem se elas resultam de “concepções erróneas” (*misconceptions*) ou de concepções alternativas. Na minha opinião, num estudo em que se pretende estudar “a evolução das concepções dos alunos” faz falta uma discussão à volta destes termos.

Concepção errónea tem diferentes sentidos na literatura. Por exemplo, no estudo de Davis e Vinner (1986), as respostas dos alunos são interpretadas sob o ponto de vista da matemática formal. Concepções erróneas foram consideradas como sendo as diferenças entre as respostas dos alunos e a definição formal do conceito. Por exemplo, os autores afirmam que na seguinte frase “o limite de uma sucessão é o fim da sucessão. É o quanto longe que a sucessão pode ir, até não haver mais ou não poder mais”, contém pelo menos a seguinte concepção errónea: “assumir que a sucessão tem um último termo, uma espécie de ∞ ” (Davis e Vinner, 1986, p. 294).

Strike (1983) define concepção errônea do seguinte modo:

“Uma concepção errônea é uma suposição eventualmente importante no sistema de crenças (*beliefs*) do aluno. É algo que gera erros. É uma parte importante da ecologia conceptual do aluno que serve para seleccionar ou rejeitar outras ideias ou para interpretá-las como mais ou menos inteligíveis” (p. 73).

Para ele a concepção errônea é algo importante e profundo na mente do aluno – é algo que está para além duma simples comparação com a perspectiva científica. Strike apresenta o seguinte exemplo: “uma criança desenhava uma figura de astronauta a ir da Terra para a Lua num foguetão. A figura mostrava o foguetão a tornar a Lua e a aterrar no outro lado que era representado de forma mais ou menos plana” (Strike, 1983, p. 72). Podemos considerar que “a Lua é plana” é uma concepção errônea. No entanto, a um nível mais profundo, a concepção errônea pode ser a suposição de um absoluto “em baixo” e “em cima”. A perspectiva da concepção errônea de Strike parece ser mais profunda do que a de Davis e Vinner. Strike vai além das afirmações dos alunos, tentando dar sentido a essas afirmações num contexto mais amplo. Strike consegue perceber mais significado e ter uma perspectiva mais profunda e intrínseca das concepções dos alunos.

O termo “concepção alternativa” foi introduzido por Driver e Easley (1978) e parece-me ser mais um passo no sentido da compreensão das concepções dos alunos como concepções legítimas. Para estes autores, concepções alternativas “são tentativas de explicação de eventos e de abstracção daquilo que é comum a esses eventos” (p. 62). Por exemplo, numa sala de aula de Ciências os alunos tinham a tarefa de pesar diferentes objectos com uma balança de mola. Um dos alunos fazia experiências com um objecto pesando-o a diferentes alturas. Quando questionado sobre o que estava a experimentar, confessou, surpreendido, que o peso do objecto não mudava consoante a altura e explicou o motivo da sua surpresa:

“Aqui está mais alto e a gravidade puxa com mais força quanto mais alto está. Quanto mais alto está maior é o efeito da gravidade, pois se tu estiveres aí e alguém deixasse cair um berlinde em cima da tua cabeça não te magoaria. Mas se eu largar um berlinde de um avião e ele atingisse alguém na cabeça podia matá-lo” (Driver *et al.*, 1985, p. 2).

Esta afirmação do aluno mostra que a ideia de que os objectos pesam mais se estiverem a uma maior altura é uma ideia com base nas experiências do aluno e, conseqüentemente, tem direito a ser considerada correcta no contexto dessas experiências. Dizer simplesmente que o aluno tem uma concepção errônea sobre peso é passar sobre uma quantidade de factores que constituem o significado de peso para o aluno.

Hills (1989) elabora sobre a noção de concepção alternativa de Driver e Easley (1978) propondo que as concepções dos alunos devem ser interpretadas no seu próprio contexto em vez de comparadas com a perspectiva científica ou medidas pela perspectiva científica. Sierspinka (1994) considera que numa aula de matemática, compreensão tem lugar num ambiente social que tem muitas componentes ou dimensões diferentes. Assim, a compreensão que os alunos

desenvolvem, a partir duma dada actividade, depende do ‘contrato didáctico’ que se estabelece entre o professor e os alunos nessa situação particular.

Assim, para encontrar uma concepção alternativa é necessário ter acesso às ideias dos alunos de várias maneiras. O mais importante é tentar perceber como é que as concepções funcionam para os alunos e não para o investigador ou fazer comparações com a perspectiva científica.

Portanto, um esquema de pensamento ou uma regra que um indivíduo usa pode funcionar como um obstáculo num certo momento da evolução da cultura matemática (desse indivíduo), somente quando o indivíduo não tem consciência da limitação desse esquema ou dessa filosofia, e se a atitude do indivíduo é a de acreditar na filosofia subjacente ao esquema de pensamento, em vez de fazer uma escolha e ter consciência das consequências dessa escolha.

Moura (1995) explica a diferença entre concepção alternativa e concepção errónea. Na sua perspectiva da definição de obstáculo epistemológico resulta que uma concepção alternativa é influenciada pela perspectiva que o aluno tem da Matemática. Por exemplo, em Sierspinka (1987) um dos alunos entrevistados afirma que $0.9(9)$ denota $0.9999\dots 9$ e que $0.9(9)$ é somente uma aproximação de 1. Este aluno tem uma atitude finitista e uma perspectiva do conhecimento científico intuitiva e empiricista. Esta perspectiva do conhecimento científico que o aluno tem constitui uma fonte de obstáculo epistemológico à compreensão da definição formal de limite. Enquanto o aluno “não se der conta” das limitações da sua perspectiva científica não pode transpor o obstáculo que o leva a não compreender a definição formal de limite.

No estudo desenvolvido por Moura (1995) foram investigadas e interpretadas, usando a metodologia subjacente à noção de concepção alternativa, as ideias de três alunos universitários (que tinham no mínimo feito uma cadeira de Análise Infinitesimal), sobre a noção de limite. Os três alunos apresentaram modelos para a noção de limite envolvendo ideias dinâmicas, e comutaram entre representações algébricas e geométricas, enquanto pensaram num problema geométrico sobre limites. A autora conclui que enquanto a definição formal de limite é estática, estes alunos apresentaram concepções alternativas dinâmicas. Este estudo confirma que representações múltiplas ajudam os alunos a articular os conceitos facilitando a crítica, o teste e a implementação das ideias que usam durante o estudo desses conceitos (Moura, 1995). Também o estudo sobre convergência realizado por Moura e Costa (1997), no âmbito do projecto AMECC (Aprendizagens em Matemática: um estudo sobre a construção de conceitos), confirma que os alunos olham para as sucessões como objectos dinâmicos e consequentemente, a correspondente noção de convergência é representada por modelos dinâmicos.

No projecto aqui apresentado por Contreras foram formuladas quatro hipóteses de trabalho, tendo por base experiências anteriores dos investigadores. A primeira afirma que relativamente às situações de ensino, os livros de texto e os alunos mostram umas concepções que podem, no geral, identificar-se com o que o estudo histórico determina sobre a noção. A segunda refere que no tratamento didáctico dos conceitos nos textos dirigidos aos alunos não aparece uma

sequenciação adequada para provocar os actos de compreensão do aluno que o permitam superar os obstáculos inerentes ao conceito e ao processo de transposição didáctica. Na terceira afirma-se que os alunos dos dois níveis educativos não mostram, em geral, uma evolução na compreensão dos conceitos objectos de estudo, enquanto ampliação das suas concepções e superação dos obstáculos, uma vez recebida a instrução. Por último refere-se que as respostas erróneas dos alunos não acontecem por acaso, mas estão associadas a diferentes obstáculos inerentes aos conceitos e ao processo de transposição didáctica.

A amostra é formada por 30 alunos do Bachillerato-Logse, 30 alunos do 1º ano da universidade e 10 livros de texto. Uma vez que acreditamos que as concepções devem ser interpretadas no seu próprio contexto, parece-me bastante relevante o estudo dos livros de texto, mas não seria igualmente relevante o perceber o tipo de ambiente de sala de aula que vai para além disso e que tem a ver o tipo de organização da aula, com o tipo de tarefas propostas, e como é feita a sua condução pelos professores?

Na metodologia é afirmado que se segue fundamentalmente uma metodologia do tipo qualitativo interpretativo, mas como instrumentos de recolha de dados indica-se um questionário escrito "para o estudo da evolução das concepções dos alunos" de itens com perguntas abertas e fechadas sobre as concepções e obstáculos relativos aos conceitos objecto de estudo. Acrescenta-se ainda que nos casos em que for preciso se realizarão entrevistas aos alunos que permitam aprofundar as suas concepções.

Como é referido por Moura (1995) para encontrar uma concepção alternativa é necessário ter acesso às ideias dos alunos de várias maneiras. É crucial ter em mente que o objectivo é tentar compreender como é que as concepções funcionam para o aluno. Ponte (1992) afirma que o estudo das concepções depara-se com vários problemas metodológicos. Um questionário, mesmo com perguntas abertas, parece apenas servir para começar a abordar o assunto. É preciso recorrer a entrevistas, onde em vez de perguntas directas, se propõem tarefas, situações e questões indirectas mas reveladoras que ajudem as concepções a evidenciar-se (Ponte, 1992).

REFERÊNCIAS

- Davis, R. B. e Vinner, S. (1986). The notion of limit: some seemingly unavoidable misconceptions stages. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.
- Driver, R. e Easley, J. (1978). Pupil's paradigms: a review of literature related to concept development in adolescent science students. *Studies in Science Education*, 5, 61-84.
- Driver *et al.* (1985). *Children's ideas in science*. Milton Keynes: Open University.
- Hills, G. (1989). Students' untutored beliefs about Natural Phenomena. *Science Education*, 73(2), 155-186.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. New York: Cambridge University Press.
- Moura, E. (1995). Concepções alternativas dos alunos sobre a noção de limite. *Actas do V Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM.

- Moura, E. e Costa, M. J. (1997). Caminhos de aprendizagem na noção de sucessão convergente. *Actas do VII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos e J. P. Ponte (Org.), *Educação Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional e Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Sierspinka, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.
- Sierspinka, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 371-397.
- Strike, K. (1983). Misconceptions and conceptual change: philosophical reflections on the research program. *Proceedings of the International Seminar: misconceptions in science and mathematics*. Cornell University, Ithaca, NY, USA.