MÉTODOS DE DESAGREGACIÓN Y DESESTACIONALIZACIÓN DE SERIES TEMPORALES

IGNACIO MAULEÓN

Servicio de Estudios.
Banco de España.

Palabras clave: Desagregación, desestacionalización, series temporales, factores estacionales.
Nº de clasificación JEL: C22, C32.

0. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se discuten dos temas relativamente independientes, como son la desestacionalización y la desagregación de series temporales, aunque ambos tienen particular relevancia en el análisis de la evolución coyuntural de una economía dada, bien corresponda dicha economía a un agregado estatal, o a otro menor.

La primera parte del trabajo, discute distintos métodos de desestacionalización de series económicas, y su aplicabilidad en diferentes contextos. La necesidad de desestacionalizar dichas series, deriva del carácter accidental, y muchas veces no motivado económicamente, del componente estacional de una serie (debido, por ej., a factores sociológicos, tiempo atmosférico, etc.). Es por lo tanto útil, eliminar dicho componente para formarse una idea más adecuada de la evolución subyacente de una serie.

En la segunda parte del trabajo, se presentan métodos de desagregación de series temporales, y de estimación de valores no observados. El interés de estos métodos es potencialmente muy alto, ya que gran parte de la información estadística de base necesaria para análisis coyunturales, no tiene la periodicidad adecuada. Para dar una idea de la utilidad de estos métodos, es suficiente mencionar que la Contabilidad Nacional Trimestral, en casi todos los países del mundo, se elabora en base a metodologías de interpolación, del tipo de las descritas en este trabajo.

PRIMERA PARTE: MÉTODOS DE DESESTACIONALIZACIÓN

La estacionalidad en las series económicas se presenta como un fenómeno inducido por la época o «estación». En general, este efecto no suele tener una explicación en términos de teoría económica, siendo su causa más bien, fenómenos sociológicos, tiempo atmosférico, etc. Por tanto, su modelización suele hacerse con métodos puramente estadísticos o de «caja negra»: es decir, se modeliza pero no se explica cuáles son sus causas. Por este mismo motivo, para el seguimiento y análisis de la evolución coyuntural de las series económicas, suele ser útil eliminar su componente estacional, ya que el mismo no obedece a razones económicas, para de este modo obtener una idea más adecuada acerca de la evolución subyacente de una serie.

Un problema que se plantea con regularidad en las oficinas de seguimiento de coyuntura, es la necesidad de desestacionalizar frecuentemente un gran número de series: un procedimiento automático de desestacionalización es lo adecuado en estos casos. Si se desea llevar a cabo un análisis de un problema económico dado con mayor profundidad, el método recomendable puede ser uno basado en las características del problema. Las secciones siguientes discuten diferentes métodos de desestacionalización, bajo esta perspectiva, y una sección final de conclusiones presenta el resumen de recomendaciones acerca del método a aplicar en diferentes situaciones.

1. MÉTODOS ESTOCÁSTICOS

En general, estos métodos suponen que el efecto estacional no es permanente, sino que más bien evoluciona a lo largo del tiempo, de modo estocástico. Los métodos se basan en la aplicación de un filtro simétrico de medias móviles a la serie original en «t». Obviamente, en los extremos de la serie no puede aplicarse el filtro, de modo que la estimación de la estacionalidad para el último año, cambia cuando se disponen de nuevas observaciones. Este es un grave inconveniente de estos métodos, es decir, la necesidad de revisar la estimación de los factores estacionales, aunque su gran ventaja es su carácter automático, lo que posibilita la desestacionalización frecuente de un elevado número de series. El método más popular con gran diferencia, dentro de esta clase es el X-11,y su variante X-11-Arima que se presentan brevemente a continuación.

1.1. El método X-11

Básicamente, el método X-11 consiste en la aplicación iterativa de varios filtros simétricos, lineales y no lineales a la serie original (una descripción completa del método puede encontrarse en Dagum [1980], Kallek [1978], y Shiskin [1978]), para obtener una idea algo más precisa de su funcionamiento, consideremos una serie temporal «x_t», que puede descomponerse en los elementos siguientes: tendencia-ciclo, estacionalidad, componente irregular. Si la serie sigue un proceso multiplicativo podremos escribir:

$$X_t = C_t \bullet S_t \bullet I_t \tag{1.1}$$

donde

C_t: componente tendencia-ciclo
S_t: componente estacional
I_t : componente irregular

Definamos ahora un filtro de media móvil aplicado a una serie cualquiera por la expresión siguiente:

$$MA(X_t) = \sum_{s=-n}^{n} X_{t+s} W_s \tag{1.2}$$

donde los pesos «W_s» son simétricos y suman la unidad, es decir, se cumple

$$W_s = -W_s$$
$$\sum_{s=-n}^{n} W_s = 1 \tag{1.3}$$

La idea básica del método X-11 puede explicarse a través del esquema siguiente, aunque el método es en realidad bastante más complejo (ver las referencias citadas anteriormente). Para estimar los factores estacionales ($\hat{S}_t$) y la serie desestacionalizada $\hat{X}_t^D$, se siguen los pasos siguientes:

1. $\hat{C}_t = MA_1(X_t)$
2. $(\hat{S}_t \cdot I_t) = X_t / \hat{C}_t$
3. $\hat{S}_t = MA_2(\hat{S}_t \cdot I_t)$
4. $\hat{X}_t^D = X_t / \hat{S}_t$ (1.4)

En el primer paso se obtiene una estimación del componente tendencia-ciclo ($\hat{c}_t$) mediante la aplicación de una media móvil a la serie original. A partir de esta estimación y dada la descomposición de la serie original implicada en (1.1), se obtiene una estimación de los componentes estacional e irregular ($\hat{s}_t \bullet I_t$ paso 2). Aplicando un nuevo filtro de media móvil a esta estimación del componente estacionalidad-irregular, se elimina el componente irregular y se obtiene una estimación del componente estacional (paso 3). Finalmente, y de nuevo a partir de la definición de (1.1) obtenemos la serie desestacionalizada dividiendo la serie original por los coeficientes estacionales estimados (paso 4).

El procedimiento se adapta con facilidad a las series aditivas. En este caso la expresión (2.1) queda substituida por la

$$X_t = C_t + S_t + I_t \tag{1.5}$$

y los pasos 2 y 4 del procedimiento (1.4), se substituyen respectivamente por

$$2' \quad (\hat{S}_t + I_t) = \hat{X}_t - C_t$$
$$4' \quad \hat{X}_t^D = X_t - \hat{S}_t \qquad (1.5)$$

El procedimiento tiene en cuenta la posible existencia de datos atípicos («outliers») que, como es sabido, pueden distorsionar gravemente el procedimiento de estimación. Por otra parte, los filtros aplicados, no son siempre de ponderaciones constantes (es decir, $W_s = 1/(2n + 1)$), aunque sí, en muchas ocasiones. Finalmente, hay que señalar el carácter iterativo del procedimiento sobre la base del esquema (1.4), y que se aplican diferentes filtros en cada iteración.

Una vez explicadas las bases del método X-11, es conveniente discutir su optimalidad, para de este modo demostrar que no es un método arbitrario. Para ello, consideremos la descomposición de la serie «X_t» en estacionalidad y resto (tendencia, ciclo y componente irregular), es decir,

$$X_t = X_t^D \cdot S_t \qquad (1.6)$$

Suponiendo ahora que «X_t» es estacionaria (o que la hemos diferenciado convenientemente para que cumpla esta propiedad), por el teorema de Wold (1954) sabemos que X_t y S_t se pueden expresar como una suma de dos componentes: 1) un primer componente determinístico, y 2) una suma de orden infinito de elementos incorrelacionados y de varianza constante (es decir, un ruido blanco). El componente determinístico puede no ser tenido en cuenta para el análisis que se desarrolla a continuación de modo que podemos escribir,

$$\log X_t = \alpha(L)\, \varepsilon_t$$
$$\log S_t = \beta(L)\, u_t \qquad (1.7)$$

donde ε_t y u_t son procesos independientes de ruido blanco de varianzas respectivas σ_ε^2 y σ_u^2, $\alpha(L)$, $\beta(L)$ son polinomios infinitos en el operador de retardos $L(L^sX_t = X_{t-s})$.

Es posible demostrar (Whittle, 1963), que el estimador óptimo del componente estacional, en el sentido de minimizar el error cuadrático medio, está dado por la expresión

$$\log \hat{S}_t = \phi(L) \log X_t \cdot (\sigma_u^2 / \sigma_\varepsilon^2) \qquad (1.8)$$

donde $\phi(L)$ es un filtro simétrico e infinito cuyos coeficientes o ponderaciones están dados por la expresión,

$$\phi(L) = (\sigma_u^2 / \sigma_\varepsilon^2)\, \frac{\beta(L)\, \beta(F)}{\alpha(L)\, \alpha(F)} \qquad (1.9)$$

siendo $F = L^{-1}$ (es decir, el operador de «adelantos» ($FX_t = X_{t+1}$).

Este resultado es de gran importancia, ya que descubre qué tipo de transformación hay que aplicar a la serie original, para obtener un estimador de la estacionalidad. No obstante, para su completa aplicabilidad es preciso identificar los modelos de (1.7) y hacer predicciones basadas en ellos, en los extremos de la serie (dada la simetría del filtro).

Desde el punto de vista que nos ocupa ahora, puede demostrarse que (Cleveland y Tiao, 1976) el método X-11, aplica un filtro que de hecho, aproxima razonablemente bien, el filtro óptimo (1.9) que se desprende del modelo siguiente para la serie original,

$$(1-L)(1-L^{12}) \operatorname{Log} X_t =$$
$$= (1-\theta_1 L)(1-\theta_2 L^{12})\, \varepsilon_t \qquad (1.10)$$

Dado que si se aplican modelos de este tipo (es decir, de la clase Arima), a series económicas mensuales, muchas de ellas parecen seguir el modelo de (1.10), el método X-11 será efectivamente el método óptimo de desestacionalización de acuerdo al criterio (1.9). Esta explicación proporciona, por consiguiente, una fundamentación bastante sólida a dicho método. De todas formas, un problema que se plantea inmediatamente a partir de estas observaciones, es el siguiente: dado que diferentes series siguen diferentes modelos, de acuerdo al criterio (1.9), los filtros óptimos para desestacionalizarlas serán diferentes. En consecuencia, el método X-11 no es óptimo en todos los casos y podría ser útil elaborar de modo general el filtro de (1.9) para cada especificación de α (L) y β (L). (Algunos análisis de este problema pueden verse en Box-Miller-Tiao [1978] y Burman [1980]).

De todas formas, es preciso subrayar de nuevo que el atractivo de estos métodos está en su facilidad de automatización. En la medida en que se introducen en el análisis más especificaciones o detalles, relativos a la serie analizada, la automatización se hace más difícil y el método pierde atractivo (ver más adelante los métodos mixtos de desestacionalización). En algunos casos sin embargo, el X-11 puede ser particularmente inapropiado, como es la desestacionalización de series trimestrales. El análogo de (2.10) es en este caso

$$(1-L)(1-L^4)\log X_t = \\ = (1-\theta_1 L)(1-\theta_2 L^4)\,\varepsilon_t \qquad (1.11)$$

y probablemente pueda desarrollarse un método enteramente similar al X-11 para este caso. Otro caso en el que el método X-11 puede ser claramente inadecuado es en presencia de estacionalidad de dos tipos, por ejemplo mensual y trimestral. En este caso, en lugar de (1.10) tendríamos el modelo,

$$(1-L)(1-L^4)(1-L^{12})\log X_t = \\ = (1-\theta_1 L)(1-\theta_2 L^4)(1-\theta_3 L^{12})\,\varepsilon_t \qquad (1.12)$$

y el filtro óptimo para obtener el componente estacional de acuerdo a (1.9) no estaría ya dado por el método X-11.

1.2. **El método X-11-Arima**

El método X-11 presenta dos inconvenientes: 1) ausencia de un modelo estadístico de base, para la serie a desestacionalizar, y 2) asimetría de los filtros en los extremos de la serie, debido a la falta de observaciones, lo que obliga a las revisiones periódicas de los factores de estacionalidad. Respecto al primer punto, el problema es que en ausencia de un modelo para la serie tratada, no podemos tan siquiera saber si la serie admite una descomposición del tipo (1.1), de modo que la estacionalidad pueda extraerse del resto de la serie. El problema planteado por la necesidad de revisar la estimación de la estacionalidad es algo más grave. El problema deriva de la expresión para la estimación óptima de la estacionalidad por medio de una media móvil centrada en t: esto implica que para los extremos de la serie, la estimación de la estacionalidad cambiará conforme nuevos datos vayan estando disponibles. Desde el punto de vista de la política económica esto plantea una incertidumbre, obviamente no deseable.

El método X-11-Arima, trata de resolver estos dos problemas estimando un modelo estadístico para la serie bajo estudio, y haciendo predicciones en los extremos de la serie, con dicho modelo. Si, por ejemplo, estimamos la estacionalidad en «T» por medio de un filtro lineal centrado, y sólo disponemos de observaciones hasta el momento «T», el método X-11-Arima propone el siguiente procedimiento:

$$\hat{S}_T = \sum_{-n}^{n} W_s \hat{X}_{T+s} \qquad (1.13)$$

donde $\hat{X}_{T+S} = X_{T+S}$ para S menor o igual que 0, y para S mayor que 0, es la predicción obtenida a partir del modelo estimado para dicha serie.

El paso siguiente consiste en seleccionar una clase de modelos base, para proceder a la selección del más adecuado para la serie bajo estudio. Esta clase de modelos debe cumplir una serie de propiedades como son, estabilidad de los parámetros estimados, bajo número de parámetros (parsimonia), buenas propiedades predictivas, y que las únicas variables explicativas sean retrasos de la variable dependiente, dado el carácter univariante del análisis. Una clase de modelos que cumple estas propiedades, según Dagum, quien ha creado este método, son los modelos Arima propuestos por Box y Jenkins(1970). En síntesis, un modelo Arima consta de una parte autorregresiva, una parte de medias móviles en los errores, y un grado de diferenciación de la variable dependiente. Por ejemplo, un Arima (p,d,q) en la variable «z,» viene dado por la expresión,

$$\left(\sum_{s=1}^{p} \alpha_s L^s\right)(1-L)^d z_t = \sum_{s=0}^{q} w_s L^s a_t \qquad (1.14)$$

donde «a_t» es un «ruido blanco» incorrelado serialmente y de varianza constante σ_a^2. Dentro de estos modelos, la estacionalidad se trata de forma multiplicativa, y con una especificación similar. La única diferencia estriba en que el operador de retardos «L» está siempre elevado al período estacional (vgr., 4, 12, etc.).

Un modelo completo queda descrito entonces por la especificación (p.d.q) $(P,D,Q)_n$, donde los parámetros (p,d,q) hacen referencia a la parte ordinaria, y los P.D.Q a la parte estacional, siendo «n» el período estacional: Por ejemplo, la espedificación (0,1,1) (0,1,1 $)_4$ para la variable «z,», se convierte en,

$$(1-L)(1-L^4)z_t = \\ = (1-\delta_1)(1-\delta_2 L^4)a_t \quad (1.15)$$

o lo que es lo mismo,

$$z_t = z_{t-1} + z_{t-4} - z_{t-5} + + a_t - \\ - \delta_1 a_{t-1} - \delta_2 a_{t-4} + \delta_1\delta_2 a_{t-5} \quad (1.16)$$

Con carácter general en los modelos Arima, la transformación logarítmica de la variable original, z_t, es opcional, y también pueden considerarse versiones aditivas para el componente estacional. (Para más detalles, ver Box y Jenkins [1970] y Granger y Newbold[1977]).

La clase de modelos Arima, tal como ha sido definida anteriormente, depende de 7 parámetros (p,d,q,P,D,Q,n), y es por tanto muy amplia. Si el procedimiento de desestacionalización tiene que mantener su carácter automático, para poder ser aplicado con facilidad, es preciso restringir el número de modelos, sobre los que se puede hacer la selección para modelizar la serie a desestacionalizar. Concretamente, el X-11-Arima permite dos opciones iniciales al usuario: 1) suministrar un modelo Arima propio, y 2) opción automática en la que se prueban tres modelos, y se selecciona el mejor para la serie en cuestión. La selección de estos tres modelos se realizó después de numerosas pruebas, con varios modelos y series diferentes y están dados por las siguientes expresiones,

$$(0,1,1)\ (0,1,1)_s \\ (1-L)(1-L^s)z_t = \\ = (1-\theta L)(1-\delta L^s)a_t \quad (1.16)$$

$$(0,2,2)\ (0,1,1)_s \\ (1-L^s)(1-L)^2 z_t = \\ =(1-\theta_1 L-\theta_2 L^2)(1-\delta L^s)a_t \quad (1.17)$$

$$(2,1,2)\ (0,1,1)_s \\ (1-\theta_1 L-\theta_2 L^2)(1-L)(1-L^s)z_t = \\ = (1-\theta_1 L-\theta_2 L^2)(1-\delta L^s)a_t \quad (1.18)$$

Cuando se selecciona la opción automática de X-11-Arima, por tanto, el programa prueba estos tres modelos en la serie, y selecciona el más adecuado de acuerdo a una serie de criterios básicos (también se pueden probar por supuesto las transformaciones logarítmicas de la serie original). Los criterios de selección son la capacidad de predicción del modelo (error de predicción) y la ausencia de correlación serial en los residuos que se contrasta con el test de Box-Pierce, corregido para muestras finitas. Una vez seleccionado el modelo que mejor ajusta los datos, se hacen predicciones al principio y al final de la serie (tres años), y a esta muestra alargada se le aplica el X-11. Puede ocurrir, que ninguno de los tres modelos sea aceptado por la serie, y que en consecuencia, el programa lo rechace. En estos casos, es conveniente estudiar la posible existencia de datos atípicos, o la posibilidad de que la serie siga otro modelo Arima, no incluido en la opción automática.

Con este procedimiento, el método X-11-Arima, consigue reducir considerablemente la varianza de las revisiones en los factores estacionales (de un 20 a un 30 % según sus autores), siendo de esta forma un avance considerable sobre el X-11. Además, al estimar un modelo para la serie, garantiza la existencia de una descomposición entre estacionalidad y resto. No obstante hay que tener en cuenta que si el modelo seleccionado es el (1.17) o el (1.18), el X-11 no es un método óptimo de desestacionalización, tal como se ha indicado en (1.9).

2. MÉTODOS DETERMINISTICOS Y MIXTOS

Consideraremos en primer lugar los métodos puramente determinísticos, para analizar finalmente, una combinación de ambos enfoques.

El método determinístico, consiste básicamente en estimar la estacionalidad suponiendo que es un efecto constante en el tiempo. La forma de estimar este modelo estará basada, por consiguiente, en la utilización de «dummies» o variables artificiales. Es decir, el modelo básico será.

$$z_t = \gamma_0 + \sum_{s=1}^{n} \delta_{st}\gamma_s + \varepsilon_t \quad (1.19)$$

donde la suma de los coeficientes estacionales «y_t», se cancela a lo largo de un período (en general, el año). Las variables «δ_{st}» toman el valor «1» ó «0», dependiendo de que «t» coincida con la estación o no. Por ejemplo, en el caso de observaciones trimestrales, para las cuatro primeras observaciones, la matriz «δ_{st}», sería la matriz unidad. Este método puede incorporar también una estacionalidad evolutiva en el tiempo de carácter determinístico, multiplicando los valores δ_{st} por «t».

Una desventaja de este método es que requiere la estimación de numerosos parámetros, en el caso de series anuales. En general, como no todos ellos serán significativos, esto hace que las estimaciones sean más imprecisas y en consecuencia las predicciones del modelo peores, en ocasiones. Por otra parte, la estacionalidad puede que sea estocástica, y este aspecto, definitivamente no está captado por este modelo. Aunque una ventaja indudable y muy importante de (1.19) es su facilidad de cálculo, parece aconsejable introducir elementos estocásticos en la formación de la estacionalidad. Además, en la práctica, cuando se realiza un análisis detallado de una serie específica, suele ser relativamente sencillo determinar mediante una simple inspección gráfica los meses especiales en los que se produce un efecto estacional. Por ejemplo, un gran número de series económicas, presentan únicamente tres efectos estacionales a lo largo del año, coincidiendo con los períodos vacacionales de pascua, navidad y verano (por ejemplo M3, el índice de actividad industrial, los precios de consumo alimenticios, el consumo de energía eléctrica, etc.). En estos casos, es evidente que no es necesario introducir 12 dummies estacionales, y que es suficiente con 3. En otros casos, suele ser también sencillo reducir el número de efectos estacionales imponiendo restricciones de igualdad.

El método mixto, estocástico y determinístico, vendría dado en forma simplificada por expresiones del tipo siguiente

$$(1-\alpha L^n)\, z_t = \gamma_0 + \sum_{s=1}^{n} \delta_{st}\, \gamma_s + \varepsilon_t \qquad (1.20)$$

Por supuesto, pueden diseñarse esquemas estocásticos mucho más complejos, pero en la práctica no suelen ser necesarios. Es recomendable además que en (1.20) se impongan numerosas restricciones (en general restricciones cero) en los coeficientes estacionales, lo cual puede ser ayudado por una inspección gráfica de los datos iniciales, y de los residuos de cada estimación. En particular, no suele ser necesario introducir medias móviles en los residuos, ya que el procedimiento de estimación se complica innecesariamente: esto es así dado que si la raíz es baja, una media móvil se puede aproximar bien por un proceso autorregresivo. Si la raíz es alta, en general es un signo de sobrediferenciación de la serie original, que en consecuencia, deberá ser eliminada. Por ejemplo, es evidente que si multiplicamos el modelo (1.20) por una diferencia estacional obtenemos.

$$(1-L^n)\,(1-\alpha L^n)\, z_t = (1-L^n)\, \varepsilon_t \qquad (1.21)$$

es decir, eliminamos la estacionalidad determinística, pero introducimos una raíz unitaria en el error, que en el proceso de estimación y debido a la restricción impuesta en él, se estimará como menor que la unidad.

Finalmente hay que señalar que la serie «z_t» en (1.20) puede estar en logaritmos, y puede asimismo haberse tomado una diferencia regular para eliminar la tendencia.

En resumen, modelos del tipo de (1.20), con restricciones en la parte determinística pueden ser muy útiles, y en muchos casos superiores a los métodos puramente determinísticos o puramente estocásticos. Sin embargo, una desventaja de (1.20) es que para su aplicación eficaz, requiere la imposición de restricciones, o en otras palabras, eliminación de las constantes estacionales no significativas. Esto sólo puede llevarse a cabo mediante un estudio detallado de la serie en cuestión, y por lo tanto, el modelo de (1.20) y el método basado en él, no es susceptible de automatización. En consecuencia, para una aplicación frecuente a numerosas series, es preferible un método estocástico como el X-11 en su versión original, o en su extensión Arima.

3. ALGUNOS PROBLEMAS EN RELACIÓN AL USO DE SERIES DESESTACIONALIZADAS

Con frecuencia se estiman relaciones entre variables que previamente han sido desestacionalizadas de modo independiente. Como, por ejemplo, la estacionalidad en una variable puede ser puramente inducida por su relación con otra, este método puede crear distorsiones. Más específicamente, supongamos que la relación entre dos variables (Y, X) que se desea estimar, está dada por la expresión

$$Y_t = \alpha(L)\, X_t + \varepsilon \qquad (1.22)$$

donde α (L) es un polinomio de retardos, y «ε_t» es un proceso de tipo «ruido-blanco». Supongamos que las series desestacionalizadas se obtienen por la aplicación de los siguientes filtros,

$$\begin{aligned} \bar{X}_t &= \theta_1(L)\, X_t \\ \bar{Y}_t &= \theta_2(L)\, Y_t \end{aligned} \qquad (1.23)$$

Substituyendo estas expresiones en (1.22) obtenemos el modelo siguiente

$$\bar{Y} = (\alpha(L)\, \theta_2(L) / \theta_1(L))\, \bar{X}_t + \theta_2(L)\, \varepsilon_t \qquad (1.24)$$

para las series desestacionalizadas. El problema principal de (1.24) es que la relación entre (Y_t, X_t) no es la misma que la de (Y_t, X_t), siendo esta última la que queremos estimar.

Otro problema puede plantearse por la actuación de la política monetaria (Plosser 1979). Supongamos que la demanda de dinero presenta estacionalidad positiva en los períodos vacacionales. Si la autoridad monetaria decide responder pasivamente satisfaciendo esa demanda, la serie observada de dinero, registrará efectivamente las variaciones estacionales. Pero si la autoridad decide contrarrestar este exceso de demanda, manteniendo la oferta constante, se producirá una elevación de los tipos de interés en general. Es decir, la estacionalidad se transmitirá a esta variable con lo que aparentemente, los datos de cantidad de dinero no presentarán estacionalidad, pero sí lo harán los de tipos de interés. Este es un problema complejo, y la única vía de solución es especificar un modelo econométrico completo, para estimar la estacionalidad dentro de él, como un elemento más (en algunos casos puede ser suficiente la estimación de una ecuación).

Respecto al tipo de modelos para la estacionalidad a utilizar en modelos econométricos, los más adecuados parecen ser los mixtos (ver 1.20) dada su sencillez, y al mismo tiempo versatilidad. Hay que señalar también, que la introducción de constantes estacionales en el lado derecho de una ecuación elimina la estacionalidad determinística de todas las variables del modelo lo cual es enormemente ventajoso, desde el punto de vista de la estimación de relaciones entre variables, «purgadas» de estacionalidad. (Este resultado, basado en el análisis de la regresión particionada, se omite aquí, ya que puede ser encontrado en cualquier libro introductorio de Econometría.)

Finalmente, es conveniente hacer una llamada de atención sobre la utilización de series desestacionalizadas para el seguimiento de la coyuntura económica. En general, con esto lo que se pretende es captar los elementos más «permanentes» de la serie, para de este modo no basar la toma de decisiones en fenómenos ocasionales. Pero tal como se desprende de (2.1), la serie desestacionalizada incluye el componente irregular, por lo cual, puede ser más útil, basar el análisis de coyuntura en el seguimiento de la tendencia de la serie, o del componente tendencia-ciclo.

4. **CONCLUSIÓN**

Los diferentes procedimientos de desestacionalización, no son necesariamente concurrentes y competitivos. Más bien, cada uno de ellos tiende a tener su campo natural de aplicación, y en concreto, se pueden realizar las siguientes recomendaciones con carácter general: si el objetivo es desestacionalizar un número elevado de series frecuentemente, lo más adecuado es un procedimiento automático de bajo coste (X-1, X-11 -Arima). Si se desea realizar un seguimiento de la evolución coyuntural de una serie más específica, puede ser recomendable tratar de estimar la tendencia de dicha serie. Por último, si el objetivo es el análisis específico y detallado de una serie en particular, lo recomendable es un procedimiento mixto que tenga en cuenta la estacionalidad estocástica y determinística, e incluso el desarrollo de un modelo econométrico.

SEGUNDA PARTE: MÉTODOS DE DESAGREGACIÓN

En numerosas ocasiones, las series estadísticas disponibles para el análisis económico, presentan lagunas, o simplemente no tienen la periodicidad adecuada. Así, es preciso interpolar los valores desconocidos, bien puntualmente, o bien para aumentar la frecuencia de la serie, con ayuda de series relacionadas de la periodicidad adecuada, o sin ella. Este último caso es el que corresponde a la elaboración de la Contabilidad Nacional trimestral en prácticamente todo el mundo, excepto algún país como Japón. Se dispone de los datos anuales y de indicadores trimestrales, pero no de las series trimestrales de contabilidad propiamente dichas.

La primera parte de esta sección, presenta varios métodos de interpolación de series, con la ayuda de indicador o indicadores, o sin ella. La presentación comienza con el estudio detallado de un método bastante general, que posee interesantes propiedades de optimalidad. Los restantes métodos, en su mayoría pueden ser derivados a partir de él, lo cual facilita la comparación de sus respectivas propiedades y la evaluación de las mismas por referencia al método general (para una aplicación al caso de España, véase, por ejemplo, Sanz [1985]).

En la última parte de esta sección se presenta un método para tratar un problema relacionado con el de la interpolación para aumentar la frecuencia de una serie. En este caso, se trata de completar una serie, uno o varios de cuyos valores, correlativos o no, no son observados, o bien lo han sido con error. El método es de aplicación sencilla y fácilmente generalizable a casos más complejos.

1. UN MÉTODO GENERAL DE INTERPOLACIÓN

El método que se va a presentar a continuación (Chow-Lin, 1970), es bastante general, y por este motivo, tiene ventajas teóricas, ya que un gran número de métodos alternativos son casos particulares de éste. Esto facilita la comparación entre diferentes métodos y la valoración de sus propiedades por referencia al método general.

Para introducir el problema, comenzaremos por establecer la notación. Supongamos que una serie «y» no observada, sigue el siguiente modelo

$$y_{tj} = X_{tj}'\,\gamma + u_{tj} \qquad (1.1)$$

donde «X_{ti}» es un vector de «K» indicadores, el índice j hace referencia a los subperíodos en que se divide el índice «t», y «u» es un error de media cero y cuya matriz de covarianzas está dada por Ω. Por ejemplo, «y_{ti}» puede ser el PIB trimestral no observado, y «X_{ti}» una serie de indicadores de actividad, como la cantidad de dinero, el índice de producción industrial, etc., que son observados.

Supongamos ahora que el vector de observaciones «y» cumple unas restricciones lineales, que pueden expresarse en la forma,

$$R'y = Y \qquad (1.2)$$

donde R es una matriz de constantes, y el vector Y es observado. En el caso del ejemplo anterior, el PIB anual es observado, y (1.2) asegura que la suma de los PIBs trimestrales sean iguales al total anual. En este caso tendríamos,

$$R' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (I \otimes i) \qquad (1.3)$$

se tratase de trimestralizar un deflactor, substituiríamos (1.3) por R* = (1/4) R.

El problema planteado es, por tanto, estimar los valores de «y» de modo que (1.2) se satisfaga, para lo cual deberemos estimar también el vector y. Un enfoque natural, consistiría en escribir la función de verosimilitud para el modelo (1.1), y maximizarla respecto a los vectores (y, y) sujeto a las restricciones de (1.2) (aunque los estimadores de «y», obviamente no serán consistentes, ya que el número de parámetros a estimar aumenta al mismo ritmo que el número de observaciones). Si suponemos que los errores «u» son normales, un criterio equivalente es minimizar

$$C = (y-X\gamma)'\, \Omega^{-1} (y-X\gamma) + \lambda' (R' y-Y) \quad (1.4)$$

Pueden demostrarse ciertas propiedades de optimalidad de este procedimiento, y en particular, que el estimador de $\hat{y}$, será el mejor estimador lineal insesgado (Chow-Lin, 1970). Para minimizar (1.4) igualamos a cero las primeras derivadas de C respecto a (y, λ,γ) con lo que obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente,

$$\begin{aligned} dC/dy &= \Omega^{-1} (y-X\gamma) + R\lambda = 0 \\ dC/d\lambda &= R'y-Y = 0 \\ dC/d\gamma &= -X'\Omega^{-1} (y-X\gamma) = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

El método de resolución es sencillo, ya que el sistema es lineal en las incógnitas λ, γ, y. Para resolverlo, despejamos «λ» en la primera ecuación, y obtenemos,

$$\lambda = -(R'\Omega R)^{-1} (Y-R'X\gamma) \quad (1.6)$$

Substituyendo esta expresión en la primera ecuación de (1.5) obtenemos la solución para «y», y despejando «γ» en la tercera ecuación de (1.6), la solución para «γ». Obtenemos entonces, el siguiente sistema de dos ecuaciones matriciales,

$$\begin{aligned} \hat{y} &= X\hat{\gamma} + \Omega R\, (R'\, \Omega^{-1} R)^{-1}\, (Y-R'X\hat{\gamma}) \\ \hat{\gamma} &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}\, X'\, \Omega^{-1}\, \hat{y} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Este sistema es aparentemente no lineal, pero un pequeño análisis, conduce a una expresión de la ecuación para $\hat{\gamma}$ que no depende de $\hat{y}$. Para ello, substituyamos en (1.7) $\hat{y}$ en $\hat{\gamma}$, lo que da

$$\hat{\gamma} = \hat{\gamma} + (X'\Omega^{-1}X')^{-1}\; X'R(R'\Omega R)^{-1}(Y-R'X\hat{\gamma}) \quad (1.8)$$

de donde obtenemos con facilidad

$$X'R(R'\Omega R)^{-1} (Y-R'X\gamma) = 0 \quad (1.9)$$

y finalmente,

$$\hat{\gamma} = X'R(R'\Omega R)^{-1}\, (R'X)^{-1}\, X'R(R'\Omega R)^{-1}Y \quad (1.10)$$

Esta última ecuación no depende, por tanto, de las estimaciones de $\hat{y}$, y de este modo, el sistema de (1.7) puede resolverse sin iteración. Por otra parte, la interpretación de (1.10) es clara, si premultiplicamos (1.1) por R', con lo que obtenemos

$$R'Y=R'X\gamma+R'u \quad (1.11)$$

o, alternativamente,

$$Y = X^{+}\gamma+u^{+} \quad (1.12)$$

donde la matriz de covarianzas de u , es (R'ΩR), y el método óptimo para estimar «γ» es aplicar mínimos cuadrados generalizados a las observaciones anuales. Respecto a la solución para $\hat{y}$, (1.7) nos dice que las estimaciones serán iguales al indicador (X $\hat{\gamma}$), más una cierta combinación lineal de los residuos r, o diferencias entre los totales anuales de la variable a trimestralizar y el indicador, estando «r_t» dado por

$$r_t = Y_t - \sum_j X_{tj}\, \hat{\gamma} \quad (1.13)$$

La solución del método Chow-Lin al problema de la trimestralización está dada, por consiguiente, por la ecuación (1.10) y por la primera de (1.7). En resumen, se utilizan los datos anuales para estimar los coeficientes $\hat{\gamma}$, y después, se hace la serie trimestral igual al indicador (X$\hat{\gamma}$) más una combinación lineal de los residuos anuales. Los métodos más interesantes de trimestralización utilizados en la práctica son casos particulares de este enfoque, tal como se explica en el apartado siguiente.

2. OTROS MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN

El método más conocido de interpolación, quizás es el de Denton (1971). Este método se obtiene minimizando la expresión

$$(y-X)'\, A(y-X) + A'(R'y-Y) \quad (1.13\text{-bis})$$

que es similar a la expresión (1.4) del método Chow-Lin. Las diferencias con este método son básicamente dos: 1) la matriz de la forma cuadrática en los errores es A en lugar de *Ω, 2)* se utiliza un solo indicador «X», o ninguno. La expresión para la variable interpolada en este caso se obtiene fácilmente substituyendo Ω por A en la primera ecuación de (1.7), lo que da,

$$\hat{y} = X+A^{-1}\, R(R'A^{-1}\, R)^{-1}\; (Y-R'\, X) \quad (1.14)$$

Para obtener la solución correspondiente en caso de que no se disponga de indicador, simplemente se hace X = 0 en esta expresión. En general, la matriz A en este método se escoge de modo que

$$(y-X)'\, A(y-X) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} (\Delta^{h}(y-X)_{tj})^2 \quad (1.15)$$

siendo «h» uno o dos en la práctica. En el caso de que h = 1, la matriz A puede definirse como A = D'D donde D está dado por

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 \\ -1 & 1 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & -1 & 1 \; 0 \ldots\ldots\ldots & \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \; -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Para ser exactos, la primera fila debería eliminarse, pero entonces la matriz D no sería cuadrada, lo cual complica el problema de la inversión de A, necesaria para obtener $\hat{y}$. De todas formas este problema sólo tiene importancia cuando el número de observaciones agregadas disponible es muy pequeño (vgr., 3 ó 4).

Puede comprobarse por simple multiplicación que la inversa de D está dada por

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ . & . & 1 & \ldots\ldots & . \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ . & . & . & \ldots\ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

de modo que la inversa de A será $A^{-1} = D^{-1} D^{-1}$ y así, no hace falta invertir en el ordenador una matriz de orden 4T (en el caso trimestral), lo que en ocaciones puede ser complicado. En el caso de que h = 2, A = D'D'DD, y su inversa se obtiene también con facilidad.

Por comparación al método de Chow-Lin, es inmediato que el de Denton sólo será óptimo si $A = \Omega^{-1} k$, siendo k una constante cualquiera. Hay dos casos de interés en los que esto puede ocurrir: 1.°) que Ω sea la matriz unidad, con lo que A = I; 2.°) que el proceso de error en el modelo (1.1) sea un paseo aleatorio, es decir, $u_{ti} = u_{ti-1} + \varepsilon_{ti}$ de modo que A = D'D. El primer caso tiene cierto interés ya que la expresión que se obtiene para $\hat{y}$ es particularmente sencilla, estando dada por

$$\hat{y}_{tj} = \hat{X}_{tj} + \frac{1}{n}\left(Y_t - \sum_{J=1}^{n} X_{tj}\right) \quad (1.18)$$

donde «n» es el número de subperíodos (vgr., 4 en el caso de la trimestralización).

En el caso de que no se disponga de indicadores, tanto el método de Chow-Lin como el de Denton son aplicables similarmente En ambas situaciones basta con hacer X = 0 (o, $X_{tl}'\beta = 0$ en el caso de Chow-Lin), en las correspondientes expresiones para $\hat{y}$, obtenidas en el caso de disponibilidad de indicadores (1.7 y 1.14).

Otra posible variante del método de Denton es la llamada «versión multiplicativa» que consiste en substituir el criterio (1.15) por

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}\left(\Delta^h \left(Y_{tj} / X_{tj} - 1\right)\right)^2 \quad (1.18)$$

La diferencia básica con el Denton de (1.14) es que la relación entre la variable a trimestralizar y el indicador es de tipo multiplicativo, ya que

$$(Y_{ti}/X_{ti}-1) \cong \mathrm{Log}(Y_{ti}/X_{ti}) =$$
$$= \mathrm{Log}Y_{ti} - \mathrm{Log}X_{ti} \quad (1.19)$$

El problema que plantea este método, es que las restricciones están expresadas en términos de las variables originales. Afortunadamente, este problema puede solventarse con facilidad ya que (1.18) puede ser reescrito como

$$(y-X)'\bar{X}^{-1}A\bar{X}^{-1}(y-X) \quad (1.20)$$

donde $\bar{X}$ es una matriz cuyos elementos son cero, excepto los diagonales que coinciden con el vector X, y donde A se construye a partir de la matriz D de (1.16) según el valor de «h», tal como se ha explicado anteriormente.

En este caso, la minimización del criterio (1.20) sujeto a las restricciones usuales R'y = Y, conduce a una solución del tipo dado en (1.14), en la que basta substituir A por $\bar{X}^{-1}A\bar{X}^{-1}$, es decir,

$$\hat{y} = X + \bar{X}A^{-1}\bar{X}R(R'\bar{X}A^{-1}\bar{X}R)^{-1}(Y-R'X) \quad (1.21)$$

Finalmente, existen otros métodos como el de Bassie, Gingsburg, etc., pero todos ellos presentan menos interés que los expuestos, bien porque son casos particulares, o bien por ser más o menos arbitrarios.

3. APLICABILIDAD DE LOS DIFERENTES MÉTODOS

El método de Denton, con o sin indicador, es fácilmente aplicable, pues las fórmulas que conducen a su evaluación son de cálculo muy sencillo, especialmente si tenemos en cuenta la solución analítica de A^{-1}, que evita invertir una matriz de grandes dimensiones informáticamente. En la práctica, con diferenciar los datos uno o dos veces (h = 1,2) será suficiente: la diferencia intuitiva entre los dos casos es que tomando h = 2, la serie trimestralizada presentará una evolución más suave, o bien más similar al indicador en el caso de que éste se utilice (para una aplicación al caso de España, (ver Sanz [1982]).

El principal problema que plantea el método de Denton, es que no es óptimo salvo en casos muy especiales como se ha señalado anteriormente. El método de Chow-Lin por el contrario, es óptimo, pero plantea ciertas dificultades de cálculo ya que la matriz de covarianzas del error «n», es inobservable. Sin embargo, esta matriz se puede estimar, tal como se explica en el ejemplo discutido a continuación. Consideremos ahora, el modelo inicial de (1.1), expresado en términos anuales (1.12), y supongamos que el error u_{tj} sigue un proceso autorregresivo de orden uno dado por

$$u_{tj} = \alpha u_{tj-1} + \varepsilon_{tj} \qquad (1.22)$$

El problema consiste en estimar el parámetro «a» a partir de las observaciones anuales, para lo cual definimos

$$Y_{-1} = SY \qquad (1.23)$$

donde la matriz de selección «S» está dada por

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.24)$$

y similarmente para el vector ($X\gamma$). Entonces, a partir de la varianza de Y, y de su covarianza con un retardo, que son estimables, podemos estimar el parámetro «α». Para ver esto, consideremos la expresión

$$\begin{aligned}&(T-1)^{-1}E(Y-X\gamma)'(Y-X\gamma)_{-1} = \\ &= (T-1)^{-1}E(u'RSR'u) = \\ &= T/(T-1)\,\mathrm{tr}(RSR')\,\sigma_u^2)\end{aligned} \qquad (1.25)$$

utilizando una derivación standard. Similarmente

$$TE(Y-X\gamma)'(Y-X\gamma) = \mathrm{tr}(RR') \cdot \sigma_u^2 \qquad (1.26)$$

Como $\sigma_u^2 = \sigma_\varepsilon^2 / (1-\alpha^2)$, y las esperanzas de (1.25) y (1.26) se pueden substituir por sus correspondientes estimadores muestrales, obtenemos un sistema de dos ecuaciones para las dos incógnitas de interés ($\sigma,\sigma_\varepsilon^2$).

En definitiva, el principal problema que plantea el método de Chow-Lin, es decir, la estimación de la matriz de covarianzas de los errores originales, puede resolverse estimándola a partir de los datos observables para las series agregadas. Un problema que puede plantearse en relación a este enfoque es el de la identificabilidad de la matriz Ω. Para ilustrarlo, consideraremos un sencillo ejemplo en el que la variable «y» sigue una media móvil de orden dos, y la variable observada es la suma de observaciones individuales cada dos períodos. Es decir,

$$\begin{aligned}&y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} + \delta\varepsilon_{t-2} \\ &Y = ((y_1+y_2), (y_3+y_4), (y_5+y_6)), \ldots\end{aligned} \qquad (1.27)$$

En este modelo, hay que estimar tres parámetros (δ, θ, σ_ε^2), a partir de las correlaciones muestrales de la variable observada Y. Consideremos entonces las expresiones siguientes,

$$\begin{aligned}&E\,Y_1^2 = \sigma_e^2\,(1+\theta^2+\delta^2) \\ &E(Y_1Y_2) = E(y_1+y_2)\,(y_3+y_4) = \\ &= E(y_1y_3) + E(y_2y_4) + E\,y_2y_3 = \\ &= (2\delta+\theta+\delta\theta)\,\sigma_\varepsilon^2 \\ &E(Y_1\,Y_s) = 0 \qquad S > 2\end{aligned} \qquad (1.28)$$

Para estimar los 3 parámetros del modelo original disponemos únicamente de dos ecuaciones, con lo cual el modelo no está identificado. Una forma arbitraria de resolver el problema es seleccionar siempre el modelo de menos parámetros (en este caso imponer por ejemplo, δ = 0). En todo caso, hay que tener presente esta dificultad para la aplicación del método Chow-Lin, cuya consecuencia más inmediata es la posible incorrección de la matriz Ω seleccionada, cuando se estima a partir de los datos agregados, lo que conlleva la pérdida de la propiedad de optimalidad del resultado de la interpolación.

Puede ser útil discutir la aplicabilidad de este método en un caso bastante realista.

Supongamos que las series tienen tendencia, lo cual aconseja tomar primeras diferencias (aunque esto no sea siempre necesario). En general, es aconsejable evitar la transformación logarítmica ya que introduce no linealidades difícilmente tratables, excepto en casos muy sencillos (ver 1.18-1.21). Además, en la práctica, la transformación logarítmica suele dar resultados muy similares a los obtenidos con las variables originales (variables que son significativas y en qué grado, elasticidades, ajustes, etc.). El modelo para la serie no observada sería entonces del tipo siguiente:

$$\Delta y_{tj} = \Delta X_{tj}\, \gamma + u_{tj},\ \mathrm{Var}(u) = \Omega \qquad (1.29)$$

Supongamos que Ω es conocida, o bien ha sido estimada. El criterio de Chow-Lin para este modelo sería minimizar la expresión siguiente,

$$\Delta(y - X\gamma)'\, \Omega^{-1}\, \Delta(y - X\gamma) + \lambda'(R'y - Y) \qquad (1.30)$$

que puede reescribirse (ver 1.15) como sigue

$$(Y - X\gamma)'\,(D'\Omega^{-1}D)\,(y - X\gamma) + \lambda'(R'y - Y) \qquad (1.31)$$

La solución a este problema es inmediata a partir de (1.7) y está dada por la expresión siguiente:

$$\hat{y} = X\hat{\gamma} + H^{-1}R(R'H^{-1}R)^{-1}(Y - R'X)$$
$$\hat{\gamma} = (X'R(R'H^{-1}R)^{-1}R'X)^{-1}X'R(R'H^{-1}R)^{-1}Y \qquad (1.32)$$

donde

$H = D'\,\Omega^{-1}D$

Un último punto que conviene subrayar antes de abandonar este problema, es que la serie completa queda revisada cada vez que una nueva observación para la serie agregada está disponible. Esta característica de los métodos de interpolación presentados es evidente a partir de, por ejemplo, 1.32, y es un inconveniente que también poseen otros métodos estadísticos (ver el apartado sobre la desestacionalización en este artículo). En cualquier caso, la revisión más importante se produce en los últimos datos, de forma que con el paso del tiempo, la serie interpolada para una fecha dada, se estabiliza progresivamente.

4. ESTIMACIÓN DE COMPONENTES NO OBSERVABLES EN SERIES IRREGULARES

En muchas ocasiones se dispone de una serie estadística con ciertas irregularidades, en el sentido de que para una o varias fechas, adyacentes o no, la serie no está disponible, o bien toma valores claramente inválidos. El método que se describe a continuación proporciona una solución al problema de la estimación de los valores no observables, y está basado en el trabajo de Millery Ferreiro (1982).

Para presentar este método, consideremos una serie temporal $Y_t = 1 \ldots T$, cuyo valor en «t» no es observado, lo es erróneamente, y se desea estimar para completar y homogeneizar la serie. Un método natural para estimar el valor no observado «y_t» será basar su estimación en toda la información disponible para las demás observaciones. Como por otra parte, la serie es aleatoria, lo adecuado será estimar la esperanza en «t». Entonces, la estimación natural de «y_t», será la esperanza condicional en el resto de las observaciones, es decir,

$$\hat{y}_t = E(y_t / y_1 \ldots y_{t-1}, y_{t+1}, \ldots y_T) \qquad (1.33)$$

y suponiendo normalidad, esta esperanza será igual a

$$Y'_{(t)}(E\, Y_{(t)}Y_{(t)'})^{-1}\, E\, Y_{(t)}\, Yt \qquad (1.34)$$

donde $Y_{(t)}$ es el vector definido como,

$$Y'_{(t)} = (Y_1, \ldots_{t-1}, Y_{t+1}, \ldots Y_T) \qquad (1.35)$$

Para ilustrar esta idea, supongamos que Y_t, sigue un proceso AR(1) de parámetro α. Como la esperanza condicional de Y_t, sólo depende de Y_{t-1} pueden eliminarse del vector $Y_{(t)}$ todos los valores de Y_t, excepto los dos más próximos. (Este punto puede demostrarse aunque aquí sólo interesa una exposición intuitiva). Entonces,

$$E(y_t / y_{t-1}, y_{t+1}) =$$
$$= (y_{t-1}, y_{t+1})\ E\begin{bmatrix} y_{t-1}\, y_{t-1}, & y_{t-1}\, y_{t+1} \\ y_{t-1}\, y_{t+1} & y_{t+1}\, y_{t+1} \end{bmatrix}^{-1}$$
$$*E\begin{bmatrix} y_{t-1}\, y_t \\ y_{t+1}\, y_t \end{bmatrix} =$$
$$= (y_{t-1}, y_{t+1})\begin{bmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_y^2\, a^2 \\ \sigma_y^2\, a^2 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \sigma_y^2 & a \\ \sigma_y^2 & a \end{bmatrix} =$$
$$= (y_{t-1}, y_{t+1})\begin{bmatrix} 1 & a^2 \\ a^2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{a}{1 + a^2}\,(y_{t-1} + y_{t+1}) \qquad (1.36)$$

es decir, obtenemos la estimación del valor que falta «y_t», como una media móvil simétrica de los valores adyacentes. Es interesante notar que habríamos obtenido el mismo resultado estimando por mínimos cuadrados el modelo

$$y_t = \delta_1 y_{t-1} + \delta_2 y_{t+1} v_t \qquad (1.37)$$

y definiendo y_t como

$$\hat{y}_t = \bar{\delta}_1 y_{t-1} + \bar{\delta}_2 y_{t+1} \qquad (1.38)$$

siendo $\bar{\delta}$ = plim $\bar{\delta}_1$ y similarmente $\bar{\delta}_2$

Si suponemos ahora que la serie «y_t» sigue un proceso autorregresivo de orden «p» (modelo que es ya bastante general), dado por la expresión,

$$y_t = \sum_{s=1}^{p} a_s y_{t-s} \qquad (1.39)$$

puede demostrarse que la estimación de $\hat{y}_t$, dada por (1.33), conduce a la siguiente expresión general,

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= \sum_{s=1}^{p} w_s (y_{t-s} + y_{t+s}) \\ \omega_s &= -\sum_{r=0}^{p-s} (a_r \cdot a_{r+s}) / \sum_{r=0}^{p} a_r^2 \\ a_0 &= -1 \end{aligned} \qquad (1.40)$$

y que como en el ejemplo sencillo, estima el valor no observado $\ddot{y}_t$, a partir de una media móvil simétrica de los valores adyacentes.

Una dificultad que plantea este método es la necesidad de conocer los parámetros «α_s». Pero dada una serie de observaciones para la variable «y», estos parámetros pueden estimarse consistentemente aplicando, por ejemplo, mínimos cuadrados ordinarios al modelo (1.39). Inicialmente, puede substituirse el dato no observado «y_t» por una estimación más o menos arbitraria, y posteriormente se puede iterar entre ($\hat{\alpha}_s$, $\ddot{y}_t$).

Este procedimiento se puede extender con facilidad a casos mucho más complejos. Por ejemplo, si la variable «y_t» sigue una media móvil de orden 1, podemos escribir,

$$y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} \qquad (1.41)$$

y por substitución recursiva obtenemos

$$y_t = -\sum_{s=1}^{\infty} (-\theta)^s y_{t-s} + \varepsilon_t \qquad (1.42)$$

es decir, un proceso autorregresivo al que se le puede aplicar el procedimiento de (1.40). También puede extenderse este método al caso de modelos de regresión, como se analiza en el siguiente ejemplo. Sea el modelo,

$$y_t = \alpha y_{t-1} + x_t'\beta + \varepsilon \qquad (1.43)$$

que puede descomponerse en

$$\begin{aligned} y_t &= m_t + u_t \\ m_t &= \alpha\, m_{t-1} + X_t'\, \beta \\ u_t &= \alpha\, u_{t-1} + \varepsilon_t,\ Eu_t = 0 \end{aligned} \qquad (1.44)$$

Para estimar y_t aplicamos a «u_t» el procedimiento de (1.40). A continuación, y dado un valor inicial observado o estimado para m_0, obtenemos recursivamente el valor estimado $\hat{m}_t$. Finalmente,

$$\hat{y}_t = \hat{m}_t + \hat{u}_t \qquad (1.45)$$

En el caso de un modelo simultáneo multiecuacional, siempre puede obtenerse para cada variable una forma reducida, del tipo (1.43), de modo que el procedimiento de interpolación es igualmente aplicable.

Otra situación de interés práctico, se produce cuando en la serie faltan varios datos correlativos (por ej., y_t, y_{t+1}). En este caso, puede demostrarse que el procedimiento óptimo consiste en aplicar (1.40), substituyendo los valores observados, cuando no estén disponibles, por sus estimaciones. Si faltan «k» valores, obtendríamos a partir de (1.40) un sistema de «k» ecuaciones con «k» incógnitas. Para ilustrar el procedimiento en un caso sencillo, volvamos otra vez al ejemplo en que «y_t» evoluciona de acuerdo a un modelo AR (1) de parámetro «α». Suponiendo que debemos estimar (y_t, y_{t+1}) obtenemos aplicando (1.40) el sistema,

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= \frac{a}{1+a^2} (y_{t-1} + \hat{y}_{t+1}) \\ \hat{y}_{t+1} &= \frac{a}{1+a^2} (\hat{y}_t + y_{t-1}) \end{aligned} \qquad (1.46)$$

lo que despejando conduce a,

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= \phi_1 (y_{t-1} + \phi_2 y_{t+2}) \\ \hat{y}_{t+1} &= \phi_1 (\phi_2 y_{t-1} + y_{t+2}) \\ \phi_1 &= \phi_2 (1-a^2) / (1-a^6) \\ \phi_2 &= a / (1+a^2) \end{aligned} \qquad (1.47)$$

En casos más complicados, el problema se resuelve de modo enteramente análogo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOX, G., HILLMER, S. and TIAO, G. (1978). «Analysis and modelling of seasonal time series» in *Seasonal adjustment of Economic Time series.* Ed. A. Zellner. Bureau of Census. USA.

BOX, G. and JENKINS, G. (1970). «Time series analysis, forecasting and control». San Francisco. Holden day.

BURMAN, J. (1980). «Seasonal adjustment by signal extraction». *Journal of the Royal statistical society.*

CLEVELAND, W. and TIAO, G. (1976). «Decomposition of seasonal time serie: a model for the Census XII Program». *Journal of the American Statistical Association.*

CHOLETTE, P. (1979). «A comparison and assessment of various adjustment methods of subannual series to yearly benchmarks». *Statis-tics Canada.*

CHOW, G. and LIN, A. (1971). «Best linear unbiased interpolation, distribution and extrapolaron of time series by related series». *Review of Economics and Statistics.*

DAGUM, E. (1976). «Recent developments in seasonal adjustment methods and application». *Selected papers from North American Con-ference on labor statistics.* USA. Department of Labor.

(1978). «Modelling, forecasting and seasonally adjusting economic time series with the X-11-Arima method», *The statistician.*

(1980). «The X-11 -Arima seasonal adjustment method». Statistics Canadá, Catalogue 12-564.

DENTON, F. (1971). «Adjustment of monthly or quarterly series to annual totals: an approach based on quadratic minimization». *Journal of the American Statistical Association.*

FERNANDEZ, R. (1978). «Alternative approaches of the estimation of short-term economic indicators». *International Monetary Fund* (Research department).

GEWEKE, J. (1978). «An efficient method for revising seasonally adjusted time series». Department of Economics. University of Winsconsin.

GRANGER. C. and NEWBOLD, P. (1977). «Forecasting economic time serie». New York. *Academic Press.*

KALLEK, S. (1978). «An overview of the objectives and framework of seasonal adjustment» in *Seasonal adjustment of economic time series.* Ed. A. Zellner. Bureau of Census. USA.

MILLER, R. and FERREIRO, O. (1982). «A strategy to complete a time series with missing observations». University of Winsconsin. Discussion Paper.

OCDE (1979). «Comptes nationaux trimestriels. Un rapport sur les sources et méthodes utilisées dans les pays de l'OCDE. París.

PLOSSER, C. (1979). «The analysis of seasonal economic models». *Journal of Econometrics.*

SANZ, R. (1985). «Trimestralización del PIB por ramas de actividad, 1964-1984». Documento de Trabajo 8514. Banco de España.

SHISKIN, J. (1978). «Seasonal adjustment of sensitive indicators» in *Seasonal adjustment of economic time series.* Ed. A. Zellner Bureau of Census. USA.