

# Comparación de métodos analíticos y numéricos para la solución del lanzamiento vertical de una bola en el aire



**Alejandro González y Hernández**

*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México*

**E-mail:** agh@hp.fciencias.unam.mx

(Recibido el 4 de Febrero de 2008; aceptado el 29 de Abril de 2008)

## Resumen

La ecuación de movimiento para el lanzamiento de una bola vertical en el aire tiene una solución analítica que necesita del cálculo diferencial e integral para su obtención. Sin embargo, los estudiantes del primer año de una licenciatura de física tienen dificultades en aplicar el cálculo para la solución analítica de la ecuación de movimiento, por esto se piensa en utilizar soluciones numéricas. Estas soluciones corresponden a ecuaciones algebraicas que se resuelven por métodos numéricos comprensibles a los estudiantes, pero en general, no son incluidas en la mayoría de los libros de texto y frecuentemente se piensa de ellas como inexactas, explicando la preferencia de los métodos analíticos sobre los numéricos. Por este motivo, aquí se comparan la solución analítica con las numéricas para el tiro vertical en el aire, con el fin de analizar las diferencias entre ellas y establecer criterios que permitan discutir estas diferencias.

**Palabras claves:** Dinámica newtoniana, métodos analíticos, métodos numéricos, ecuación de movimiento, fuerza de resistencia del aire.

## Abstract

The equation of motion for a vertical launching of a ball in the air has analytic solution that needs of the differential and integral calculus for their obtaining. However, the first year-old students of a physics major have difficulties in applying the calculation for the analytic solution of the movement equation and for this reason it is thought of using numerical solutions. These solutions correspond to algebraic equations that are solved for numerical methods comprehensible to the students, but in general, they are not included in most of the text books and frequently it is thought of them as inexact, explaining the preference of the analytic methods on the numerical ones. For this reason, the analytic solution is compared with the numerical ones for the vertical shot in the air, with the purpose of analyzing the differences among them and to settle down approaches that allow the discussions of these differences.

**Palabras clave:** Newtonian dynamics, analytic methods, numerical methods, equation of motion, air resistance.

**PACS:** 01.50.H, 02.30.Hq, 02.60.-x, 02.60.Cb, 45.20.D-, 45.50.Dd

## I. INTRODUCCIÓN

En numerosos estudios empíricos se ha reportado que los estudiantes tienen dificultades para entender la Dinámica Newtoniana [1], y diferentes innovaciones se han desarrollado y propuestos en Física Educativa para tratar de mejorar la comprensión de los estudiantes de este tipo de fenómenos de la Física [2]. La Física Computacional se ha incorporado al estudio de la Física actual y se ha colocado intermedia entre la enseñanza de la teoría y la experimentación de los cursos tradicionales, por lo que en los cursos de introducción de la Mecánica a nivel universitario se recomienda incorporar tópicos contemporáneos de Mecánica lineal y no lineal [3] que incluyan la modelación y la simulación por computadora y la introducción de nuevas representaciones gráficas y simbólicas de los fenómenos físicos para ayudar a los estudiantes en el desarrollo de un adecuado entendimiento de estos temas. En este caso, es necesario añadir al

desarrollo de las habilidades de razonamiento científico y experimental, las habilidades en la creación computación [4], para la modelación, el análisis y la solución de sistemas dinámicos.

La modelación [5] y la simulación [6] de sistemas dinámicos [7] se han estado introduciendo en el currículo de los cursos de física introductoria en los últimos años, lo que hace imprescindible que el estudiante desarrolle habilidades científicas para relacionar un conjunto de objetos conceptuales útiles en el planteamiento y la solución de los sistemas dinámicos, en especial, de la Mecánica Newtoniana fundamentados por la segunda Ley de Newton que es el primer ejemplo de ecuación de movimiento que se introdujo en la Física.

La ecuación de movimiento de Newton es una ecuación diferencial de segundo orden que se puede resolver mediante métodos analíticos o métodos numéricos. Los métodos analíticos frecuentemente utilizan el cálculo diferencial e integral para resolver la ecuación

de movimiento de Newton, como en el caso del lanzamiento vertical de una bola en el aire, con lo que se obtienen expresiones matemáticas para determinar la posición, la velocidad y la aceleración del cuerpo en movimiento para cada instante de tiempo. En contraparte, las soluciones de la ecuación de movimiento por métodos numéricos, expresa la posición, la velocidad y la aceleración del cuerpo en movimiento de forma numérica en tiempos que difieren unos de otros en  $\Delta t$ . La comparación de ambos tipos de métodos se puede hacer para valores discretos de  $t$ , de tal manera que la discrepancia entre ellos se puede cuantificar.

A menudo las soluciones analíticas aparecen en los libros de texto de cursos de introducción de física a nivel universitario, pero no necesariamente los métodos de cálculo utilizados. La dificultad de aplicar los métodos analíticos para resolver la ecuación de movimiento de Newton radica en que los estudiantes de física de primer año en una licenciatura científica tienen problemas para aplicar sus conocimientos de cálculo a la física [8]. El lanzamiento vertical de una bola en el aire, es un problema típico de este tipo, cuya solución numérica simplificada aparece en algunos libros de texto, pero no así la solución analítica.

La organización de este trabajo es la siguiente, en la sección II se plantea la ecuación de movimiento para el tiro vertical en el aire y su solución analítica. En la sección III, se discuten los métodos numéricos de: Euler, Euler-Cromer, Medio Punto, Euler-Richardson y Leap Frog, en la Sección IV se trata el error global, en la sección V se desarrollan los cálculos numéricos con Mathematica, luego en la sección VI se hace la comparación del método analítico con los métodos numéricos y finalmente en la sección VII se establecen las conclusiones.

## II. DINÁMICA DEL LANZAMIENTO VERTICAL. SOLUCIÓN ANALÍTICA

La ecuación de movimiento de una bola que se lanza verticalmente hacia arriba sujeta a la fuerza de gravedad y a la fuerza de resistencia del aire es [9].

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \frac{1}{2} C_d S \rho_a |v|v, \quad (1)$$

siendo  $m$  la masa de la bola,  $g$  la aceleración de la gravedad,  $C_d$  el coeficiente de forma del cuerpo,  $S$  la sección transversal del cuerpo perpendicular a la velocidad,  $\rho_a$  la densidad del aire y  $v$  la velocidad de la bola.

El valor absoluto de la velocidad  $v$  en el lanzamiento vertical de la bola da la posibilidad de separar el movimiento en dos movimientos verticales en línea recta. Si el movimiento es hacia arriba ( $v > 0$ ), entonces

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \frac{1}{2} C_d S \rho_a v^2, \quad (2)$$

y si el movimiento es hacia abajo ( $v < 0$ ), entonces

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + \frac{1}{2} C_d S \rho_a v^2. \quad (3)$$

La solución de la ecuación (2) se obtiene mediante la integral

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{I + v^2 / gA} = -g \int_0^t dt, \quad (4)$$

y la solución de la ecuación (3) mediante la integral

$$\int_0^v \frac{dv}{I - v^2 / gA} = -g \int_{t_M}^t dt, \quad (5)$$

donde  $A = 2m / C_d \rho_a$ ,  $v_0$  la velocidad inicial hacia arriba y  $t_M$  el tiempo en que la pelota alcanza su máxima altura. Ambas integrales se resuelven respectivamente, para la velocidad de la pelota, expresando  $v$  como función del tiempo, de la siguiente manera.

$$v = \sqrt{gA} \tan \left( -\sqrt{\frac{g}{A}} t + \tan^{-1} \left( \frac{v_0}{\sqrt{gA}} \right) \right), \quad (6)$$

para  $0 \leq t \leq t_M$ , y

$$v = -\sqrt{gA} \tanh \left( -\sqrt{\frac{g}{A}} (t - t_M) \right), \quad (7)$$

para  $t \geq t_M$ .

La altura de ascenso se obtiene a partir de la integral

$$\int_0^y dy = \sqrt{gA} \int_0^t \tan \left( -\sqrt{\frac{g}{A}} t + \tan^{-1} \left( \frac{v_0}{\sqrt{gA}} \right) \right) dt, \quad (8)$$

y la de descenso, mediante la integral

$$\int_{y_M}^y dy = -\sqrt{gA} \int_{t_M}^t \tanh \left( -\sqrt{\frac{g}{A}} (t - t_M) \right) dt. \quad (9)$$

Al resolver ambas integrales para  $y$ , se obtienen respectivamente la altura de ascenso y descenso

$$y = A \ln \frac{\cos \left[ -\sqrt{\frac{g}{A}} t + \tan^{-1} \left( \frac{v_0}{\sqrt{gA}} \right) \right]}{\cos \left[ \tan^{-1} \left( \frac{v_0}{\sqrt{gA}} \right) \right]}, \quad (10)$$

para  $0 \leq t \leq t_M$ , y

$$y = y_M - A \ln \left( \cosh \left( -\sqrt{\frac{g}{A}} (t - t_M) \right) \right), \quad (11)$$

para  $t \geq t_M$  y  $y_M$  la altura máxima.

El tiempo máximo de ascenso  $t_M$  se obtiene haciendo  $v = 0$  en la ecuación (6), obteniéndose

$$t_M = \sqrt{\frac{A}{g}} \tan^{-1} \left( \frac{v_0}{\sqrt{gA}} \right). \quad (12)$$

La altura máxima  $y_M$  se obtiene sustituyendo el valor de  $t_M$  en la ecuación (10) y el tiempo de descenso  $\Delta t$  se obtiene de la ecuación (11) para  $y = 0$ , dando por resultado

$$\Delta T = \frac{\cosh^{-1}(e^{y_M/A})}{\sqrt{\frac{g}{A}}}, \quad (13)$$

de tal manera que el tiempo total  $t_T$  de vuelo esta dado por

$$t_T = t_M + \Delta T. \quad (14)$$

### III. MÉTODOS NUMÉRICOS

Diversos métodos numéricos pueden ser aplicados para resolver la ecuación de movimiento de la ecuación (1), los más simple son el método de Euler o los métodos que se derivan de este método.

#### A. Fórmula de la derivada

El principio del método de Euler se basa en la evaluación de las primeras derivadas de las ecuaciones de movimiento de Newton, que de manera general pueden escribirse como [10].

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{F(r, v, t)}{m}; \quad \frac{dr(t)}{dt} = v(t). \quad (15)$$

La definición de derivada es

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \quad (16)$$

y la diferencia entre  $f'(t)$  y el cociente  $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$  para una  $\Delta t$  finita, determina la discrepancia entre este cociente y la derivada.

Para evaluar esta discrepancia, se hace uso de la expansión de Taylor, que se puede expresar de la siguiente manera

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t f'(t) + \frac{\Delta t^2}{2} f''(t) + \dots, \quad (17)$$

o también

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t f'(\zeta) + \frac{\Delta t^2}{2} f''(\zeta), \quad (18)$$

Donde  $\zeta$  es un valor entre  $t$  y  $t + \Delta t$ .

El despeje de  $f'(t)$  de esta ecuación, da por resultado que

$$f'(t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} - \frac{1}{2} \Delta t f''(\zeta). \quad (19)$$

En esta expresión, que se conoce como derivada por la derecha, el último término da el error de truncamiento al evaluar la derivada solamente por el cociente  $\Delta f/\Delta t$ .

Otra forma común de escribir esta última expresión es

$$f'(t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (20)$$

en donde se ha especificado el error de truncamiento por su orden en  $\Delta t$ , que en este caso es lineal en  $\Delta t$ . La notación  $O(\Delta t)$  indica el orden del error que se comete al no calcular la derivada sino sólo una aproximación de ella

#### B. Método de Euler para el lanzamiento vertical

Las ecuaciones de movimiento en la ecuación (15) aplicadas al movimiento de lanzamiento vertical de una pelota, se expresan de la siguiente forma

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{F(v, t)}{m} = a(v(t)), \quad (21)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = v(t), \quad (22)$$

con

$$a(v(t)) = -g - \frac{|v|v}{A}. \quad (23)$$

Aplicando la expresión derivada de la ecuación (20) para estas ecuaciones, se tienen las siguientes aproximaciones

$$\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} + O(\Delta t) = a(v(t)), \quad (24)$$

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} + O(\Delta t) = v(t), \quad (25)$$

o bien

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta t a(v(t)) + O(\Delta t^2), \quad (26)$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t v(t) + O(\Delta t^2), \quad (27)$$

donde  $\Delta t O(t) = O(\Delta t^2)$ . Estas ecuaciones son conocidas como el método de Euler, que en la práctica se aplican eliminando el error de truncamiento, las cuales se expresan en su forma abreviada de la siguiente manera

$$v_{k+1} = v_k + \Delta t a_k, \quad (28)$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t v_k. \quad (29)$$

Las condiciones iniciales en  $t=0$ , con  $y(0) = y_0$  y  $v(0) = v_0$ , sirven para calcular  $a_0 = a(v_0)$  e inicializar el método numérico con  $k = 0$ , para obtener los valores de  $y_1$  y de  $v_1$ . Usando estos valores en lugar de los valores  $y_0$  y  $v_0$ , se obtienen los valores para  $k=2$ , y repitiendo este método para  $k+1$  a partir de  $k$ , en el método de Euler, se va obteniendo iterativamente la posición del movimiento y la velocidad de la pelota en tiempos discretos separados unos de otros por el intervalo  $\Delta t$ . El programador decide el tiempo final en donde detener este proceso.

### C. Método de Euler-Cromer

El método de Euler-Cramer [3] es una modificación simple del método de Euler, en donde se utiliza la velocidad actualizada en la ecuación de la posición

$$v_{k+1} = v_k + \Delta t a_k, \quad (30)$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t v_{k+1}. \quad (31)$$

El error de truncamiento todavía es del orden de  $O(\Delta t^2)$  tanto en la ecuación de la velocidad, como en la ecuación de la posición.

### D. Métodos de Medio Punto

El método de Medio Punto I [3] puede usar en la ecuación de la posición, la velocidad promedio de las dos velocidades al principio y al final del intervalo de tiempo, esto es

$$v_{k+1} = v_k + \Delta t a_k, \quad (32)$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t \frac{v_{k+1} + v_k}{2}. \quad (33)$$

Donde al usar la ecuación (32) en la ecuación (33), se obtiene

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t v_k + \frac{1}{2} a_k \Delta t^2. \quad (34)$$

El error de truncamiento sigue siendo del orden de  $O(\Delta t^2)$  en la ecuación de la velocidad, pero para la posición ahora es del orden de  $O(\Delta t^3)$ .

En el libro de *Physics: Foundations and Applications*, Vol. I de Eisberg [11] se utiliza el método de Medio Punto II, que consiste en iniciar el método determinando la velocidad en un intervalo de tiempo de  $\Delta t/2$  en lugar de  $\Delta t$ , esto es

$$v_{1/2} = v_0 + \frac{\Delta t}{2} a(v_0), \quad (35)$$

y utilizando este valor medio de la velocidad en la ecuación de posición, se tiene

$$y_1 = y_0 + \Delta t v_{1/2}. \quad (36)$$

De esta manera, el valor de la velocidad  $v_1$ , se calcula como

$$v_1 = v_0 + \Delta t a(v_{1/2}). \quad (37)$$

A partir de estos cálculos, el método sigue aplicándose en intervalos de  $\Delta t$ , pero con la ventaja de poder calcular valores al final del intervalo de  $\Delta t$  y valores intermedios a este intervalo. Así, la iteración continúa para  $k \neq 0$ , como

$$v_{k+1/2} = v_{k-1/2} + \Delta t a(v_k), \quad (38)$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t v_{k+1/2}, \quad (39)$$

$$v_{k+1} = v_k + \Delta t a(v_{k+1/2}). \quad (40)$$

El error de truncamiento para las posiciones sigue siendo del orden de  $O(\Delta t^2)$ , pero para las velocidades el error de truncamiento es del orden de  $O(\Delta t^3)$ .

### E. Método de Euler-Richardson

El método de Euler-Richardson [12], es un método de medio punto, en donde la iteración se comienza con un intervalo de tiempo  $\Delta t/2$  en lugar de  $\Delta t$ . De tal manera que

$$v_{k+1/2} = v_k + \frac{\Delta t}{2} a_k. \quad (41)$$

El error de truncamiento se reduce a un orden de  $O(\Delta t^2/2)$ .

Con el valor de la velocidad en la ecuación (41), se calcula

$$a_{k+1/2} = a(v_{k+1/2}). \quad (42)$$

Y finalmente, utilizando los valores obtenidos en (41) y (42), se calculan los valores en el intervalo  $\Delta t$ , esto es

$$v_{k+1} = v_k + \Delta t a_{k+1/2}, \quad (43)$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t v_{k+1/2}, \quad (44)$$

donde el error de truncamiento se reduce a un orden de  $O(\Delta t^3)$ .

La diferencia entre el método anterior y el de Euler-Richardson consiste en la manera de determinar los valores medios de la velocidad. Así, este método utiliza valores iniciales de velocidad y las mitades de los intervalos de tiempo para el cálculo de la velocidad intermedia, en lugar de los valores intermedios de la velocidad e intervalos de tiempos completos para calcular la misma velocidad media. Esta pequeña variación es muy importante para cambiar la precisión del método numérico para el mismo valor de  $\Delta t$ .

Estos métodos requieren de saber las condiciones iniciales para su inicio.

**F. Fórmula de la derivada centrada en  $t$**

Métodos alternativos al método de Euler, se obtienen si se utiliza la siguiente fórmula de derivación centrada en  $t$  [3]

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t - \Delta t)}{2\Delta t}. \quad (45)$$

La expansión de Taylor lleva a las siguientes expresiones

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t f'(t) + \frac{\Delta t^2}{2} f''(t) + \frac{\Delta t^3}{6} f^{(3)}(\zeta_+), \quad (46)$$

$$f(t - \Delta t) = f(t) - \Delta t f'(t) + \frac{\Delta t^2}{2} f''(t) - \frac{\Delta t^3}{6} f^{(3)}(\zeta_-), \quad (47)$$

donde  $f^{(3)}(t)$  es la tercera derivada de  $f(t)$  y  $\zeta_+$  y  $\zeta_-$  son valores entre  $t$  y  $t \pm \Delta t$ . Ahora bien, restando la segunda de estas ecuaciones de la primera y arreglando términos, se obtiene

$$f'(t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t - \Delta t)}{2\Delta t} - \frac{\Delta t^2}{6} f^{(3)}(\zeta), \quad (48)$$

donde  $t - \Delta t \leq \zeta \leq t + \Delta t$ . Esta es la primera derivada centrada, con un error de truncamiento del orden de  $O(\Delta t^2)$ .

La fórmula de la primera derivada centrada se puede aproximar por

$$f'(t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t - \Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2). \quad (49)$$

**G. Método de Leap-Frog (saltos de rana)**

Para el método de Leap-Frog [3] se emplea la fórmula (49) para la derivada de la velocidad del cuerpo en movimiento, se obtiene

$$\frac{v(t + \Delta t) - v(t - \Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) = a(v(t)). \quad (50)$$

Para la ecuación de la posición, es conveniente centrarla en  $t$  y  $t + 2\Delta t$ , como se ve enseguida

$$\frac{y(t + 2\Delta t) - y(t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) = a(v(t + \Delta t)). \quad (51)$$

La forma breve de estas expresiones, es

$$\frac{v_{k+1} - v_{k-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) = a(v_k), \quad (52)$$

$$\frac{y_{k+2} - y_k}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) = v_{k+1}. \quad (53)$$

Arreglando términos para valores futuros del lado izquierdo

$$v_{k+1} = v_{k-1} + 2\Delta t a(v_k) + O(\Delta t^3), \quad (54)$$

$$y_{k+2} = y_k + 2\Delta t v_{k+1} + O(\Delta t^3). \quad (55)$$

El error de truncamiento es del orden de  $O(\Delta t^3)$ , que mejora el método de Euler.

Si se elimina el error de truncamiento, se tienen las ecuaciones

$$v_{k+1} = v_{k-1} + 2\Delta t a(v_k), \quad (56)$$

$$y_{k+2} = y_k + 2\Delta t v_{k+1}. \quad (57)$$

Este método fue usado por Feynman en sus *Lectures on Physics* [13] para calcular la oscilación un cuerpo sujeto a un resorte y la órbita de un planeta, donde las fuerzas dependen solo de la posición del objeto en movimiento.

La desventaja de este método, es que no se puede iniciar sólo con condiciones iniciales, por lo se que utiliza el método de Euler un paso hacia atrás para iniciar el cálculo de la velocidad en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , de tal forma que

$$v_{-1} = v_0 - \Delta t a(v_0), \quad (58)$$

y el mismo método, para determinar la posición en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , tal que

$$y_1 = y_0 + \Delta t v_0. \quad (59)$$

**IV. ERROR GLOBAL**

El error de truncamiento, evaluado hasta ahora, ha sido el error local o sea el error en un simple paso de tiempo, pero el error que afecta los valores calculados por cualquier método numérico, después de un número de  $n = T/\Delta t$  pasos para un tiempo total  $T$ , aumenta si el tamaño del intervalo de tiempo  $\Delta t$  disminuye, de acuerdo a la siguiente fórmula *Error global = n x error local*

$$\begin{aligned} &= nO(\Delta t^j) = (T/\Delta t)O(\Delta t^j) \\ &= TO(\Delta t^{j-1}). \end{aligned} \quad (60)$$

Por ejemplo, si el error de truncamiento es del  $O(\Delta t^2)$ , el error global es del orden  $O(\Delta t)$ .

## V. CÓMPUTOS NUMÉRICOS

Para evaluar los métodos numéricos es necesario utilizar una herramienta de cómputo que sea de gran capacidad, rápida y eficiente. En cambio los métodos analíticos sólo necesitan conocer las expresiones matemáticas que establecen la posición, la velocidad y la aceleración como función del tiempo y evaluar estas expresiones en un tiempo específico para determinar los valores numéricos de estas variables en este tiempo. Para determinar el valor de estos mismas variables para el mismo tiempo (que llamaremos  $t_n$ ), por métodos numéricos, como el método de Euler, es necesario conocer, además de la ley de fuerzas, las condiciones iniciales en el tiempo inicial  $t_0$  (que en general es el tiempo  $t = 0$ ) y dividir el intervalo de tiempo  $t_n - t_0$  en  $n$  subintervalos iguales  $\Delta t = (t_n - t_0)/n$ , con  $n$  suficientemente grande para que el intervalo de tiempo  $\Delta t \ll 1$  y empezar a calcular las ecuaciones de la posición, velocidad y aceleración para cada valor de  $t_{k+1} = t_0 + (k-1)\Delta t$ , empezando con  $k = 0$  hasta terminar con  $k = n - 1$  en el tiempo  $t_n$  esperado.

Para realizar estos cálculos, el método de Euler exige realizar el cálculo de  $2n$  ecuaciones algebraicas (por ejemplo, si  $\Delta t = 0.001$  s y se quiere determinar los valores de  $y_{1000}$ ,  $v_{1000}$  para  $t_{1000} = 1$  s, es necesario realizar 2000 cálculos de las ecuaciones (13) y (14) del método de Euler) y con otros métodos el número de cálculos se eleva a mayor número.

Por tal motivo, los métodos numéricos requieren de una herramienta de cálculo enorme. En la actualidad, las computadoras han llenado este vacío y han puesto a los métodos numéricos a la altura de los métodos analíticos.

Diferentes programas de cómputo cumplen con la misión de poder realizar gran cantidad de cálculos en tiempos muy cortos, empezando con las hojas de cálculo como Excel [14] y siguiendo con programas de cómputos matemáticos complejos como *Mathematica*<sup>®</sup> [15].

### A. Programación con *Mathematica*<sup>®</sup>

El programa de *Mathematica*<sup>®</sup> utiliza un poderoso lenguaje de programación simbólico y numérico, y aunque no es una programación gratuita, es una herramienta de cómputo muy recomendable por ser conocida y usada por estudiantes que se dediquen a una carrera como Física, Matemáticas o Ingeniería.

Para ejemplificar el uso del cálculo numérico realizado en *Mathematica*<sup>®</sup>, en la Tabla I, se describen las líneas de programación para la solución por el método de Euler del lanzamiento vertical de una pelota de ping pong en el aire. La masa de la pelota es de 2 g y su diámetro de 4.5 cm.

**TABLA I.** Programación del método de Euler (ME) para el lanzamiento vertical de una pelota de ping-pong en *Mathematica*<sup>®</sup>.

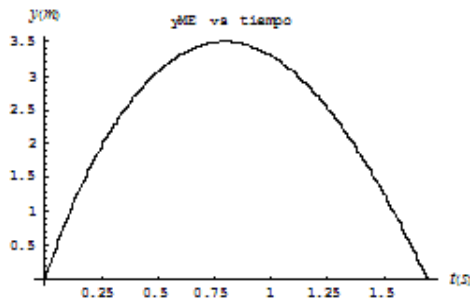
```
Clear["Global`*"];
"Condiciones iniciales";
t[0]=0;
y[0]=0;
v[0]=10;
"Datos para una pelota de ping-pong";
masa=0.00265;
g=9.8;
d=0.0379;
S=Pi*(d/2)^2;
rho=1.0;
Cd=0.48;
A=2*masa/(Cd*S*rho);
"Intervalo de tiempo y número de pasos"
Delta=0.001;
n=2*1691;
"Método de Euler";
For[k=1,k<n,k++,
a[k-1]=-g-Abs[v[k-1]]*v[k-1]/A;
j[k-1]=-Abs[v[k-1]]*a[k-1]/A;
y[k]=y[k-1]+v[k-1]*Delta;
v[k]=v[k-1]+a[k-1]*Delta;
t[k]=t[k-1]+Delta
]
"Gráficas";
gYT=Table[{t[k],y[k]},{k,n/2-1}];
gVT=Table[{t[k],v[k]},{k,n-1}];
gAT=Table[{t[k],a[k]},{k,n-2}];
gJT=Table[{t[k],j[k]},{k,n-2}];
ListPlot[gYT,
PlotLabel->StyleForm[yME vs t],
AxesLabel->TraditionalForm/@{t[s],y[m]}];
ListPlot[gVT,
PlotLabel->StyleForm[vME vs t],
AxesLabel->TraditionalForm/@{t[s],v[m/s]}];
ListPlot[gAT,
PlotLabel->StyleForm[aME vs t],
AxesLabel->TraditionalForm/@{t[s],a[m/s^2]}];
ListPlot[gJT,
PlotLabel->StyleForm[jME vs t],
AxesLabel->TraditionalForm/@{t[s],j[m/s^3]}];
```

El lanzamiento se hace desde la altura  $y = 0$  y con una velocidad  $v = 10$  m/s. La densidad del aire, considerada a la altura de la Cd. de México, es  $\rho = 1.0$  kg/m<sup>3</sup> y el factor de forma  $C_d = 0.48$  para un volumen esférico. El paso de iteración es de  $\Delta t = 0.001$  s y el número de iteraciones es  $n = 1524$ .

### B. Resultados gráficos

Las Figuras 1, 2 y 3, son el resultado de los cálculos realizados con *Mathematica*<sup>®</sup>.

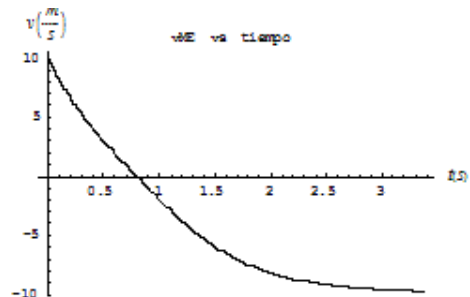
Como se puede ver en la Figura 1, el movimiento de ascenso de la pelota no es simétrico alrededor de su altura máxima, con su movimiento de descenso.



**FIGURA 1.** Valores calculados a partir del método analítico para el movimiento de ascenso y descenso de una pelota de ping pong en un lanzamiento vertical.

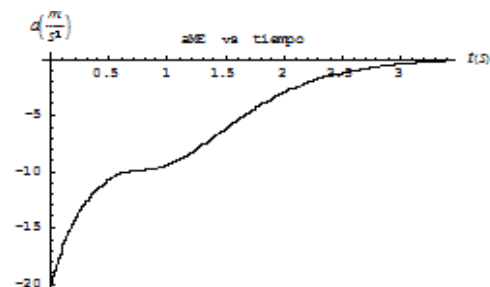
En el movimiento hacia arriba la fuerza de resistencia del aire va en el mismo sentido que la fuerza de gravedad y en el movimiento hacia abajo esta fuerza se opone a la fuerza de gravedad, de tal forma que el tiempo de ascenso es menor que el tiempo de descenso.

En la Figura 2, se observa el tiempo de máximo ascenso cuando la velocidad de la bola es cero en 0.69 s. El cruce de la curva con el eje de los tiempos es menor que 0.76 s, que es la mitad del tiempo de vuelo total de 1.52 s, lo que confirma la consideración realizada en la Figura 1.



**FIGURA 2.** Velocidad del movimiento de lanzamiento vertical de una pelota de ping pong calculados por el método analítico.

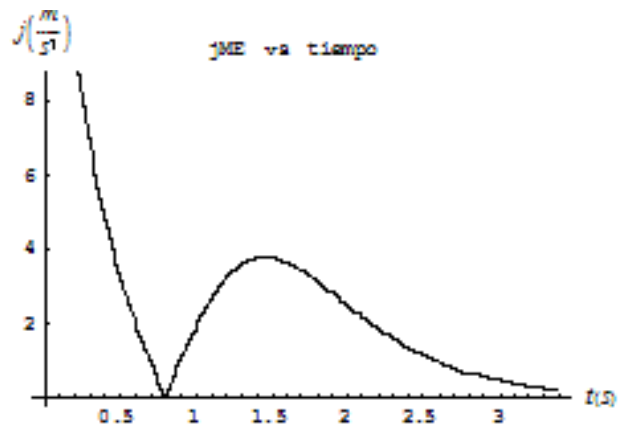
La pendiente de la curva de velocidad muestra un cambio al cruzar el eje de los tiempos. Estos cambios, en la Figura 3, son notables, ya que la aceleración muestran una persistencia en mantener cercano su valor al valor  $g$  de la aceleración de la gravedad, debido a la cercanía de la velocidad a cero y en donde la fuerza neta es prácticamente la de la fuerza de gravedad.



**FIGURA 3.** Aceleración del movimiento de lanzamiento vertical de una pelota de ping pong calculados por el método analítico.

Para determinar cómo son las variaciones observadas en la Figura 3 es verdadero, en la programación realizada con *Mathematica*® y mostrada en la Tabla I, se ha agregado la derivada de la aceleración respecto del tiempo o sacudida o *jerk*[16] ( $j$ ) y la gráfica correspondiente.

La derivando de la aceleración  $a = -g - \frac{|v|v}{A}$ , se ha programado en la tabla I, es  $j = -\frac{|v|a}{A}$ , donde  $j$  indica la sacudida o *jerk*.



**FIGURA 4.** Sacudida o derivada de la aceleración respecto del tiempo del movimiento de lanzamiento vertical de una pelota de ping pong calculada por el método analítico.

En la Figura 4, la sacudida o *jerk* disminuye a cero en el preciso momento en que la velocidad alcanza su valor cero en la máxima altura del movimiento, para volver a aumentar la sacudida antes de decaer nuevamente a cero de manera permanente.

Las soluciones gráficas derivadas del método de Euler, son útiles para establecer conceptualmente las características del movimiento.

## VI. MÉTODO ANALÍTICO VS MÉTODOS NUMÉRICOS

Establecidas las expresiones matemáticas para los métodos analíticos y numéricos y la herramienta de cálculo, es posible hacer comparaciones entre estos métodos.

### A. Error absoluto

Para estas comparaciones, se consideran los tiempos  $t_M$  y  $t_T$ , correspondientes a la máxima altura y a al tiempo total de ida y vuelta y expresados en las fórmulas (8) y (10).

En la Tabla II y Tabla III, se muestran las diferencias absolutas entre el método analítico (MA) y los seis métodos numéricos (MN) aquí examinados, para los valores de posición y velocidad en los tiempos  $t_M$  y  $t_T$ , correspondientes a los tiempos de máxima altura y de viaje completo de ida y vuelta respectivamente,

**TABLA II.** Error absoluto de los métodos numéricos respecto del método analítico, para  $t_M = 0.694$  s y  $y_M = 3.495$  m.

Método	$ y_{MA}-y_{MN} $	$ v_{MA}-v_{MN} $
Euler	$2.8 \times 10^{-3}$	$3.5 \times 10^{-3}$
Euler-Cromer	$7.2 \times 10^{-3}$	$3.5 \times 10^{-3}$
Medio Punto I	$2.2 \times 10^{-3}$	$3.5 \times 10^{-3}$
Medio Punto II	$4.4 \times 10^{-6}$	$5.2 \times 10^{-6}$
Euler-Richardson	$0.2 \times 10^{-6}$	$1.7 \times 10^{-6}$
<i>Leap Frog</i>	$2.2 \times 10^{-3}$	$21.1 \times 10^{-6}$

En la Tabla II, los tres primeros métodos numéricos tienen un error absoluto del orden de  $10^{-3}$  en la posición y en la velocidad. Estas discrepancias disminuyen para los tres últimos métodos numéricos a un orden de  $10^{-6}$ , excepto para la posición en el método de *Leap Frog*, aunque en la velocidad es del orden de  $10^3$ . Mostrando que el método de medio punto II y el método de Euler-Richardson, dan la mejor aproximación al método analítico para el tiempo  $t_M$ .

**TABLA III.** Error absoluto de los métodos numéricos respecto del método analítico, para  $t_T = 1.524$  s y  $y_T = 7.0 \times 10^{-4}$  m.

Método	$ y_{MA}-y_{MN} $	$ v_{MA}-v_{MN} $
Euler	$3.1 \times 10^{-3}$	$3.4 \times 10^{-3}$
Euler-Cromer	$14.0 \times 10^{-3}$	$3.4 \times 10^{-3}$
Medio Punto I	$5.4 \times 10^{-3}$	$3.4 \times 10^{-3}$
Medio Punto II	$10.9 \times 10^{-6}$	$10.5 \times 10^{-6}$
Euler-Richardson	$1.6 \times 10^{-6}$	$0.1 \times 10^{-6}$
<i>Leap Frog</i>	$5.4 \times 10^{-3}$	$43.3 \times 10^{-6}$

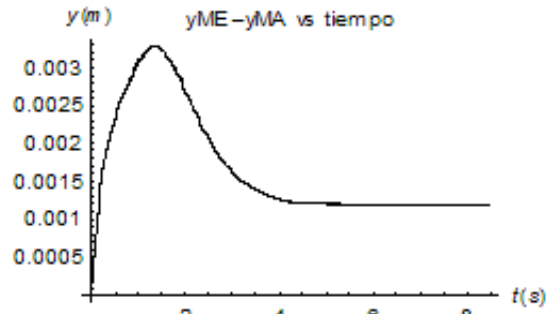
En la Tabla III, los seis métodos numéricos mantienen el orden de magnitud del caso anterior respecto de su diferencia con el método analítico, tanto para la posición como para la velocidad. Los métodos de medio punto II y de Euler-Richardson, siguen dando la mejor aproximación al método analítico para el tiempo  $t_T$ .

**B. Incertidumbre como función del tiempo**

Ya se ha mencionado que el error local se propaga a lo largo del tiempo obteniéndose un error global que al aumentar disminuye la precisión del método numérico respecto del método analítico. Estas variaciones se grafican para cada método numérico como función del tiempo y se analizan para caracterizar el error propagado y

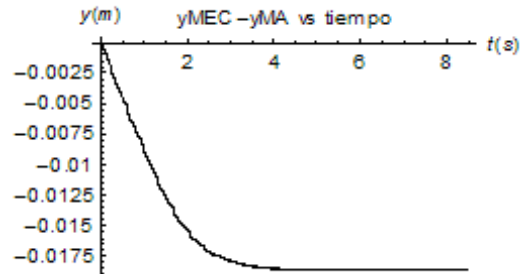
establecer un criterio para seleccionar el método numérico más adecuado al problema estudiado.

Las diferencias de posiciones entre el método analítico y los métodos numéricos se representan gráficamente.



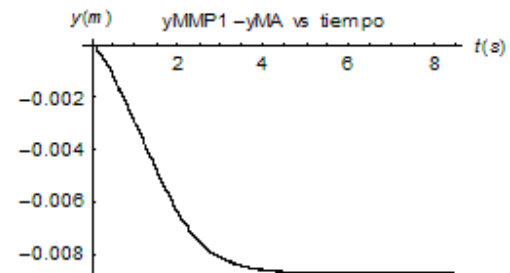
**FIGURA 5.** Discrepancia entre el método de Euler y el método analítico.

La Figura 5 corresponde a la diferencia  $\Delta y_{ME-A} = y_{ME} - y_{MA}$  de la posición determinada por el método de Euler (ME) y el método analítico (MA). En un intervalo de tiempo  $\Delta T \approx 8$  s, la diferencia entre los dos métodos es menor que  $3.5 \times 10^{-3}$  m y alcanza su valor máximo alrededor de 1.4 s después de iniciado su movimiento, para de nuevo decrecer y estabilizarse en un valor alrededor de  $1.2 \times 10^{-3}$  m.



**FIGURA 6.** Discrepancia entre el método de Euler-Cromer y el método analítico.

La Figura 6 corresponde a la diferencia  $\Delta y_{MEC-A} = y_{MEC} - y_{MA}$  de la posición determinada por el método de Euler-Cromer (MEC) y el método analítico. En el intervalo de tiempo  $\Delta T$ , la diferencia absoluta entre estos dos métodos aumenta hasta el valor de  $1.85 \times 10^{-2}$  m alrededor de los 4 s donde se estabiliza.



**FIGURA 7.** Discrepancia entre el método de Medio punto I y el método analítico.



La Figura 7 corresponde a la diferencia  $\Delta y_{MMPI-A} = y_{MEMPI} - y_{MA}$  de la posición determinada por el método de Medio Punto I (MMPI) y el método analítico. En el intervalo de tiempo  $\Delta T$ , la diferencia absoluta entre estos dos métodos aumenta hasta el valor de  $8.5 \times 10^{-3} m$  alrededor de los 4 s donde se estabiliza.

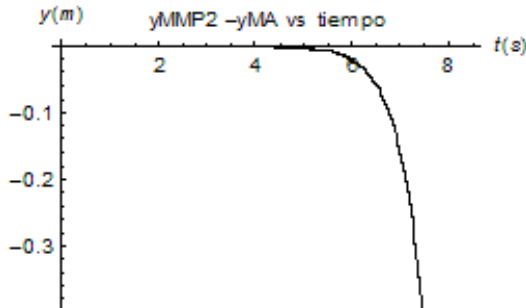


FIGURA 8. Discrepancia entre el método de Medio punto II y el método analítico.

La Figura 8 corresponde a la diferencia  $\Delta y_{MMPII-A} = y_{MEMPII} - y_{MA}$  de la posición determinada por el método de Medio Punto II (MMPII) y el método analítico. En el intervalo de tiempo  $\Delta T$ , la diferencia absoluta crece monótonamente a valores mayores de  $3.8 \times 10^{-1} m$ , estableciendo una tendencia a la divergencia. Sin embargo, antes de los 5 s esta diferencia es menor de  $2 \times 10^{-3} m$ , de tal forma que dentro del intervalo de tiempo en que el movimiento se estabiliza a una velocidad constante (velocidad terminal), que en el sentido práctico es en un tiempo menor de 4 s, los resultados dados por este método son muy convenientes.

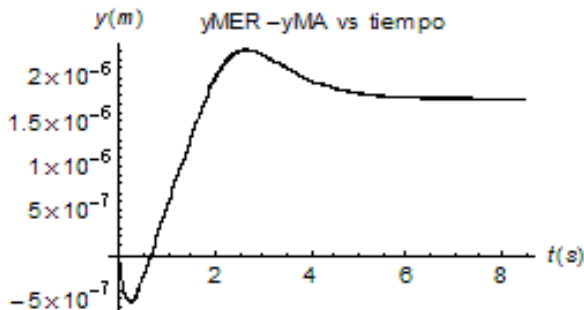


FIGURA 9. Discrepancia entre el método de Euler-Richardson y el método analítico.

La Figura 9 corresponde a la diferencia  $\Delta y_{ER-A} = y_{MER} - y_{MA}$  de la posición determinada por el método de Euler-Richardson (MER) y el método analítico. En el intervalo de tiempo  $\Delta T$ , la diferencia absoluta entre estos dos métodos oscila de  $-5 \times 10^{-7} m$  a  $2.3 \times 10^{-6} m$  entre 0.2 s y 2.6 s, para disminuir a  $1.8 \times 10^{-6} m$ , donde el error se estabiliza.

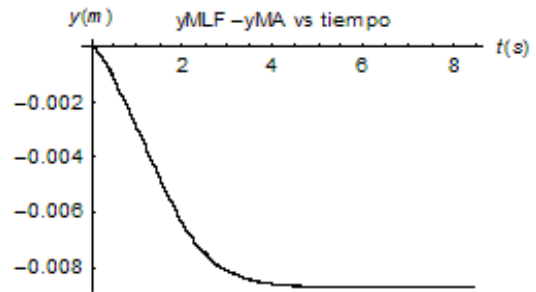


FIGURA 10. Discrepancia entre el método de Leap Frog y el método analítico.

La Figura 10 corresponde a la diferencia  $\Delta y_{LF-A} = y_{MLF} - y_{MA}$  de la posición determinada por el método de Leap Frog (MLF) y el método analítico. En el intervalo de tiempo  $\Delta T$ , la diferencia absoluta entre estos dos métodos aumenta hasta el valor de  $8.5 \times 10^{-3} m$  alrededor de los 4.2 s donde se estabiliza.

Estas desviaciones de los métodos numéricos respecto del método analítico caracterizan su estabilidad.

## VII. CONCLUSIONES

Los métodos analíticos de solución de la ecuación de movimiento de Newton, cuando la ley de fuerzas no es una constante, requieren del cálculo diferencial e integral para su solución o métodos más complejos para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden. Los estudiantes universitarios de primer año de las carreras de física o ingeniería, a pesar de haber llevado uno o dos cursos de cálculo, tienen dificultades para aplicar su conocimiento matemático a la solución de problemas de física.

Por otra parte, los métodos numéricos de solución de la ecuación de movimiento de Newton son fáciles de introducir en un curso de mecánica, pues las ecuaciones de solución, son ecuaciones algebraicas que sólo requieren ser resueltas bajo métodos iterativos sencillos, que en la época actual de las computadoras son rápidos de evaluar (ver Tabla I). Por tal motivo se sugiere enseñar los métodos numéricos a los estudiantes de física o ingeniería desde su curso de mecánica introductoria y abordar problemas interesantes de esta materia, que en los casos de soluciones analíticas son difíciles de resolver a este nivel.

Para ejemplificar la bondad de los métodos numéricos, en este escrito, se ha planteado resolver el movimiento del lanzamiento vertical hacia arriba de una bola sujeta a la fuerzas de gravedad y de resistencia del aire en un viaje de ida y vuelta, analíticamente y por cinco métodos numéricos diferentes. El análisis cuidadoso del error local o de truncamiento y el error global para cada uno de los métodos numéricos permite comparar la discrepancia entre los resultados de los métodos numéricos con el método analítico que se ha tomado como referencia. Después de hacer comparaciones, el método más sencillo de Euler resulta tener una discrepancia con respecto del método

analítico del orden de  $O(\Delta t)$  cuando se calcula la posición y la velocidad en el punto más alto de la trayectoria o en el punto de retorno.

Para el método de Euler-Richardson esta discrepancia se reduce a un orden de  $O(\Delta t^2)$ , lo cual está muy de acuerdo (ver las Tablas II y III) con el análisis sobre los errores locales y globales realizados de antemano. Para el resto de los métodos numéricos, estas discrepancias también se encuentran del orden de lo predicho en el análisis correspondiente.

Si tomamos en cuenta que el paso del intervalo de tiempo considerado en las soluciones numéricas del problema de lanzamiento aquí analizado fue de  $\Delta t = 10^{-3}$ , entonces la diferencia entre el método analítico y el de Euler es del orden de  $10^{-3}$  y para el método de Euler-Richardson del orden de  $10^{-6}$ . Para el resto de los métodos numéricos la diferencia está entre  $10^{-3}$  y  $10^{-6}$ , lo cual permite seleccionar al método de Euler-Richardson como el mejor método numérico de aproximación al método analítico. Pero en todos los casos, en las gráficas y  $v$  vs  $t$ ,  $v$  vs  $t$ ,  $a$  vs  $t$  y  $j$  vs  $t$  no es posible diferenciar unas soluciones de otras debido a tan pequeñas discrepancias.

Tan pequeñas discrepancias entre los métodos numéricos respecto del método analítico para el problema analizado en este escrito, dan confianza para hacer el estudio conceptual del problema por medio de la selección de una de sus soluciones numéricas. De esta manera se puede analizar, por ejemplo, ¿qué ocurre con la altura máxima cuando la velocidad inicial de lanzamiento se duplica? o ¿cuál debe ser la velocidad inicial para alcanzar una determinada altura? Estas preguntas con una aplicación apropiada de la solución numérica seleccionada se pueden responder y aquí se dejan abiertas para ser respondida por estudiantes curiosos, que recurran a la solución analítica sólo para verificación y en caso de curiosidad extrema tratar de encontrar una relación entre la velocidad inicial de lanzamiento y la altura máxima gráfica o analíticamente.

No se asegura que los métodos numéricos analizados en este escrito, al aplicarlos a otros problemas den tan buenos resultados como los obtenidos en el problema aquí estudiado, por lo que no hay que aplicarlos a ciegas en cualquier otro caso. Pero la sugerencia conveniente es utilizarlos en otros problemas de aplicación de la segunda Ley de Newton bajo un cuidadoso análisis e inclusive a aquellos problemas en donde la solución analítica sea difícil de determinar o donde sea imposible obtener una solución analítica.

## REFERENCIAS

- [1] McDermott, L. C., *Oesterd Medal Lecture 2001: "Physics Education Research-The Key to Student Learning*, Am. J. Phys. **69**, 1127-1137 (2001).
- [2] Wieman, C., and Perkins, K., *Transforming Physics Education*, Physics Today **58**, 36-41 (2005).
- [3] Laws, P., *A unit on oscillations, determinism and chaos for introductory physics students*, Am. J. Phys. **72**, 446-452 (2004).
- [4] Grayson, D., *Rethinking the content of physics courses*, Physics Today **59**, 31-36 (2006).
- [5] Hestenes, D., *Notes for a Modeling of Science, Cognition and Instruction*, Proceedings of the 2006 GIREP conference: Modeling in Physics and Physics Education.
- [6] Holec, S., and Spodniakova, P., *Using simulation in physics education*, Proceedings of the 2006 GIREP conference: Modeling in Physics and Physics Education.
- [7] Eubank, S., Miner, T., Tajima, and Wiley. *Interactive computer simulation and analysis of Newtonian dynamics*. Am. J. Phys. **57**, 457-463 (1989).
- [8] Cui, L., Sanjay, R., Fletcher, P., and Bennett, A., *Transfer of learning from college calculus to physics courses*, (Proceedings of the National Association for Research in Science Teaching, April, 3-6 (2006)).
- [9] Benacka, J. and Stubna, I., *Accuracy in computing acceleration of free fall in the air*, The Physics Teacher **43**, 432-433 (2005).
- [10] García, A. L., *Numerical methods for physics*. (Second Edition, Prentice Hall, USA, 2000).
- [11] Eisberg, R., and Lerner, L., *Physics: Foundations and Applications, Vol I*, (McGraw-Hill, USA, 1981).
- [12] Gatland, I., *Numerical integration of Newton's equations including velocity-dependent forces*, Am. J. Phys. **62**, 259-265 (1994).
- [13] Feynman, R., Leighton, R., and Sands, M., *The Feynman Lectures on Physics, Vol. I*, (Addison-Wesley, Mass., 1963).
- [14] Buzzo, R., *Estrategia EE (Excel-Euler) en la enseñanza de la Física*. Lat. Am. J. Phys. Educ. **1**, 19-23 (2007).
- [15] Bellomo, N., Preziosi, L. and Romano, A., *Mechanics and Dynamical Systems with Mathematica®*. (Birkhäuser, Berlin, 2000).
- [16] Schot., S. H., *Jerk: The time rate of acceleration*, Am. J. Phys. **46**, 1090-1094 (1978).