<Provincia de Buenos Aires
Dirección General de Cultura y Educación
Instituto Superior "Fundación Suzuki"
San Miguel, Buenos Aires, Argentina.

"¿Cómo, esto es matemática?"

por

Indart, Liliana Inés

**Tesina para optar al título de
Profesor de Matemáticas**

Buenos Aires, San Miguel.

Mayo del 2006

Dedicatoria...

A mis hijos y nietos.
A mi hermana, a mis cuñados, a mis sobrinos.
Que son el motor y el combustible de mi vida.

Índice

¿cómo, esto es matemática ‘[1]

Resumen

Propongo una serie de problemas, para la resolución de la mayoría no se necesita mas que efectuar algunos sencillos cálculos con lápiz y papel, para ninguno de ellos se precisa dotes especiales, basta con un poco de paciencia, una pizca de sentido común y hacer uso de las herramientas que la matemática proporciona.

Introducción

El principal objetivo de este trabajo es analizar la relación, si esta existe, entre la promoción de metodológicas que favorezcan la estimulación del desarrollo del pensamiento en los alumnos, a través de actividades lúdicas y en el proceso de construcción y adquisición de conocimientos o el modo de pensar matemático: RAZONAMIENTO LOGICO, LA IDEA DE NUMERO, Y EL ESPACIO, usando como vehículo el natural interés y desafío por resolver problemas.

Aportar al desarrollo del pensamiento en el alumno proporcionándole herramientas que le permitan anticipar lo que vendrá, apoyar el pensamiento creativo, aportar al desarrollo del pensamiento critico, mediante el uso de herramientas para razonamientos lógicos y el entrenamiento para la evaluación a la hora de la toma de decisiones en forma más científica

El lógico y filosofo contemporáneo José Bocheñski, llamo a la lógica “la moral del pensamiento y de la palabra” si aplicamos su declaración al pensamiento racional que interviene en toda actividad teórica y practica de la vida no solo escolar sino diaria, encontraremos la justificación mas profunda y abarcativa de todo intento o procedimiento didáctico destinado a estimular en nuestros estudiantes el desarrollo del pensamiento creador y a la actitud critica frente a los problemas relacionados con la búsqueda y el hallazgo de la verdad.
A los objetivos perseguidos los considero fundamentales para el trabajo áulico, pero, lo que es más importante, para la vida y la forma de resolver distintos desafíos:

Desarrollar la capacidad de observación.
Estimular el descubrimiento.
Poner en evidencia la capacidad de invención.
Fundamentar con el máximo rigor el conocimiento adquirido.

Es por lo tanto motor del presente trabajo promover metodologías que favorezcan la estimulación del desarrollo del pensamiento en los alumnos y no la mera repetición algorítmica de procedimientos sin objeción.
Para lograr este ambicioso proyecto la herramienta elegida por mí son: **las actividades lúdicas** en el proceso de construcción y adquisición de conocimientos y modo de pensar matemático, el razonamiento lógico, el numérico, el espacial y el natural interés y desafío por resolver problemas.

---

[1] ¿CÓMO, ESTO ES MATEMATICA?….

Sin dejar de mantener el bagaje cultural de la Matemática como un producto de la creación humana que ha aportado al desarrollo de la misma apoyando los avances de la ciencia y la tecnología, pero incentivando el desarrollo del pensamiento, proporcionándole mecanismos que le permitan anticipar lo que vendrá y dándoles las herramientas para razonar lógicamente, evaluando la situación ha resolver y tomando la decisión en forma mas científica.
Cambiar la impresión de que las matemáticas son frías, inmutables, lejanas, difíciles, sin lugar para la creación, porque se la ve alejada de la realidad. Dar a conocer otros aspectos de la misma que suscite en nuestros alumnos una actitud positiva hacia su estudio y aplicación.
La matemática recreativa utiliza estrategias de juego cuyas bondades como recurso de aprendizaje son ampliamente reconocidas y, además, se trabajan objetivos transversales como el respeto por los demás, la responsabilidad al jugar correctamente, respetar los turnos y aprender a esperar, el compañerismo la tolerancia por el posible error del otro, la justicia, la confianza en si mismo y en sus ideas.
La experiencia que nuestros alumnos logren en la resolución de juegos, desafíos ingeniosos u otra actividad matemáticamente recreativa puede constituir un desafío interesante tanto para la acción personal como para el trabajo en equipo.
La utilización de la torre de Hanoi, en este grupo de juegos me fue sugerida por el uso que de ella hace Piaget en una de sus experiencias. Esta se encuentra en su libro " La toma de conciencia", allí se aplica para verificar una hipótesis con respecto a la forma que los niños y adolescentes pasan de la acción efectiva a la inteligencia. Esta hipótesis sigue siendo enteramente valida para explicar los comportamientos que exhiben nuestros alumnos, razón por la cual me ocupare con algún detalle de los argumentos que Piaget utiliza y de las experiencias y resultados que expone.
Piaget presenta la torre de Hanoi, con dos únicos discos, a niños de 5 años en adelante. Es notable observar que aún en un problema tan simple en apariencia, como es el traslado de dos discos, tras múltiples éxitos o fracasos, y aun luego de asegurarse el éxito, no generalizan lo aprendido ni toman conciencia de las combinaciones que los conducirían al objetivo. Los niños aciertan al cabo de numerosas pruebas, pero no comprenden lo que han hecho ni son capases de explicar los mecanismos que han utilizado. Piaget nos muestra la similitud de este problema con otro que ha estudiado (transferir el contenido de un vaso a otro mediante la utilización de un intermediario) y lo explica por la falta de un sistema interno que permita la transitividad operatoria, ya que es esto, en lo que consisten los desplazamientos de los discos. Piante dice: "hay en este periodo un primado sistemático de las acciones exploratorias sobre toda deducción, con falta de toma de conciencia de las acciones exitosas" La inteligencia no es sino un conjunto de métodos apropiados que permiten la reducción de la información, en este caso los niños pequeños tienen al alcance de su mano los resultados correctos y los aplican al problema, pero carecen de un sistema que les permita ordenar el conjunto de los datos en una totalidad coherente y son dominados por la variedad de los elementos y pierden las leyes que gobiernan la totalidad.
A partir de los 7-8 años los éxitos con los discos son inmediatos, pero vuelven los tanteos para tres discos. Es notable comprobar que la acción adelanta siempre a la toma de conciencia y que los éxitos, aun los repetidos, no equivalen a una comprensión de lo realizado, con esta experiencia Piante confirma lo que sabemos acerca del origen de las operaciones de la inteligencia. En el estadio 11-12 años se fija el comienzo del pensamiento formal, se obtienen éxitos estables y rápidos para tres discos y una anticipación mas y más inferencia para los numerosa superiores, con una utilización explícita de la experiencia anterior.
Así como la música es el arte de crear belleza mediante sonidos, la pintura el arte creado por las formas y el color, las matemáticas son el arte de crea belleza mediante la combinación de ideas.
Mucha gente disfruta de la matemática como una afición fascinante, hay quienes la estudian como recreación, así como otros cultivan la música o la pintura **"simplemente por placer**"

ASPECTOS METODOLOGICOS:

Al aplicar un material de juegos y de actividades que se sugiere con el fin de contribuir a reducir la distancia entre la matemática informal de la vida diaria y la matemática formal de la vida escolar se tendrán presentes los siguientes aspectos:

- Identificar propósitos y contenidos aritméticos y geométricos implícitos en las actividades lúdicas propuestas.
- Identificar habilidades posibles de desarrollar.
- Justificar la aplicación de la actividad recreativa o juego en el estudio de la matemática.
- Analizar el aporte de la actividad en el desarrollo del pensamiento matemático.
- Proponer actividades para el desarrollo de la imaginación espacial y la intuición geométrica.
- Compartir con los alumnos el gusto por el aprendizaje de la matemática en la medida que se descubre que ésta, además de ser importante en su formación es entretenida, divertida e interesante.

Pautas para la resolución de problemas

A continuación se presentara una pauta de trabajo para enfrentar diferentes problemas, en ella se plantean diferentes etapas y preguntas que orientan el trabajo a realizar. Esta pauta es una sugerencia para sistematizar el trabajo, no la única, ni tal vez la más fácil de encarar pero sí una forma de trabajo.

Etapa 1: **Recoger información.**
1- Lee el enunciado del problema completo, ¿entiendes el significado de todas las palabras que se utilizan en su enunciado?. Si no es así, pregunta.
2- ¿Cuál es exactamente la información que te solicita como respuesta? Describe de manera precisa la información requerida. Si es necesario escríbela, grafícala o simbolízala.
3- ¿Cuál es el nombre del área matemática en que te están solicitando dar la respuesta?
4- ¿Toda la información es conocida, hay algún concepto que no conozcas?
5- ¿Cuáles son los conceptos claves para comprender el problema?
6- Busca en las propiedades de los contenidos que manejas de la materia.

Etapa 2**: Definición del problema.**
1-Con la información recopilada ¿podrías reedefinir el problema?.
2- ¿Se podría simbolizar o plantear de forma diferente?

Etapa 3: **Selección de estrategias**.
1- De los contenidos y propiedades que haz recordado y recopilado cual o cuales son una herramienta útil para resolver el problema?
2- De acuerdo con lo anterior ¿cuáles son las posibilidades o estrategias que tienes para abordar el problema?, ¿Cuál de estas te parece mas precisa y/o rápida?
3- Al probar con alguna de estas estrategias ¿Hay alguna relación nueva que te permita llegar fácilmente a una relación con los datos obtenidos?.

Etapa 4: **Ejecución de la tarea**
1- Para realizar la tarea ¿es necesario considerar todos los pasos anteriormente previstos?
2- Sigue una secuencia ordenada, de manera que puedas corregir fácilmente la estrategia que haz utilizado.
3- Revisá el procedimiento que haz seguido ¿hay algún error?.

….

1 Perfil socioeconómico de los grupos.

1.1 Octavo quinta

Grupo de 34 alumnos, 33 de ellos son varones de entre 14 y 16 años y una niña de 15 años. Entre ellos hay 5 (cinco) repetidores de octavo, en la misma institución y dos provienen de otras. Durante el año se registraron algunas situaciones conflictivas de conducta, en otras áreas, no en matemática. Se realizaron reuniones con los padres de los alumnos involucrados y las autoridades del establecimiento, que mediaron para su resolución.

1.2 Octavo segunda

Grupo de 26 alumnos todos ellos varones, las edades están entre los 14 y 16 años, hay uno de los alumnos que esta cumpliendo los 17 años en el transcurso del año. Hay 3 repitentes, uno de ellos es la tercera vez que hace octavo año. No hubo ningún problema grave de conducta.

1.3 Tercero tercera electromecánica

Grupo de 21 alumnos de entre 17 y 21 años, son 16 varones y 5 niñas. Dos de los alumnos están recursando, por decisión propia todos los espacios, que en la primera oportunidad no promovieron, esto lo hacen después de haber intentado, sin éxito rendir las áreas adeudadas. Asisten en contraturno, todos los días de la semana, a trayectos propios de la especialidad. Condición económica regular, 5 reciben merienda reforzada

1.4 Tercero primera construcciones

Grupo de 18 alumnos de entre 17 y 19 años, no hay niñas ni repetidores, es un grupo muy unido que ha cursado los tres años del Polimodal juntos. Su condición económica es regular, muchos de ellos trabajan sábados y domingos. Hacen en contraturno los trayectos técnicos propios de la especialidad. 10 reciben merienda reforzada en el horario escolar

La torre de Hanoi.

Disponemos de tres parantes verticales, en los cuales se colocan discos de cartulina agujereados en el centro, de modo que puedan ser desplazados con facilidad en los soportes. Hay, por lo menos en un principio, ocho discos, de tamaños crecientes, y están apilados de mayor a menor en una columna.

La tarea propuesta consiste en llevar la columna de uno de los parantes a cualquiera de los otros dos. Para realizar el traslado, solamente se puede llevar un disco por vez, pero de modo tal que nunca un disco quede colocado sobre otro de tamaño menor. Los discos pueden ser movidos indistintamente a uno u otro de los soportes verticales, pero el traslado total de completarse en la menor cantidad posible de movimientos.

Como medio de simplificación de, se puede enfocar el problema por partes. Realizando tareas más simples en los primeros intentos. Para esto se limita el numero de discos a 2, 3, 4 etc. El objetivo es lograr que los adolescentes hallen la expresión que da el numero mínimo de movimientos necesarios: $2^a - 1$ donde a es el numero de discos. De esta manera se halla que para 2 discos el numero mínimo de movimientos son 3, para 3 discos los movimientos son 7, para 4 son 15 y así sucesivamente. Para 8 discos, el numero original de discos del entretenimiento, son 255, los movimientos necesarios.

Si se procede con método y orden, se halla, en no mucho tiempo, que el secreto necesario para evitar los errores o las repeticiones indebidas de movimientos, es comprender lo que el juego problema tiene de recursivo, esto es de repetitivo, porque los pasos dados en el caso de 2 discos se vuelven a dar en 3,4, etc.

A continuación, algunos ejemplos de traslados, recalcando, justamente lo que hay en todos de esquema para los casos siguientes:

Caso de dos discos

1			1
2 - -	2 1 -	- 1 2	- - 2

Caso de tres discos

1			
2	2		1
3 - -	3 1 -	3 1 2	3 - 2

			1
1		2	2
_ - 3 2	1 3 2	1 3 -	3 -

Resultados obtenidos:

Los alumnos de octavo año tienen, en promedio 13-14 años. Algunos de ellos, no precisamente todos han ingresado en el pensamiento formal, mientras que la mayoría se encuentra, de una manera u otra en camino a él. E n los cursos indicados obtuvimos, desde un principio, reacciones altamente positivas, el interés legitimo y enteramente autónomo, privó en muchos casos, por ejemplo en la construcción material de la torre, con parantes de madera y discos de cartón prensado.
Con el material, la tarea de realización y de interpretación pudo asumir formas practicas. De todas maneras, cabe señalar que la mayor parte de los alumnos que produjeron resultados, los obtuvieron por el simple hecho de colocar números encolumnados en hojas de papel. Tal como lo muestran los datos de Piaget, la solución con dos, tres o cuatro elementos, resulta fácil e inmediata. Dos alumnos de los cursos pudieron extender sus acciones a cantidades mayores (cinco, seis), sin mayor problema. En un caso hubo superabundancia de movimientos con respecto a otros. Se conduce el problema a conocer el mínimo numero de movimientos. En forma empírica se halla un numero definido para cada cantidad de discos que corresponde a la solución optima hallada prácticamente.
Se busco una expresión matemática general, mediante el análisis de los resultados obtenidos (3-7-15-31), descubren que la diferencia entre 3 y7 es 4, la diferencia entre 7 y 15 es 8, la diferencia entre 31 y 15 es 16. Con lo cuál se intuye alguna multiplicidad constante por el factor 2. Se llega a calcular para 10 discos procediendo en forma sucesiva, sin poder hacerlo par 60 discos.
En los terceros no hubo muchas diferencias, como era de esperar, no pudieron formular una expresión que permitiera el calculo sin la experiencia.
Trabajaron una manera empírica distinta, escribieron la serie 4,8,16,32,64 y le restaron la unidad a cada uno, satisfaciendo el resultado hallado en la practica. No se pasa de la constatación a la explicación causal del problema, no pueden hallar la ley general, se apoyan en los datos conseguidos y les cuesta entender y expresar lo que hacen en la practica con seguridad.
Por supuesto, que existen niveles en el acceso a este problema. Pero este es, precisamente, uno de los hechos que me lleva a ponderar las virtudes del entretenimiento matemático, todos los alumnos participan. A muy pocos se les escapan los datos del problema, y esto se da al aumentar el numero de discos, con tres discos a ninguno. Todos intentan su solución, algunos van mas lejos que otros, pero el camino no está cerrado para ninguno.
La experiencia continua con una serie de 10 problemas, que se presentaron como un nuevo desafío a salvar

Problema nº 1

Soy un número par.
Soy mayor que 10 y menor que 18.
No me nombras al contar de 4 en 4.
¿Qué número soy?.

Solución problema nº 1
(2,4,6,8,10,12,14,16,18,20..........)
(11,12,13,14,15,16,17)
(1,2,3,5,6,7,9,10,11,13,14,15,17,18,19.......)

EL NÚMERO ES 14.

Problema nº 2

Soy el doble de otro número.
No soy un número de dos cifras.
Si me suman cuatro soy mas de diez.
¿Qué número soy?.

Solución problema nº 2

(2,4,6,8,10,12,14.....)
(1,2,3,4,5,6,7,8,9)
(8+4,9+4,10+4,11+4,12+4,......)

EL NÚMERO ES 8.

Problema nº 3

Soy un número impar.
Soy el resultado de una operación de multiplicación por 5.
No soy mayor que treinta.
Una cantidad que equivalga a mi mitad es mas de una docena.
¿Qué número soy?

Solución problema nº 3

(1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29.....)
(5,10,15,20,25,30.......)
(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29.)
(25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,.....)

EL NÚMERO ES 25

Problema nº 4

Cuando se aprende a restar dos números, tarde o temprano uno se encuentra con el problema de llevarse cifras para el siguiente paso. El siguiente método nos evita esto:
Ejemplo 573-489 =**84**
1º paso:
restamos **489** de 999 = 510
2º paso:
sumamos **573** mas 510 = 1083
3º paso:
sumamos la primer cifra al número restante
083+1= **84**

Razonemos:

573-489= 573+(1000-1000)-489

573-489 =573+(999+1-1000)-489

573-489=573+ (999-489)+1-1000

573-489=573+510+1-1000

573-489=1083+1-1000

573-489=**84**

Problema nº 5

Un método de multiplicación, que cuenta la historia, era usado por los campesinos rusos en el pasado. Solo requiere conocer la tabla del dos y consiste en dividir sistemáticamente uno de ellos por dos y al otro duplicarlo:
Si quiero hallar el producto de 39 x 79,

39	79*
19	158*
9	316*
4	632
2	1264
1	2528*

Ignoro, sí los hay, los restos. Finalizo cuando en la columna de la izquierda llego a 1. El resultado de la operación lo obtengo sumando los números de la columna de la derecha enfrentados con números impares de la izquierda:
39 x 79 =79+158+316+2528= 3081

Razonemos
La razón por la cual el método funciona es el hecho de que al seleccionar los números impares luego de la división por dos, es esencialmente el mismo procedimiento que usamos al escribir un numero en su expresión binaria:
39=100111 en notación binaria.
Si multiplicamos las potencias de dos cuyos restos, no son cero, por 79, y sumamos hallamos el resultado requerido.

Problema nº 6

Encuentra el número omitido en cada serie:
a.2, 5, __, 11,14, 17.
b.2, 4, 6,8, __, 12.
c. 2,7,12, 17, 22, __, 32.
d. 3,1,4,2, 5, __, 6.
e. 1,4,9, 16, 25, __, 49, 64.
f. 2,4,8, 16, __, 64, 128.
g. 0, 2,6,14, 30,62, __, 254.
h. 5, 9,16,29, 54, __, 200.

Solución problema nº 6
a. Los números aumenta de tres en tres, 8.
b. Los números aumentan de dos en dos, 10.
c. Los números aumentan de cinco e cinco. 27.
d. Hay dos pautas de crecimiento intercaladas, (3,**1**,4,**2,**5,**3**,6).
e. Sucesión de cuadrados, 36.
f. Cuadrados de dos, 32.
g. La diferencia entre el 1º y el 2º es 2, la diferencia entre el 2º y el 3º es 4, la diferencia entre el 3º y el 4º es 8º y así sucesivamente, el numero que completa la serie es 126.

h. Hay dos pautas de crecimiento: 2,3,4,5,6... y 3,6,12,24 que se van sumando 1º con 1º, 2º con 2º etc. El número es 103.

Problema nº 7

Toma un número de tres cifras distintas, por ejemplo 123. Repite las mismas cifras con el objeto de obtener un número de seis cifras: 123123, divídelo primero por siete, luego por 11, y finalmente por 13. Obtendrás el mismo número con el que empezaste. Prueba con otro número, ¿siempre se cumple, puedes explicarlo?

Solución problema nº 7
El mejor sistema para comprender lo sucedido es: multiplicar 7x 11 x13 = 1001, y cualquier número que multipliques por él, repetirá sus cifras.

Problema nº 8

Te propongo que escribas los números del cero al diez utilizando cinco dos, ni uno mas ni uno menos, y recurriendo a las siguientes operaciones: +,-,x, /, y al paréntesis. Te muestro como empezar:
0= 2 –2/2-2/2

Solución problema nº 8
1= 2+2-2-2/2
2=2+2+2-2-2
3=2+ 2 - 2 + 2/2
4=2 x 2x 2 –2 – 2

5=2+2+2-2/2
6=2+2+2+2+2
7=(22/ 2)-2-2
8= 2 x2 x 2 +2 - 2
9=2 x 2 x 2+ 2/2
10=2+2+2+2+2

Problema nº 9

Inténtalo con cuatro cuatros en las mismas condiciones, y con las mismas operaciones, empezamos así:
0= 4 – 4 + 4 – 4
Solución problema nº 9
1= 44/ 44= 4-4+4/4 = (4+4) / (4+4)
2= 4 /4+ 4/4
3=(4+4+4) /4
4 =(4 – 4) / 4 +4
5= ((4 x 4) + 4) / 4
6 = (4+4)/4 +4
7=4+4- 4/4
8= 4+4+4-4
9=4+4+4/4
10=(44-4)/4

Problema nº 10

Puedes escribir 100, con los números del 1 al 9 y utilizando los signos usuales, +, -, x, /, y paréntesis.

Solución nº 10

100= 1+2+3+4+5+6+7+(8x9)
100= 123-45-67+89
100 = 123-4-5-6-7+8-9
100= 1/2+6/4+5/8 +3/8 +97

problema nº	resuelven	no resuelven	ausentes
1	6	10	2
2	11	5	2
3	7	8	1
4	3	15	0
5	6	9	3
6	10	8	0
7	12	6	0
8	9	8	1
9	10	6	2
10	12	4	2
	86	79	13

Bibliografía

Citada en el texto

Apellido, Nombre . Año. Editorial.

Piaget, Jean. “La toma de conciencia “ Morata Madrid

Holt, Michael. “Matemáticas recreativas 2 “ 1986, Ediciones Martínez Roca S.A.

Bolt, Brian.” Mas actividades matemáticas” 1985, Cambridge University Press.

Bolt, Brian. “Aun mas actividades matemáticas” 1989, Cambridge University Press.

Agradecimientos

A mi familia, a la que deje muchas veces, en segundo plano, por el tiempo que dedique a la presente tarea. De la que no recibí nunca un reproche.