Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones

Enrique Castro, Encarnación Castro, Luis Rico,
José Gutiérrez, Antonio Tortosa, Isidoro Segovia, Evaristo González,
Nicolás Morcillo, Francisco Fernández
Seminario CIEM
Dpto Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

En las investigaciones que estamos realizando en el campo aditivo utilizamos un conjunto de factores diferenciadores de los problemas de estructura aditiva, que presentamos a continuación.

Influencia del tipo de número

Uno de los factores importantes que diferencia los problemas aritméticos es el tipo de número con el que se expresan las cantidades (natural, entero, decimal) y el tipo de magnitudes asociadas (discretas y continuas). En los primeros años de escolaridad, los números empleados son casi exclusivamente números naturales y magnitudes discretas. Por ello, nos referimos sólo a problemas con números naturales y magnitudes discretas.

Problemas simples y compuestos

Otra gran diferenciación que hacemos es entre *problemas simples y compuestos*. Atendiendo al número de relaciones que aparecen explícita o implícitamente en la información que se proporciona en el enunciado se puede hablar de problemas *simples* y *compuestos*. La información suministrada en un problema *simple* contiene sólo una relación entre dos datos numéricos en función de la cual el resolutor tiene que operar para obtener un resultado. Cuando interviene más de una relación en el enunciado de un problema lo llamamos *compuesto*.

Para resolver un problema simple se necesita una sola operación aritmética (adición, substracción, multiplicación o división) mientras que para resolver un problema compuesto es necesario emplear al menos dos operaciones distintas o una misma operación varias veces.

A los problema que requieren de sumas o restas para obtener la solución se les llama en general problemas de adición o de substracción. Puesto que la adición y substracción son operaciones inversas y la substracción puede concebirse como un caso especial de adición, a los problemas de adición y substracción suele denominárseles con el nombre genérico de problemas de *estructura aditiva*.

Problemas de estructura aditiva simples

Los problemas aritméticos aditivos simples, que se suelen denominar también como problemas de una etapa o problemas de un paso, han sido analizados con bastante profundidad desde finales de los años setenta (Castro, 1992, 1994). De estos análisis han surgido una serie de criterios para clasificar los problemas aritméticos simples de estructura aditiva:

a) designar a los problemas con el nombre de las operaciones es confuso, puesto que un problema de restar se puede resolver con una suma.

b) Los problemas simples de estructura aditiva responden a varios tipos de estructuras semánticas.

c) En todo problema hay un esquema subyacente o relación entre los datos.

d) En un problema simple hay tres cantidades relacionadas: dos datos y una incógnita. La incógnita puede ser una de las tres cantidades relacionadas.

e) Hay problemas catalogados como de *aumento* y otros son catalogados de *disminución*.

Con respecto a estos puntos señalar que en alguno de ellos no hay un acuerdo unánime en aspectos parciales. Por ejemplo, la categoría semántica de igualación es admitida por unos investigadores y rechazada por otros. Otro ejemplo: en la categoría de combinación lo más usual es considerar dos tipos de problemas: desconocer el todo o desconocer una parte. Estos dos tipos de problemas pueden pensarse que corresponden al tipo de cantidad desconocida en la relación que existe entre los datos. Pero la diferenciación entre estos dos tipos de problemas de combinación también puede realizarse en términos de que en un problema se produce un aumento (hallar el todo) y en el otro una disminución (hallar una parte).

Nuestro trabajo de investigación sobre problemas aritméticos se sitúa dentro de este marco, siendo uno de los objetivos principales determinar variables estructurales de los problemas aritméticos y qué influencia pueden ejercer sobre la dificultad en la resolución de los mismos. Para el caso particular de los problemas aritméticos aditivos nos centramos en el análisis de los problemas aritméticos aditivos compuestos de dos etapas o de dos pasos.

Problemas aritméticos compuestos de dos pasos

Hemos dicho que en un problema aritmético compuesto hay más de una relación entre los datos. Lo que ocasiona que para resolverlo se requiere más de una operación. Si el problema contiene dos relaciones se necesitan sólo dos operaciones y decimos que se trata de un problema de dos relaciones, dos pasos o dos etapas. Por ejemplo:

> *Problema. En un autocar había 19 pasajeros. En la primera parada bajan 8 pasajeros y suben 5. ¿Cuántos pasajeros hay ahora en el autocar?*

Este es un problema compuesto de dos etapas en el que hay dos acciones sucesivas implicadas.

Realizando las combinaciones de los cuatro operaciones básicas (adición, substracción, multiplicación y división) de dos en dos, obtenemos las dieciséis parejas de operaciones:

(+, +), (+,), (+, x), (+, :), (, +), (,), (, x), (, :),
(x, +), (x,), (x, x), (x, :), (:, +), (:,), (:, x), (: , :)

que pueden emplearse en la resolución de un problema compuesto de dos etapas. No hay muchos trabajos previos de investigación que analicen teóricamente los problemas compuestos de varias etapas. Uno de los primeros es el trabajo de Durell (1928), que considera la resolución de problemas como una de las tres partes de que consta el estudio de la aritmética. Para el estudio de la resolución de problemas aritméticos en la escuela, este autor considera deseable confeccionar una pequeña lista de los tipos de problemas más básicos. El plan podría entonces consistir en descubrir o idear los métodos mejores de dominar estos tipos primarios básicos, dejando los casos especiales para ser tratados de manera subordinada.

Como una ayuda para hacer esta lista de tipos fundamentales de problemas aritméticos considera importante distinguir entre "el número de diferentes tipos de procesos de cálculo y el número de pasos (u operaciones) requeridos para resolver un problema dado”. Así, si los cálculos necesarios para resolver un problema aritmético consisten sólo en adiciones y multiplicaciones entonces es un problema de dos-procesos. Pero si la solución consta de dos multiplicaciones y una adición entonces es un problema de tres pasos (o un tres-operación). Lo siguiente es un ejemplo de los tipos descritos.

> *Ej. Una mujer fue a la tienda a comprar 8 kilos de azúcar a 60 ptas el kilo y 2 kilos de café a 3500 ptas el kilo. Halla el coste total de su compra.*

De acuerdo con lo dicho este problema es de <u>dos-procesos</u> y de <u>tres-pasos</u>.

Durell emplea un simbolismo ligado a los procesos implicados en su solución que para este tipo de problema es (+, x).

Tomando las combinaciones de los cuatro procesos básicos (adición, substracción, multiplicación y división) de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres y de cuatro en cuatro, obtiene así los siguientes quince tipos fundamentales de problemas expresados simbólicamente:

I. Cuatro tipos de un-proceso: (+), ( ), (x), (:).

II. Seis tipos de dos-procesos: (+,), (+, x), (+, :) , (, x), (, :), (x, :).

III. Cuatro tipos de tres-procesos: (+, , x), (+, , :), (+, x, :) (, x, :).

IV. Un tipo de cuatro-procesos: (+, , x, :)

Según Durrell, en la enseñanza de resolución de problemas en aritmética, lo primero que hay que hacer es asegurarse que los alumnos dominan estos tipos elementales (o tantos de ellos como correspondan a un grado determinado) tan a fondo como sea posible, si bien estamos de acuerdo en que el alumno puede ignorar completamente que este sistema de tipos está siendo empleado.

Durrell lo que hace es clasificar los procesos con los que se pueden resolver los problemas y aplica este criterio a los problemas. Puesto que un problema se puede resolver con más de una combinación de procesos el criterio adoptado por Durrell no establece categorías de problemas diferenciados.

El interés por el estudio de los problemas aritméticos de dos pasos (o etapas) ha renacido recientemente (Shallin, 1985; Nesher, 1991; Nesher y Herskovitz, 1994). Los trabajos se centran en el estudio de los esquemas subyacentes a los problemas de dos etapas. Estos autores consideran que los esquemas de los problemas de dos etapas son esquemas compuestos por dos esquemas simples: el aditivo y el multiplicativo. Parten del hecho de que la definición de problema compuesto no se basa en las cuatro operaciones aritméticas sino en las esquemas simples constituidos por una relación entre tres cantidades. En el esquema aditivo las tres componentes son el todo y sus dos partes, mientras que en el esquema multiplicativo las componentes son el producto y sus dos factores. Los autores se basan en el trabajo previo de Shallin y Bee (1985) para afirmar que sólo hay tres esquemas básicos de problemas de dos etapas:

Esquema (A) (*Jerárquico*) - El todo de un esquema es una parte del otro esquema.

Esquema (B) (*Compartir el todo*) - Los dos esquemas comparten un todo.

Esquema (C) (*Compartir una parte*) - Los dos esquemas comparten una parte.

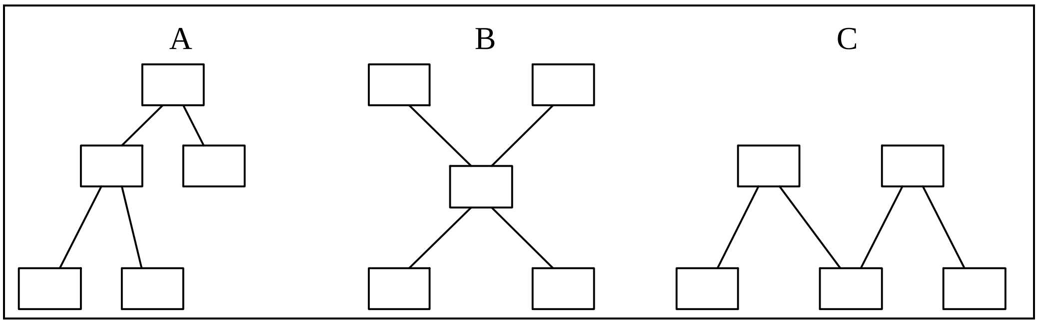

Ilustración 1. Esquemas básicos de problemas de dos etapas (Nesher y Hershkovitz, 1994)

Una de las cuestiones que investigan es la influencia que tienen sobre el índice de dificultad de los problemas de dos etapas los tres esquemas y las ocho posibles combinaciones de dos operaciones que se obtienen eligiendo una operación de estructura aditiva + / - y otra de estructura multiplicativa x / : a saber:

(+ , x), (x , +), (+ , :), (: , +), (, x), (x ,), (, :), (: ,).

Para una muestra de escolares de 3º, 4º, 5º y 6º de Israel obtienen que ambas variables tienen efecto significativo sobre el índice de dificultad de estos problemas.

Con respecto a los esquemas hallan que el esquema "jerárquico" es el más fácil, le sigue en dificultad el esquema "compartir el todo" y, por último, el esquema "compartir una parte".

Categorías de problemas de estructura aditiva de dos etapas

Problemas aritméticos aditivos de dos etapas son los problemas cuyas soluciones implican sólamente sumas y restas y, en todos los casos, es necesario realizar dos de estas operaciones -distintas o repetidas- para obtener la solución; el estudio de los problemas aritméticos aditivos de dos etapas constituye el objeto actual de nuestra investigación.

Uno de los enfoques de investigación más productivos en los estudios sobre problemas aritméticos de estructura aditiva de una etapa es el enfoque estructural basado en las categorías semánticas de los problemas (Castro y otros, 1992). Las cuatro categorías semánticas determinadas para estos problemas constituyen uno de los cimientos de nuestra categorización teórica; criterio que se complementa con otras dos variables: la dirección de la relación (aumento-disminución) presente en el problema, y el tipo de enlace que se produce entre las dos relaciones simples para formar la relación compuesta. Ello no significa que se agoten los factores en los descritos, sino que de momento nos restringimos al estudio de estos. Puesto que en los problemas aritméticos simples la posición de la incógnita es un factor influyente en la diferenciación de problemas, podemos pensar que también lo es en los de dos etapas. Esto es una mera hipótesis que habrá que contrastar, pero de momento nosotros no la hemos contrastado.

Los tres criterios diferenciadores que hemos empleado con problemas aritméticos aditivos de dos etapas son:

a) Estructura semántica de la primera y segunda relación

b) Relaciones de Aumento/Disminución

c) Forma del enlace entre las dos relaciones

a) Estructura semántica de la primera y segunda relación.- Nuestro punto de partida es que en un problema de dos etapas hay dos relaciones simples con un nodo en común. Partimos del supuesto teórico de que, en cada etapa, está presente una de estas estructuras semánticas y que, por tanto, al tratarse de problemas de dos etapas hemos de tener en cuenta la categoría semántica que se utiliza en cada una de ellas. Dicho de otra manera, en el enunciado de los problemas aritméticos de dos etapas, cada etapa del problema corresponde a una relación entre tres datos, uno de los cuales es compartido y está latente en el problema. Cada una de estas relaciones por separado las encontramos en los problemas aritméticos verbales de una etapa. En consonancia con esto, en un problema verbal de dos etapas la estructura semántica se encuentra tanto en la primera relación como en la segunda. Utilizamos, por tanto, las categorías semánticas en la primera relación del problema y las categorías semánticas en la segunda relación. Las categorías semánticas empleadas son las denominadas:

* ***cambio***, se refiere a los problemas en los que se produce algún evento o transformación que cambia el valor de una cantidad inicial; la codificamos como Ca.

* ***combinación***, problemas basados en la relación existente entre un conjunto total y una partición del mismo en dos subconjuntos; la codificamos como Co.

* ***comparación***, problemas que implican una relación comparativa entre dos cantidades; la designamos abreviadamente como Cp.

* ***igualación***, problemas en los que se plantea una acción para lograr que una cantidad sea igual a otra; abreviadamente lo designamos como Ig.

Si atendemos a las posibilidades que ofrecen estas cuatro estructuras en los problemas de dos etapas, encontramos las 16 opciones que están recogidas en la Tabla 1.

Tabla 1. Combinaciones semánticas posibles en problemas de dos etapas

	Ca	Co	Cp	Ig

Ca	(Ca, Ca)	(Ca, Co)	(Ca, Cp)	(Ca, Ig)
Co	(Co, Ca)	(Co, Ca)	(Co, Cp)	(Co, Ig)
Cp	(Cp, Ca)	(Cp, Co)	(Cp, Cp)	(Cp, Ig)
Ig	(Ig, Ca)	(Ig, Co)	(Ig, Cp)	(Ig, Ig)

b) <u>Relaciones de Aumento/Disminución</u>.-

Las operaciones de sumar y restar números naturales producen efectos contrapuestos: La operación de sumar un número a otro producen un aumento del dato inicial, mientras que al restar un número de otro el resultado es una disminución. Estas ideas se encuentran en las relaciones que se utilizan para plantear problemas en el marco de la estructura aditiva y se han utilizado para clasificar los problemas de una etapa.

Nuestra opinión al respecto es que en todo problema aritmético simple hay subyacente una relación entre tres cantidades: dos cantidades explícitas que son los datos, a partir de las que se obtiene una tercera cantidad. Cuando enunciamos un problema verbal, la relación entre la pareja de datos puede ser de aumento (A) o disminución (D). Esta distinción da lugar a la segunda variable que tomamos en consideración y que hace referencia a la dirección de cada una de las relaciones simples incluidas en el problema. Si el problema aditivo es de dos etapas, en cada una de las etapas hay incluida una relación de aumento o disminución, por lo que se presentan cuatro posibilidades para la variable relaciones, recogidas en la Tabla 2.

Tabla 2. Combinaciones según relaciones de aumento o disminución en problemas de dos etapas

		1 Primera relación	
2 Segunda relación		Aumento (A)	Disminución (D)
	Aumento (A)	Aumento-Aumento (A,A)	Aumento-Disminución (A,D)
	Disminución (D)	Disminución-Aumento (D,A)	Disminución-Disminución (D,D)

c) <u>Forma del enlace entre las dos relaciones</u>- Un tercer factor importante en la clasificación de los problemas aritméticos simples es el que se refiere a la cantidad desconocida entre las tres posibles que intervienen en la relación global subyacente en el problema. Para cada relación de aumento o de disminución hay la posibilidad de elegir dos cualesquiera de las tres cantidades como datos y la otra como la cantidad a determinar. Desde nuestra perspectiva esta variable queda mediatizada en la categorización de los problemas compuestos por la variable que se refiere a *cómo es el enlace entre las relaciones que conforman el problema compuesto*. En un problema simple hay una sola relación establecida entre las tres cantidades, pero en un problema compuesto hay al menos dos relaciones, y lo importante es cómo están conectadas entre sí las relaciones.

En un problema de dos etapas las dos relaciones comparten una cantidad, si es de otro modo, consideramos que no es un problema de dos etapas. Se pueden enunciar problemas aritméticos con dos relaciones y dos preguntas sin que lo consideremos un problema de dos etapas.

Por ejemplo:

Juan tiene 25 cuadros y vende 18. Pedro tiene 15 sellos de deportes y 30 de navidad.

a) ¿Cuántos cuadros le quedan a Juan?

b) ¿Cuántos sellos tiene Pedro?

En este problema hay que realizar dos operaciones pero en realidad son dos problemas simples separados. No lo consideramos como problema de dos etapas.

Para que estemos ante un problema de dos etapas es necesario que compartan una cantidad que sirve de enlace entre las dos relaciones. Esta cantidad es desconocida en la relación primera y hay que determinarla en un primer paso para poder operar con ella como dato en la segunda relación. Una primera restricción es que la cantidad que sirve de enlace, es una cantidad desconocida, pero no puede ser la cantidad final que se pide hallar en el problema, porque bastará con una de las dos relaciones para determinarla, por lo que el problema dejaría de ser de dos etapas. Esto limita las posibilidades de las cantidades que pueden ser desconocidas en el esquema o los esquemas compuestos.

Nuestro planteamiento con respecto a este enlace entre las dos relaciones para el caso concreto de los problemas aditivos de dos etapas, ha sido considerar como básicos los problemas en los que la cantidad desconocida en la primera relación entra como elemento en la segunda relación. Dicho de otra manera, consideramos problemas en cuyo enunciado aparecen en primer lugar dos datos con los que hay que operar para obtener una cantidad, este primer resultado hay que operarlo a su vez con el tercer dato del enunciado para alcanzar la solución. Esquemáticamente:

**** datos ordenados del problema: a, b, c***

**** orden de relaciones para alcanzar la solución:***

($_1$ *Primera relación*) **$a \;_1 b$ ------> c**

($_2$ Segunda relación)   c $_2$ d ------> solución

Con este esquema restrictivo los cuatro problemas resultantes de la combinación de las dos relaciones y la posibilidad de que cada una de ellas sean de aumento o de disminución son :

Tipo 1

?

A

c d

A

a b

1º) a A b = c
2º) c A d = ?

Tipo 1. Dos relaciones de *aumento*. El *todo* de la primera relación inicial es una *parte* de la segunda relación.

Ejemplo. María tiene 12 sellos de Francia y 7 de España. Compra 16 sellos de Grecia ¿Cuántos sellos tiene en total?

a=12 sellos de Francia, b=7 sellos de España
d=16 sellos de Grecia

$_1$ **: *tener y tener*** (indica acumulación)

$_2$ **: *Tener y comprar*** (indica aumento)

Tipo 2

a

D

c b

D

? d

1º) a D b = c
2º) c D d = ?

Tipo 2. Dos relaciones de *disminución*. Una *parte* de la primera relación es el *todo* de la segunda relación.

Ejemplo. Juan tiene 35 cromos. Pierde 7 jugando en el recreo de la mañana. Por la tarde regala a un amigo 12 cromos. ¿Cuántos cromos le quedan a Juan?

a=35 cromos, b=7 cromos de animales,
d=12 cromos de aviones.

$_1$ **: *Tener y Perder*** (disminución)

$_2$ **: *Tener y regalar*** (disminución)

Tipo 3

d ?

D

c

A

a b

1º) a A b = c
2º) c D d = ?

Tipo 3. Primera relación de aumento y la segunda de disminución. Comparten el todo las dos relaciones.

Ejemplo. José tiene 18 bolas rojas y 7 bolas negras. Después de jugar una partida pierde 11 bolas.
¿Cuántas bolas le quedan?

a=18 bolas rojas, b=7 bolas negras
d=11 bolas

$_1$ **: *Tener y tener*** (aumento)

$_2$ **: *Tener y perder*** (disminución)

Tipo 4

a ?

D A

b c d

1º) a D b = c

2º) c A d = ?

Tipo 4. La primera relación es de disminución y la segunda de aumento. Comparten una parte las dos relaciones.

Ejemplo. José tiene 25 bolas rojas y negras, 7 son negras. Le regalan 4 bolas rojas ¿Cuántas bolas rojas tiene José?

a=25 bolas rojas y negras,
b= 7 bolas negras,
d=4 bolas rojas

$_1$ ***: Cantidades complementarias respecto al total, desconocida una parte*** (disminución)
$_2$ ***: Tener y recibir*** (aumento)

En definitiva, para el estudio de los problemas aritméticos de estructura aditiva de dos etapas hemos delimitado tres características clave: a) la **estructura semántica**, con dieciséis posibilidades; b) las **relaciones de aumento-disminución**, con cuatro posibilidades, y c) la **estructura ordenada de las relaciones**, con la *"cantidad desconocida"* siempre al final.

Es obvio que pueden surgir algunas variantes más de problemas de dos etapas cambiando la posición de la incógnita. Por ejemplo, a partir del esquema jerárquico y de la combinación (A,D) se puede tener un tipo 5 si la cantidad desconocida es una parte en la segunda relación en vez del todo.

Tipo 5

d

D

c ?

A

a b

1º) a A b = c

2º) d D c= ?

Ejemplo. José tiene 18 bolas rojas y 7 bolas negras. Jugar una partida y pierde parte de las bolas. Le quedan 12 bolas ¿Cuántas bolas ha perdido en la partida?
a=18 bolas rojas, b=7 bolas negras
d=12 bolas
$_1$ ***: Tener y tener*** (aumento)
$_2$ ***: Tener y perder*** (disminución)

Del esquema compartir una parte, correspondiente a la combinación (D,D), surge un tipo 6 cuando la cantidad desconocida es una parte de la segunda relación.

Tipo 6

a D d D

b c ?

1º) a D b = c
2º) d D c = ?

Tipo 6. La primera relación es de disminución y la segunda de aumento. Comparten una parte las dos relaciones.

Ejemplo. José tiene 25 bolas, unas son rojas y otras negras. De ellas 18 son rojas y el resto negras. También tienen bolas verdes. Tiene 30 bolas entre las negras y las verdes. ¿Cuántas bolas verdes tiene?

a=18 bolas rojas, b=7 bolas negras
d=11 bolas
$_1$ **: *Tener y tener*** (aumento)
$_2$ **: *Tener y perder*** (disminución)

En nuestro trabajo esta última variante la hemos mantenido como una variable controlada fijando su valor a los cuatro esquemas dados inicialmente.

En las investigaciones que hemos realizado con niños de 4º, 5º y 6º de Educación Primaria hemos obtenido entre otros hallazgos importantes que las distintas combinaciones de las relaciones de aumento o disminución afectan a la dificultad del problema. Las cuatro clases de problemas que surgen según que la relación sea de aumento o de disminución, colocados en orden de dificultad creciente quedan así:

(A,A), (A,D), (D,A) y (D,D)

siendo este último, el (D,D) el de mayor dificultad.

Ilustración 1. Porcentajes de aciertos de las combinaciones de aumento-disminución

Lo anterior nos hace concluir que, en un problema de estructura aditiva compuesto de dos relaciones, la relación de disminución en el primer paso es más difícil que las relaciones de aumento en primer paso. También hemos constatado que la influencia de la relación de aumento o disminución en segunda posición, tiene un peso menor sobre la dificultad del problema que la que tiene en la primera posición. De hecho, no hemos obtenido unas diferencias significativas según la relación en la segunda posición. Lo que sí ocurre es que la relación de disminución en la segunda posición refuerza la dificultad que provoca la relación de disminución en la primera posición. Esto ocurre en la muestra total y en cada uno de los cursos por separado, con la única salvedad de que los índices de dificultad se mueven en un intervalo menor.

Como última reflexión decir que los esquemas anteriores son válidos para problemas compuestos de dos relaciones de estructura multiplicativa y para problemas mixtos en los que intervenga una relación de tipo aditivo y otra de tipo multiplicativo.

Referencias

Berglaund-Gray, G. (1938). *The effect of process sequence on the interpretation of two-step problems in arithmetic*. Unpublished doctoral dissertation. University of Pittsburg.

Berglaund-Gray, G. (1939). Difficulty of the arithmetic process. *Elementary School Journal*, November, 40, 198-203.

Berglaund-Gray, G. & Young, R.V. (1940). The effect of process sequence on the interpretation of two-step problems in arithmetic. *Journal of Educational Research*, September, 34(1), 21-29.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1982). The Development of Addition and Subtraction problem-solving skills. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, N. J.: LEA.

Carpenter, T.P. y Moser, J.M. (1983). The Acquisition of Addition and Subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Adquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Orlando, Florida: Academic Press.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativ*a. Granada: Comares.

Castro, E.; Rico, L. y Gil, F. (1992). Enfoques de Investigación en Problemas Verbales Aritméticos Aditivos. *Enseñanza de las Ciencias, 10* (3), 243-253.

Castro, E., Rico, L., Gutiérrez, J., Castro, E., Segovia, I., Morcillo, N., Fernández, F., González, E. y Tortosa, A. (1996). Evaluación de la resolución de problemas aritméticos en Primaria. *Revista de Investigación Educativa, 14*(2), 121-139.

Durell, F. (1928). Solving problems in arithmetic. *School Science and Mathematics, 28*(9), 925-935.

Fuson, C. (1992). Research on Whole Number Addition and Subtraction. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Publishing Comp.

Gutiérrez, J., Morcillo, N., Rico, L., Castro, E., Castro, E., Fernández, F., González, E., Pérez, A., Segovia, I., Tortosa, A. y Valenzuela, J. (1993). Problemas aditivos de dos etapas con igual operación y estructura semántica duplicada. Estudio preliminar en 5º de Primaria. *Actas VI JAEM*, Badajoz.

Morcillo, N., Castro, E., Rico, L., Castro, E., Fernández, F., González, E., Gutiérrez, J., Pérez, A., Segovia, I., Serrano, M., Tortosa, A., Valenzuela, J (1993). Dificultad debida al orden de operaciones en Problemas Aditivos de Dos Etapas con estructura semántica duplicada. Estudio preliminar en 5º de Primaria. *Actas VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales"*. Sevilla.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Nesher, P. (1991). Two-Steps Problems, Research Finding. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings Fifteenth PME Conference,* Vol. III, pp. 65-71. Assissi, Italia.

Nesher, P. y Hershkovitz, S. (1994). The role of schemes in two-step problems: analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 1-23.

Puig, L y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Editorial Síntesis

Rico, L. y otros. (1988). *Didáctica activa para la resolución de problemas*. Granada: Departamento Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Rico L. Castro E. González E. Castro E. (1994). Two-Step Addition Problems With Duplicated Semantic Structure. En J.P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. IV, (pp.121-128). University of Lisbon. Portugal

Rico, L. y otros (en prensa). Categorías de problemas aditivos de dos etapas. *Educación Matemática*.

Shallin, V.L. y Bee, N. V. (1985). *Structural differences between two-step word problems,* presentado en el Meeting de la American Educational Research Association.

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations theoriques et des recherches franÇaises en Didactique des Mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 2.*2, 215-232.