DIRECCIÓN GENERAL DE CULTURA Y EDUCACIÓN
INSTITUTO SUPERIOR DE FORMACIÓN DOCENTE
INSTITUTO SUPERIOR FUNDACIÓN SUZUKI

"LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS A TRAVÉS DE LA HISTORIA"

Ante la necesidad de avanzar en sus conocimientos, el hombre necesitó ampliar el universo de los conjuntos numéricos.

TESINA PARA OPTAR AL TÍTULO DE:
Profesor de matemática.

AUTORA: VERÓNICA VALDEZ
SAN MIGUEL, BUENOS AIRES
19 DE FEBRERO DE 2008.

Agradecimientos:

A mi familia por su apoyo, tolerancia y comprensión. A mis seres queridos que siempre me ayudaron y alentaron en los momentos difíciles. ¡Muchas gracias!

“Teniendo conocimiento de cómo la raza humana ha adquirido su sabiduría sobre ciertos hechos y conceptos, estaremos en mejor disposición de juzgar cómo los niños adquieren tal conocimiento.”

George Pólya (1887-1985)

ÍNDICE

RESUMEN:

La antigüedad de la matemática se remonta a más de dos mil años. Su estudio comenzó como meros actos de contar las pocas pertenencias que el hombre de la prehistoria poseía. Luego con la agricultura, las monumentales construcciones, los sistemas de numeración se ampliaron y los cálculos se volvieron más complejos.

La matemática, que conocemos en la actualidad como una ciencia exacta, ordenada y disciplinada debió atravesar por un largo y engorroso camino. El conocimiento matemático avanza apresuradamente, las teorías antiguas se fusionan con las modernas para crear otras aún más abstractas y completas. Esta evolución de la matemática sigue un curso que la escuela no puede alcanzar. La escuela brinda los resultados matemáticos, bajo la sistematización de las teorías y la exigencia de brindar un carácter moderno. El conocimiento toma formas de presentación en forma graduada y ubica al docente en un lugar donde debe plantear los conceptos, leyes y procedimientos que conduzcan al educando a desarrollar sus capacidades intelectuales y pueda acercarse así al mundo científico de una manera más dinámica y eficiente.

Sin embargo no podemos ignorar que los conocimientos con los que hoy trabajan los científicos tuvieron un origen en la historia.

La evolución histórica nos ayuda a comprender mejor a esta ciencia que fue creada por hombres que vivieron en un contexto socio-cultural determinado.

La historia de la matemática permite conocer no sólo el pasado, sino comprender mejor el presente de los conceptos y teorías matemáticas utilizadas.

La utilización de los aspectos históricos por parte de los docentes del área, resultan muy apropiados y fructíferos para lograr acercar los contenidos de la asignatura, ofreciendo al alumno un espacio que le permita descubrir a la matemática desde otra perspectiva.

ABSTRACT:

The antiquity of the mathematics goes back to more than two thousand years. Her study began like simply acts of counting the few belongings(properties) that the man of the prehistory was possessing. Then with the agriculture, the monumental constructions, the systems of numeration were extended and the calculations became more complex.

The history of the mathematics allows to know not only the past, but to understand better the present of the concepts and mathematical used theories. The utilization of the historical aspects on the part of the teachers of the area, they would turn out to be very appropriate and fruitful to manage to bring the contents of the subject over, offering to the pupil a space that he allows him to discover to the mathematics from another perspective.

DESCRIPTORES:

Historia de los conjuntos numéricos y su utilización en la educación.

INTRODUCCIÓN:

Los diversos conjuntos numéricos adquieren valor según la aplicación que las personas les otorguen a los mismos. La ampliación de los diferentes conjuntos surgieron ante la necesidad de resolver situaciones prácticas relacionadas con la vida diaria, la economía, la construcción, la astronomía, la física.

En los diferentes niveles de la escolaridad siendo alumnos debemos o debimos enfrentarnos con una gran diversidad de campos numéricos.

La complejidad de cada conjunto se relaciona con la evolución psicológica y el nivel del pensamiento lógico – matemático de los estudiantes. Sin embargo, desde la experiencia personal, una gran cantidad de los jóvenes en la actualidad, no tienen un buen manejo de los campos numéricos más sencillos y sus propiedades. Esto sin duda, constituye un obstáculo que impide avanzar con los contenidos curriculares y será un aspecto a tener en cuenta para analizar en el trabajo a desarrollar.

El presente trabajo propone realizar un recorrido histórico que nos permita valorar cada campo numérico y la importancia de relacionar la historia de la matemática con los contenidos que se trabajan en la educación secundaria de nuestro país.

FUNDAMENTACIÓN:

Los números fueron desde la antigüedad el fundamento de la religión y la filosofía. En los comienzos de casi todas las ciencias, los números se situaban en el conocimiento de lo oculto: la astrología, la astronomía, la alquimia, la química.

Cada conjunto numérico surgió en el momento preciso y ante la urgencia de cubrir alguna necesidad de la época. La evolución en la aparición de los diversos conjuntos de números llevó cientos de años. Sin embargo, los tiempos que tienen los alumnos son muy acotados; este factor sin duda influye en la calidad y en el aprendizaje de los estudiantes.

El objetivo del presente trabajo es conocer las causas que provocaron el surgimiento de cada campo numérico y el rol de la historia de la matemática vinculado a la educación secundaria.

SUPUESTOS Y LIMITACIONES:

Es imprescindible acotar el material obtenido, ya que la amplitud es considerable, por lo cual es necesario realizar una adecuada selección del mismo.

Resulta de un cierto grado de complejidad, la obtención de material bibliográfico que relacione el tema a tratar con el nivel educativo correspondiente.

ANÁLISIS DE LOS DATOS:

La matemática es una ciencia que ha cumplido más de dos mil años. Si bien es una disciplina que en la actualidad se encuentra estructurada y organizada, este proceso llevó mucho tiempo.

En el pasado la matemática fue considerada una ciencia relacionada directamente a las cantidades, en relación con las magnitudes (desde la geometría); a los números (desde la aritmética) o a la generalización de los dos (desde el álgebra).

Las primeras nociones de número y la acción de contar datan de la prehistoria. La causa que originó el desarrollo de este conocimiento en el hombre primitivo fue su necesidad de proteger sus bienes, la adaptación a los ciclos que la madre naturaleza le imponía le aseguraban su alimentación. El hombre prehistórico plasmó los primeros indicios matemáticos en sus vasijas (dibujos geométricos) y sus primeros sistemas de cálculos se basaron en el uso de los dedos de las manos o la utilización del cuerpo, este método resulta evidente al ver que muchos de los sistemas de numeración son de base 5 o 10.

LOS NÚMEROS NATURALES

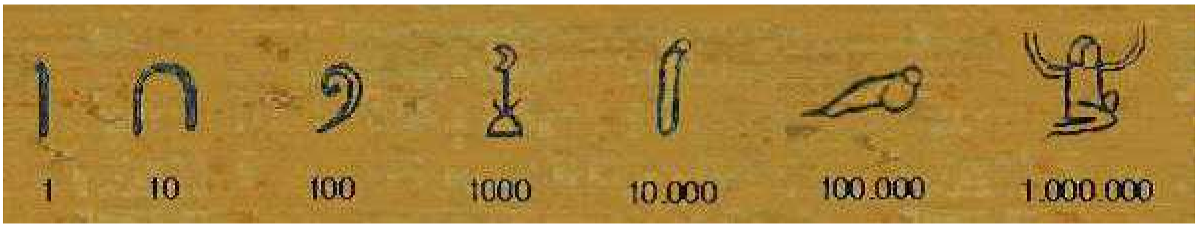
El hombre primitivo, al comienzo, solamente necesitó algunos cuantos números, los cuales simbolizó mediante marcas en huesos o madera

Hueso encontrado en China

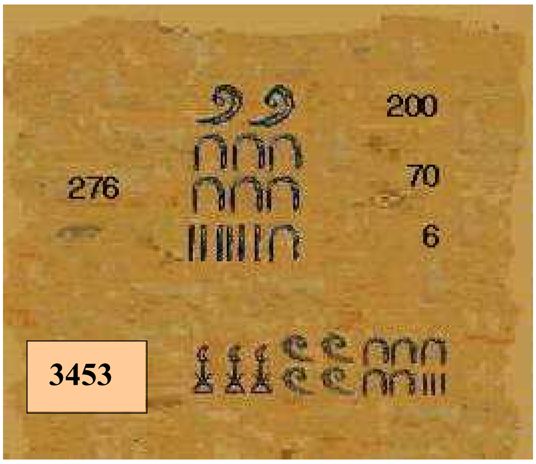
Esta representación, presenta una marca por cada elemento, pero sólo sirve para cantidades pequeñas. A medida que la humanidad avanzó se hizo imperiosa la necesidad de mejorar la representación de los números.

La agrupación fue una de las formas utilizadas para representar los números, en la cual un símbolo representa un grupo de números. Los egipcios agrupaban de 10 en 10.

Desde el tercer milenio A.C. los egipcios usaron un sistema describir los números en base diez utilizando los jeroglíficos de la figura para representar los distintos ordenes de unidades.



Se usaban tantos de cada uno cómo fuera necesario y se podían escribir indistintamente de izquierda a derecha, al revés o de arriba abajo, cambiando la orientación de las figuras según el caso.



Al ser indiferente el orden se escribían a veces según criterios estéticos, y solían ir acompañados de los jeroglíficos correspondientes al tipo de objeto (animales, prisioneros, vasijas etc.) cuyo número indicaban. En la figura aparece el 276 tal y como figura en una estela en Karnak.

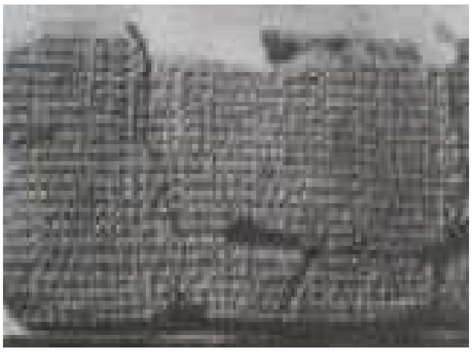
Estos signos fueron utilizados hasta la incorporación de Egipto al imperio romano. Pero su uso quedó reservado a las inscripciones monumentales, en el uso diario fue sustituido por la escritura hierática y demótica, formas más simples que permitían mayor rapidez y comodidad a los escribas.

Un sistema numérico similar al egipcio fue el conocido **sistema romano**, cuyas características son:

- Emplea los símbolos I=1, V=5, L=50, C=100, D=500, M=1000.
- Los símbolos I, X, C y M se pueden repetir 3 veces en un número pero los símbolos V, L y D solo una vez.

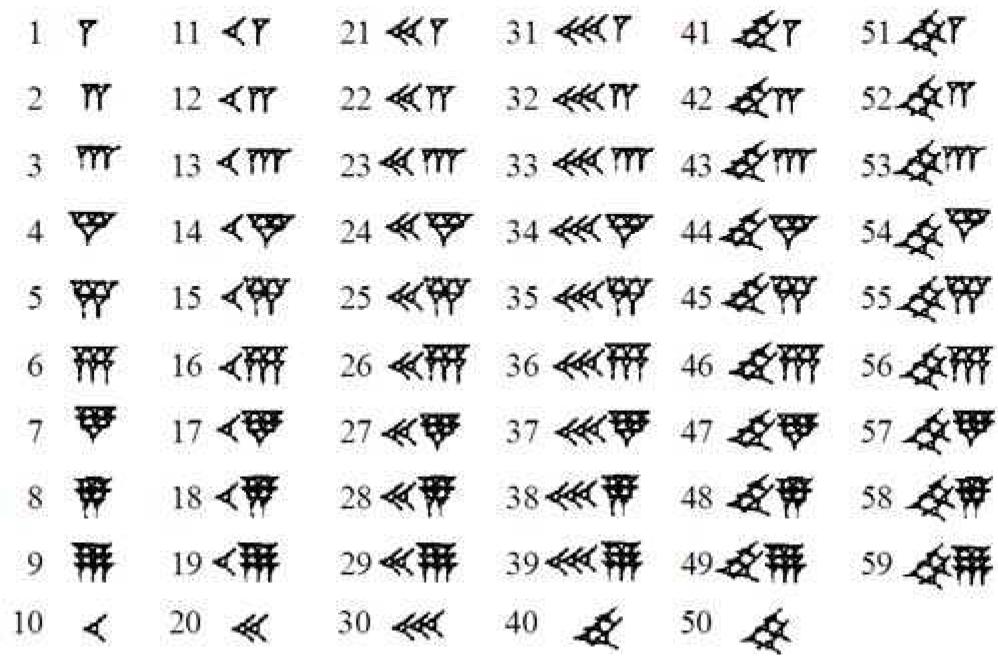
Los sistemas de numeración egipcios y romanos no resultaban apropiados para números como: 1999, 123422, ni para los cálculos aritméticos. Se necesitaban otros símbolos.

En los pueblos de la antigua Babilonia utilizaban un sistema de dos cuñas, una que apuntaba hacia abajo y otra cuña que apuntaba hacia la izquierda



Piedra que muestra las cuñas utilizadas por los Babilonios

Sistema de numeración babilónico:



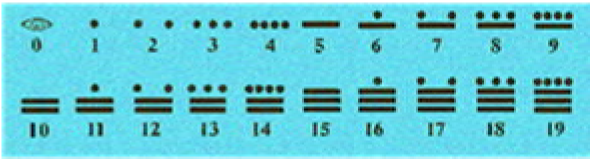
La forma de estructurar los números era muy parecida a la de los egipcios. Sin embargo, a partir del 60, se utilizaba un principio (como en nuestro sistema decimal); es decir, un mismo símbolo podía tener un valor distinto dependiendo de la posición que ocupe. En el sistema babilónico, un dígito en cada posición representaba 60 veces su valor en la posición anterior (por eso se llama sistema sexagesimal).

Una desventaja de este sistema era no contar con un símbolo para el cero. Estro podía traer ciertas confusiones.

El sistema numérico maya: fue uno de los primeros en utilizar al mismo tiempo el principio posicional y el cero.

En este sistema 1 kin (sol) representa un día, 20 kines forman un huinal. Como 20 huinales representan 400 días, lo cual es mucho mayor que la duración exacta del año (este sistema fue utilizado para cálculos astronómicos), los mayas llamaron tun a 18 huinales, o 360 días. Excepto por este nivel, el resto del sistema es vigesimal.

Para representar un numero se utilizan tres símbolos: el punto (.), una barra (--) y el cero, donde cada línea representa 5 puntos. Algunos números mayas son:

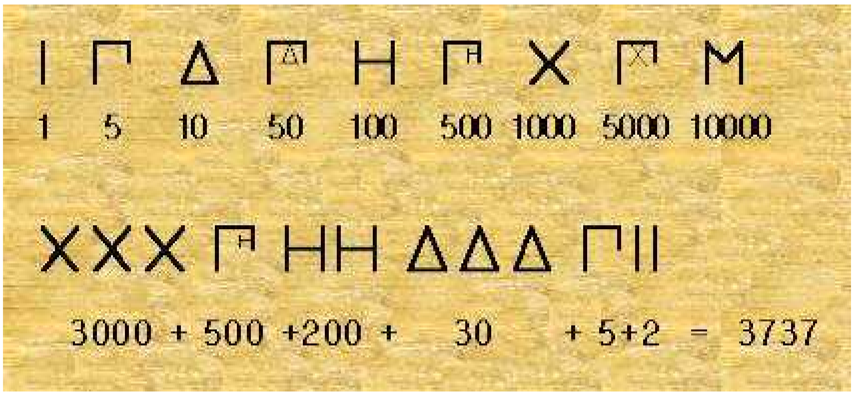


Sistema de Numeración Maya

A partir del número 20, se usa un principio posicional, escribiendo los números en forma vertical, de este modo en el primer nivel se escriben las unidades (kines), la siguiente posición hacia arriba representan las veintenas (huinales), el tercer nivel los grupos de 20 x 20 y el cuarto nivel los grupos de 20 x 20 x 20.

Sistema de Numeración Griego

El primer sistema de numeración griego se desarrolló hacia el 600 A.C. Era un sistema de base decimal que usaba los símbolos de la figura siguiente para representar esas cantidades. Se utilizaban tantas de ellas como fuera necesario según el principio de las numeraciones aditivas.



Para representar la unidad y los números hasta el 4 se usaban trazos verticales. Para el 5, 10 y 100 las letras correspondientes a la inicial de la palabra cinco (pente), diez (deka) y mil (khiloi). Por este motivo se llama a este sistema acrofónico.

Los símbolos de 50, 500 y 5000 se obtienen añadiendo el signo de 10, 100 y 1000 al de 5, usando un principio multiplicativo. Progresivamente este sistema ático fue reemplazado por el jónico, que empleaba las 24 letras del alfabeto griego junto con algunos otros símbolos según la tabla siguiente

1	α	10	ι	100	ρ
2	β	20	κ	200	σ
3	γ	30	λ	300	τ
4	δ	40	μ	400	υ
5	ε	50	ν	500	φ
6	ϛ	60	ξ	600	χ
7	ζ	70	ο	700	ψ
8	η	80	π	800	ω
9	θ	90	ϟ	900	ϡ

Los números parecen palabras, porque están compuestos por letras, y las palabras tienen un valor numérico.

Sistema de numeración decimal:

No se tiene conocimiento con exactitud cómo surgió, pero se sabe que fue un sistema de numeración mejorado por los hindúes y los árabes lo llevaron a Europa.

De esta forma a las cifras se las llamó árabes debido a su origen, de la misma manera que escribirlas de derecha a izquierda (unidad, decena, centena, etc.)

Hacia el año 976 Gerberto Aurillac (futuro Papa) conoce las primeras cifras en España, que ya estaba influenciada por la cultura musulmana, pero su influencia fue limitada.

En el siglo XII se conoce las primeras traducciones al latín de las obras de un matemático árabe al- Jwarizmi, de quien se conocen los términos algoritmo y guarismo; de esta forma las cifras árabes comienzan a introducirse en el círculo culto europeo.

En el año 1202, Fibonacci publica el "Libro del ábaco" que acopia y amplía las cifras y los procedimientos de cálculo utilizados por los árabes.

Durante este siglo se consolidó la aritmética decimal sobre todo en los concerniente a las actividades comerciales. Sin embargo el método árabe y sus ventajas para calcular debieron sortear varios inconvenientes por parte de los calculistas de la época que ante la amenaza de un nuevo método mucho más sencillo, que atentaba supuestamente a su fuente de trabajo, recurrieron a estrategias bajas como hacer correr el rumor que el sistema de cálculo árabe tan sencillo, debía tener algo de magia o un cierto poder demoníaco. Esta acusación fue astutamente utilizada en la época de la Inquisición. Recién a fines del siglo XVI con Montaigne comenzó a abrirse paso nuevamente el sistema de numeración árabe y finalmente se generalizó con la Revolución Francesa. A partir de dicho momento histórico se comenzó a utilizar al 10 como base del sistema métrico decimal.

En la actualidad, el sistema decimal es el más utilizado, aunque en ámbitos como la informática se usan otros sistemas (binario, hexadecimal)

LOS NÚMEROS NEGATIVOS

En la antigüedad estos números eran conocidos como números deudos o absurdos. Las primeras expresiones utilizadas datan del siglo V, en Oriente, donde se operaba con números positivos y negativos, utilizando ábacos, tablillas o bolitas de diferentes colores.

En la China, diferenciaban los números enteros negativos de los positivos, escribiéndolos en color rojo y a los positivos en color negro (no utilizaban el signo -)

En la India utilizaban la regla de los signos para operar.

Hacia el siglo XVI llegan a Europa y es Leonard Euler quien le otorga un sustento matemático a este conjunto numérico, a través de su publicación

“Anteitung Zur Algebra” en 1770. En este escrito trata de demostrar la operatoria entre números negativos y positivos y la regla de los signos.

Los números negativos complementan o extienden el conjunto de los números naturales. Ante la imposibilidad de realizar la resta y la división, por ejemplo 7 – 9 = -2, que no es un número natural, por lo tanto no cumple con la ley de cierre de los naturales, se generó un nuevo conjunto, los números negativos. Los números naturales y los negativos formarán el conjunto de los **números enteros**.

Históricamente sus primeras aplicaciones fueron en balances contables, que indicaban las cantidades que poseían o las cantidades adeudadas. El nombre de números enteros se debe a que sean positivos o negativos, siempre representaban cantidades indivisibles.

LOS NÚMEROS RACIONALES

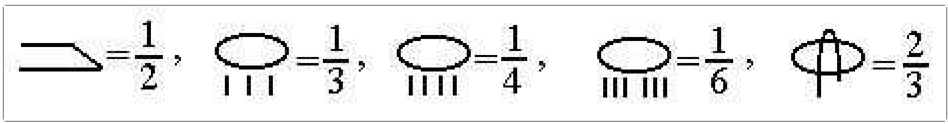
Los números racionales surgieron de la necesidad de resolver ciertas divisiones que no eran posibles de solucionar dentro del conjunto de los enteros. Por ejemplo 3: 5, no tiene sentido en el conjunto de los números enteros. Por lo tanto se debe crear un nuevo sistema numérico, en donde resulten válidas estas operaciones. El nuevo conjunto numérico es el de los números racionales, simbolizado por la letra **Q**

Según documentos históricos, la civilización egipcia consideraba a las fracciones unitarias.

En el Papiro de Ahmes adquirido por Henry Rhind en 1858, cuya antigüedad data del año 2000 al 1800 a.C. se encuentran escritos   87 problemas y su resolución. Los temas que trata son situaciones aritméticas, fracciones, cálculo de área y volumen, progresiones, repartos proporcionales, ecuaciones lineales y trigonometría.

Papiro de Ahmes

Los egipcios sólo consideraban las fracciones unitarias. Es decir aquellas cuyo numerador es el 1 y las representaban con un signo oval encima del número, utilizaban tablas de descomposición para otras fracciones. Por ejemplo: 2/5 = 1/3 + 1/15 ó 2/7 = ¼ + 1/28. Se desconoce por qué no utilizaban 2/n = 1/n+1, pero al parecer intentaban usar fracciones menores que 1/n. Su notación era la siguiente:



El sistema utilizado era sumativo (1+ ½ +1/4), las multiplicaciones y divisiones se realizaban por duplicaciones y mediciones por ejemplo: 69 x 19 = 69 x (16 +2+1), el 16 representa 4 duplicaciones y el 2 una duplicación.

<u>Problemas 1 a 6</u> [4]

Los problemas 1 a 6 se refieren a repartos de 1, 2, 6, 7, 8 y 9 hogazas de pan entre 10 hombres, aplicando descomposiciones en fracciones unitarias y 2/3. En ellos el escriba da el resultado y se limita a comprobar que la solución es la correcta. Nos llama la atención la forma en la que Ahmes comprueba el resultado para el caso de n=1, el **problema 1**. Esta es la resolución:

Cada hombre recibe 1/10 de hogaza
Multiplica 1/10 por 10
hazlo de esta forma

1----------1/10
2----------1/5
4----------1/3 1/15
8----------2/3 1/10 1/30

En efecto siguiendo el método de multiplicación hace 8 + 2 = 10 ----> 1/5 + 2/3 + 1/10 + 1/30 = 1 luego la solución es correcta, pues 10 * 1/10 = 1.

Vemos que Ahmes parece complicarse un poco la vida con este tipo de demostraciones y la multiplicación por 10, pero debemos tener en cuenta que los egipcios no manejaban los conceptos aritméticos tal y como podemos hacerlo ahora que nuestra instrucción es superior. Efectivamente, aunque nos parezca una comprobación innecesaria, es lo que se enseñaba a los niños de hace 4000 años.

Problema 3. Repartir 6 barras de pan entre 10 hombres.

Aquí Ahmes da como resultado 1/2 + 1/10 y así lo escribió:

[4] http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

1 -------> 1/ 1/10
*2 -------> 1 1/5
4 -------> 2 1/3 1/15
*8 -------> 4 2/3 1/10 1/30

10 --------> 6 luego el resultado es correcto.

Problema 6. Repartir 9 barras de pan entre 10 hombres.

En este caso Ahmes sólo da la solución al problema, afirmando que el resultado es 2/3 + 1/5 + 1/30 y verificando que al multiplicar el resultado anterior por 10 se obtiene 9.

En otros de los problemas del papiro, se tratan situaciones de sustracción de fracciones, ecuaciones lineales con una incógnita, por ejemplo: una cantidad y 1/7 de la misma da un total de 19, repartos proporcionales, etc.

Algunas otras de las situaciones problemáticas encontradas en el papiro que están relacionadas con los números racionales son:

Problemas 7 a 20

Son problemas referidos a multiplicaciones de números expresados mediante fracciones unitarias. Damos aquí los problemas 9 y 14, con multiplicación directa y empleo de los números rojos.

Problema 9: Multiplica 1/2 + 1/14 por 1+1/2+1/4

Reproducimos este problema porque en él aparece aplicada la **propiedad distributiva** del producto respecto de la suma. El escriba multiplica 1/2 + 1/14 por cada uno de los multiplicandos y luego suma los resultados.

1----------- 1/2 + 1/14
1/2---------1/4 + 1/28
1/4---------1/8 + 1/56

1 1/2 1/4 ---- 1/2 1/4 1/8 1/14 1/28 1/56

y suma los resultados parciales obteniendo como producto 1. El método empleado es sumar primero 1/14 1/28 1/56 (= 1/8). La suma queda reducida ahora a 1/2 1/4 1/8 1/8 y después realiza sumas equivalentes para poder aplicar el método de reducción

1/ 1/4 1/8 1/8 = 1/2 1/4 1/4 = 1/2 1/2 = 1

Problema 14: Debe multiplicarse 1/28 por (1 + 1/2 + 1/4). En este problema el escriba hace uso de los números rojos, explicados anteriormente. El inicio de la solución emplea el mismo método anterior

1----------1/28
1/2-------1/56
1/4-------1/128

y ahora en lugar de proceder como en el caso anterior selecciona el "número rojo" 28, de forma que al aplicarlo a las fracciones de la derecha pueda obtener fracciones sencillas. El razonamiento es el siguiente:

1/28 partes de 28 es 1
1/56 partes de 28 es 1/2
1/128 partes de 28 es 1/4

y ahora debemos determinar cuantas partes de 28 son iguales a 1 + 1/2 + 1/4, es decir hemos de buscar un número tal que al multiplicarlo por 1 + 1/2 + 1/4 nos de 28. Ahora nos encontramos con una solución bastante sencilla, en otros casos no es tan obvia. El razonamiento es:

1 ------------- 1 + 1/2 + 1/4
2 ------------- 3 + 1/2
4 ------------- 7
8 -------------14
16 ----------- 28

Luego el número buscado en este caso es el 16. Esto significa que la solución del problema es 16.

¿El alumno, e incluso el escriba comprendían lo que estaban haciendo, o se limitaban a aplicar lo que les habían enseñado, cambiando los números según las necesidades? Es difícil responder, pero quizás el "profesor" pudiese ver más allá, y comprender el procedimiento, pero si fuese así lógicamente el método de la multiplicación lo debía tener totalmente asumido y en ese caso deberían haber encontrado una forma más sencilla de resolver este tipo de problemas.

Problema 13. Multiplica 1/16 + 1/112 por 1 + 1/2 + 1/4

En este problema se da el resultado 1/8.

Problema 21

Los problemas 21, 22 y 23 son de sustracciones de fracciones y los 3 se resuelven mediante el uso de los números rojos.

Problema 21: Averigua la cantidad que falta a 2/3 + 1/15 para obtener la unidad.

Ahmes toma como número rojo el 15 (buscando la simplificación) y aplica:

2/3 de 15 = 10

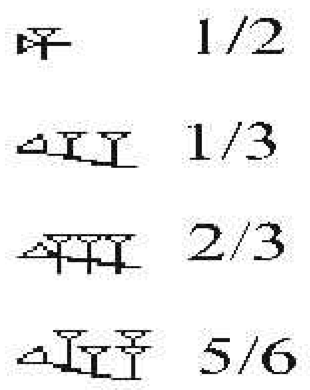
1/15 de 15 = 1

Entonces ahora tenemos que 2/3 de 15 + 1/15 de 15 es 11. Como 15, el número rojo, supera a 10 en 4 unidades, hemos de calcular el número de partes de 15 que da un total de 4, es decir 4/15. Como 4 (el dividendo) = 3 + 1 --> 4/15 = **1/5 + 1/15** [5]

1	15
1/10	1 ½
1/5	3
1/15	1

[5] http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

Otra civilización que estudió números racionales fue la **babilónica**. Los datos encontrados fueron en tablillas provenientes de la dinastía Hammurabi que datan de una antigüedad del año 1800 – 1600 a.C. Allí se pueden apreciar el sistema posicional utilizado, que se extienden a las fracciones. Realizaban las operaciones de forma parecida a hoy, la división multiplicando por el inverso (para lo que utilizan sus tablas de inversos). En la tabla de inversos faltan los de 7 y 11 que tienen una expresión sexagesimal infinitamente larga. Sí están 1/59=;1,1,1 (nuestro 1/9=0,111...) y 1/61=;0,59,0,59 (nuestro 1/11=0,0909...) pero no percibieron el desarrollo periódico.



Fracciones cuneiformes.

Sumar y restar era un proceso de poner o quitar símbolos.

La multiplicación se hacía más o menos como se hace hoy; de hecho, dividir era multiplicar por el inverso. Usaban tablas para obtener los inversos.

El sistema babilónico era muy eficiente para resolver situaciones con fracciones. Si bien las fracciones más comunes ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6 se representaban con un número simple (1/2=<<<, 1/3=<<, 1/5=<11, etc.), ya que éstas fracciones son números exactos de sexagésimos (sesenta es el número más pequeño que se divide exactamente por 2, 3,4, 5,6. Por supuesto que al igual que en nuestro sistema había fracciones que obligaban a recurrir a un segundo número sexagesimal tal es el caso de 1/8 que es igual siete y medio sexagésimos, de modo que se escribiría con un siete seguido de un treinta, por siete sexagésimos más treinta sexagésimos de un sexagésimo. En este sistema hay fracciones que como en el nuestro representan un verdadero problema.

En el oriente, precisamente en la China e India también tenían ciertos conocimientos sobre las fracciones ordinarias. Realizaban el cálculo del mínimo común denominador de varias fracciones.

En Grecia a las fracciones no se las consideraba como entidades únicas, sino como la razón o relación entre dos números enteros. Herón de Alejandría, conocido por la fórmula que lleva su nombre del área del triángulo, aprendió mucho de la matemática babilónica. Las fracciones sexagesimales se utilizaron en herramientas básicas para la astronomía y la física. En la época helenística tardía, se utilizaban las fracciones ordinarias. Al principio colocaban al numerador debajo del denominador y sin barra de separación. Parece que Herón utilizó el método práctico de las fracciones unitarias de esta manera dividir 25 por 13 = 1 + ½ + 1/3 +1 /13 +1/78. Después de la época de Herón, la antigua adición egipcia de fracciones unitarias, se extendió y perduró por aproximadamente mil años en todo el continente europeo.

Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, introdujo en el siglo XIII en Europa, la barra horizontal para separar el numerador del denominador.

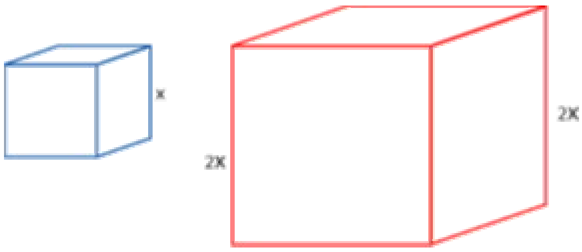
A comienzos del siglo XV, un árabe, Al Kashi, sistematizó el uso de los números decimales que utilizamos en la actualidad.

Un siglo más tarde, Simon Stevin, desarrolló las fracciones decimales que se expresaban a través de números decimales (décimas, centésimas, milésimas, etc.), pero utilizaba una forma de escritura complicada. El número 456,765 los escribía 456 (0) 7 (1) 6 (2) 5 (3).

A comienzos de siglo XVII, los números decimales se comenzaron a escribir utilizando punto o coma, separando la parte entera de la decimal. En 1792 los números decimales fueron utilizados por casi todos los países al propagarse el Sistema Métrico Decimal.

LOS NUMEROS IRRACIONALES

En el siglo V a. C, una epidemia castigó a la ciudad griega de Atenas, donde falleció aproximadamente un cuarto de la población. Ante tan devastadora situación, una delegación fue enviada a la ciudad de Delfos para preguntarle a su dios Apolo cómo podrían combatir la peste que había caído sobre su ciudad. Según cuenta la leyenda, la respuesta obtenida fue que los atenienses debían duplicar el volumen del altar de Apolo, que tenía forma de cubo. Los atenienses duplicaron los lados del altar, pero la epidemia se tornó más feroz ¿por qué? ¿qué habría ocurrido?



Al duplicar la arista del cubo, lo que hicieron los atenienses no fue duplicar el volumen del cubo, sino multiplicarlo por 8. Después de muchas discusiones llegaron a la siguiente conclusión: para que un cubo de "x" arista se logre duplicar su volumen, se debía construir un cubo de arista igual a "x" multiplicada por un número que no era entero y que tampoco podía expresarse como una proporción ente dos enteros.

Si retomamos el curso histórico, a quien se le atribuye el descubrimiento de los números irracionales es a un discípulo de Pitágoras, Hipaso de Metaponto. Él demostró que la raíz de 2 corresponde a un número irracional, sin embargo para Pitágoras la raíz de 2 era un número sucio, fuera de toda perfección y que por tal motivo no debía existir. De esta manera se trató de mantener a éstos números “raros” en secreto y a su descubridor lo expulsaron de la Escuela Pitagórica.

Los números irracionales pasaron un tiempo en las sombras hasta su utilización por parte de Eudoxo de Cnido discípulo de Platón. También el décimo libro de la serie de Euclides trata sobre los irracionales.

El origen de éstos números fue por el uso de cálculos geométricos relacionados con el número áureo o número de oro, que resultaba del cociente entre la diagonal de un pentágono regular y el lado del mismo, que era igual a la razón entre el segmento mayor y el menor segmento AB, dividido por un punto interior al mismo llamado C, cumpliendo que AC/CB = AB/AC (proporción áurea)

Ejemplo numérico:

¨[...] Llamemos a = AC y b= CB, con lo que la expresión anterior se transforma en: a/b = (a + b)/a, con lo que si llamamos x al número áureo, tendremos x =1 + 1/x, llegando así, a la ecuación de segundo grado: x^2 - x -1 = 0, cuyas soluciones son (1 + sqr(5))/2 y (1 - sqr(5))/2, donde sqr(5) simboliza la raíz cuadrada de cinco. Descartando la negativa, obtenemos así el buscado número de oro.

Pero sqr(5), no se podía expresar como cociente de dos enteros, pues, si así fuese, tendríamos que sqr(5) = a/b, donde a y b son primos entre si (simplificando si es necesario). Por lo tanto 5 = a^2 / b^2, o bien a^2 = 5 b^2, es decir a^2 es múltiplo de cinco, y por lo tanto a también debe de serlo (a^2 = a . a). Sea, entonces a = 5 k, con lo que $(5\ k)^2$ = 5 b^2, es decir 5 k^2 = b^2, llegando a que también b es múltiplo de cinco, en contradicción con el hecho de que a y b eran primos entre si. Por lo tanto sqr(5), no es un número racional y en consecuencia el número de oro tampoco. A tal número, le llamaron **irracional**, por no ajustarse a los esquemas que, hasta entonces, tenían de los números.”[...][6]

Otro problema que se relacionó con su introducción, fue el cálculo de la diagonal de un cuadrado de lado uno, que por el teorema de Pitágoras conduce al número raíz cuadrada de 2, que por un camino análogo al utilizado anteriormente tampoco se llega a un número racional.

[6] platea.pntic.mec.es/~bgarcia/racional.htm - 7k

Al asociar a todo segmento orientado de la recta con origen a un punto fijo de la misma, y con respecto a un segmento tomado como unidad, un número único (su longitud) y recíprocamente, resultó ser otro caso que justificó la introducción de los irracionales.

Los razonamientos utilizados por los griegos fueron realizados a través de métodos geométricos y no de manera analítica.

Aproximadamente dos mil años más tarde se aclara más la noción de los números irracionales. En el siglo XV con el matemático francés Nicolás Chuquet y en el siglo XIX con las teorías de Dedekind y Cantor.

Los números irracionales son aquellos que no pueden expresarse como un número racional y su expresión decimal es infinita. Cuando se menciona a los irracionales, no se puede dejar de mencionar a los irracionales más famosos: Pi π y Fi φ.

Pi encierra la razón entre la longitud de la circunferencia y la longitud de su diámetro. Las primeras aproximaciones a este número las realizaron los egipcios, que utilizaban fracciones de números naturales (1650 a.C).

La siguiente tabla muestra la búsqueda realizada por científicos a lo largo de la historia sobre las aproximaciones al valor de Pi

Tabla de aproximación a Pi [5]

Año	**Matemático o documento**	**Cultura**	**Aproximación**	**Error** (en partes por millón)
~1650 adC	Papiro de Ahmes	Egipcia	$2^8/3^4 \sim 3{,}1605$	6016 ppm
~1600 adC	Tablilla de Susa	Babilónica	3 1/8 = 3,125	5282 ppm
~950 adC	La Biblia (Reyes I, 7,23)	Judía	3	45070 ppm
~500	Bandhayana	India	3,09	16422

adC				ppm
~250 adC	Arquímedes de Siracusa	Griega	entre 3 10/71 y 3 1/7 empleó 211875/67441 ~ 3,14163	<402 ppm 13,45 ppm
~200	Claudio Ptolomeo	Greco-egipcia	377/120 = 3,141666...	23,56 ppm
263	Liu Hui	China	3,14159	0,84 ppm
263	Wang Fan	China	157/50 = 3,14	507 ppm
~300	Chang Hon	China	$10^{1/2}$ ~ 3,1623	6584 ppm
~500	Zu Chongzhi	China	entre 3,1415926 y 3,1415929 empleó 355/113 ~ 3,1415929	<0,078 ppm 0,085 ppm
~500	Aryabhata	India	3,1416	2,34 ppm
~600	Brahmagupta	India	$10^{1/2}$ ~ 3,1623	6584 ppm
~800	al-Jwarizmi	Persa	3,1416	2,34 ppm
1220	Fibonacci	Italiana	3,141818	72,73 ppm
1400	Madhava	India	3,14159265359	0,085 ppm
1424	Al-Kashi	Persa	2π = 6,2831853071795865	0,1 ppm

En un versículo de la Biblia se hace referencia al número Pi
"Hizo una fuente de metal fundido que medía 10 codos de diámetro: era completamente redonda, y su altura era de 5 codos y una línea de 30 codos lo rodeaba" (I Reyes 7,23)

También se puede encontrar una aproximación en II Crónicas 4,2, allí en la lista de requerimientos para la construcción del Templo de Salomón, erigido en el año 950 a.C de un valor de Pi = 3,0

[5] es.wikipedia.org/wiki/Número_π

Los egipcios empleaban el número pi en el ya mencionado papiro de Ahmes /Rhind se utiliza el valor de pi al mencionar que el área de un círculo es semejante al de un cuadrado cuyo lado es igual al diámetro del círculo disminuido en 1/9, es decir igual a 8/9 del diámetro

Veamos el siguiente cálculo:[6]

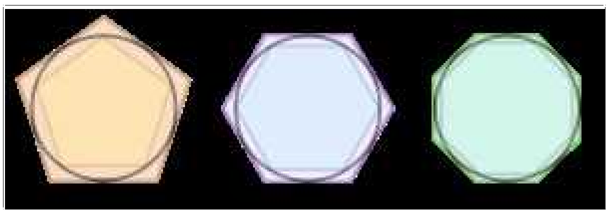
$$S = \pi r^2 \simeq \left(\frac{8}{9} \cdot d\right)^2 = \frac{64}{81} d^2 = \frac{64}{81}\left(4r^2\right)$$

$$\pi \simeq \frac{256}{81} = 3{,}16049\ldots$$

En sólo dos documentos egipcios encontrados se hallaron evidencias de la utilización del número Pi.

En la Mesopotamia utilizaban valores de pi iguales a tres, para el cálculo de segmentos.

En el siglo III a.C.,en Grecia, Arquímedes, mejoró aún más las aproximaciones con pocos decimales. Él fue de capaz de determinar el valor de Pi entre 3 10/71 (valor mínimo) y 3 1/7 (valor máximo)



Método de Arquímedes para encontrar dos cotas que se aproximen al número π.

El método utilizado por Arquímedes consistía en circunscribir e inscribir polígonos regulares en circunferencias y calculaba el perímetro de dichos polígonos. Comenzó su estudio con hexágonos y así fue duplicando el número de lados hasta llegar a polígonos de 96 lados.

En el siglo II Ptolomeo, se aproxima con un número fraccionario

$$\pi \simeq \frac{377}{120} = 3{,}1416\ldots$$

[6] es.wikipedia.org/wiki/Número_π

En la cultura oriental, el matemático chino Liu Hui fue el primero en sugerir la aproximación de Pi= 3,14 como una buena aproximación (utilizando el polígono de 96 lados), más tarde realizó una mejor aproximación llegando aun valor de π = 3.14159 al usar un polígono de 3072 lados.

En el siglo V Zu Chongzhi, astrónomo y matemático chino, llegó a dos aproximaciones racionales de Pi : 22/7 y 355/113. Estas aproximaciones fueron muy conocidas por su muy buen nivel de aproximación y recién fueron superadas en el siglo XV. Durante este período el matemático persa Ghivath al-Kashi, utilizando una base sexagesimal, llegó a calcular nueve dígitos, equivalentes a dieciséis dígitos decimales

2π = 6,2831853071795865.

Durante la época del renacimiento, en el siglo XII, el empleo de cifras arábigas agilizó mucho el cálculo de Pi. Muchos matemáticos utilizaron como base el método utilizado por Arquímedes como Leonardo de Pisano y en el siglo XVII Vieta, que llegaron a trabajar con polígonos de 393.216 lados, logrando así una muy buena precisión en el valor de Pi= 3,141592653

Otros reconocidos matemáticos trabajaron con series tal es el caso del inglés John Wallis (1655), que desarrolló el Producto de Wallis y en 1682, Leibniz realizó la serie más compleja que lleva su nombre:

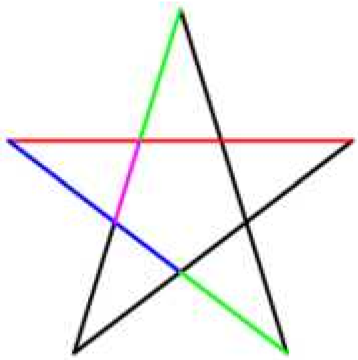
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4}$$

En 1737, Leonard Euler utiliza el símbolo que se utiliza en la actualidad. En los años posteriores los matemáticos continuaron hallando más dígitos de pi y fueron mejorando su aproximación. En 1947 Ferguson calculó 808 decimales utilizando una calculadora mecánica.

Desde la utilización del primer ordenador hasta la avanzada tecnología con la que hoy se trabaja se ha logrado obtener en el año 2004, un total de 1,3511 billones de cifras decimales.

No menos protagonista, resulta ser el **número áureo o fi (φ)** que es el resultado de la división de un segmento en media extrema y razón denominada “razón áurea”. El estudio de esta proporción acaparó la atención desde los sumerios con los pentágonos regulares y pentáculos en las tablas sumerias alrededor del año 3200 a.C. Posteriormente en Grecia, donde se utilizó en la arquitectura y en el arte, aunque ellos no le asignaban un nombre en especial más que el de “la sección”.

El nombre de Fi fue realizado por el matemático Mark Barr en 1900.



Pentáculo

[...]”Gráficamente el número áureo es la relación entre el lado del pentágono regular y la recta que une dos vértices no consecutivos de éste. Si se toma como unidad un lado del pentágono interior, cualquier línea que marca los brazos de la estrella mide Φ. También la longitud total de cualquiera de las cinco líneas que atraviesan la estrella mide Φ^3, mientras que la suma del lado interior y cualquiera de sus brazos es Φ^2.

Teniendo en cuenta la gran simetría de este símbolo se observa que dentro del pentágono interior es posible dibujar una nueva estrella, con una recursividad hasta el infinito. Del mismo modo, es posible dibujar un pentágono por el exterior, que sería a su vez el pentágono interior de una estrella más grande.

Al medir la longitud total de una de las cinco líneas del pentáculo interior, resulta igual a la longitud de cualquiera de los brazos de la estrella mayor,
o sea Φ.[...] [7]

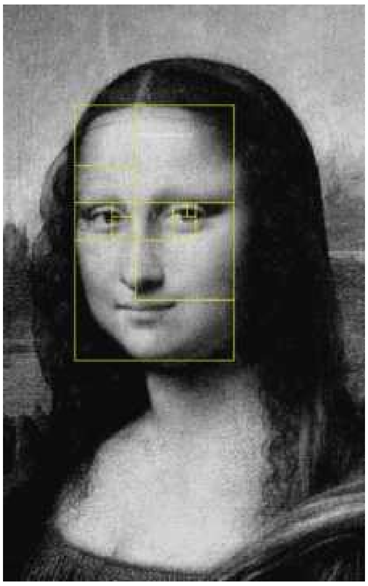
[7] es.wikipedia.org/wiki/Número_áureo -

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033988\,749\,894\,848\,204\,586\,834..$$

La relación entre la altura y la anchura de la fachada del Partenón de Atenas es igual al número áureo.

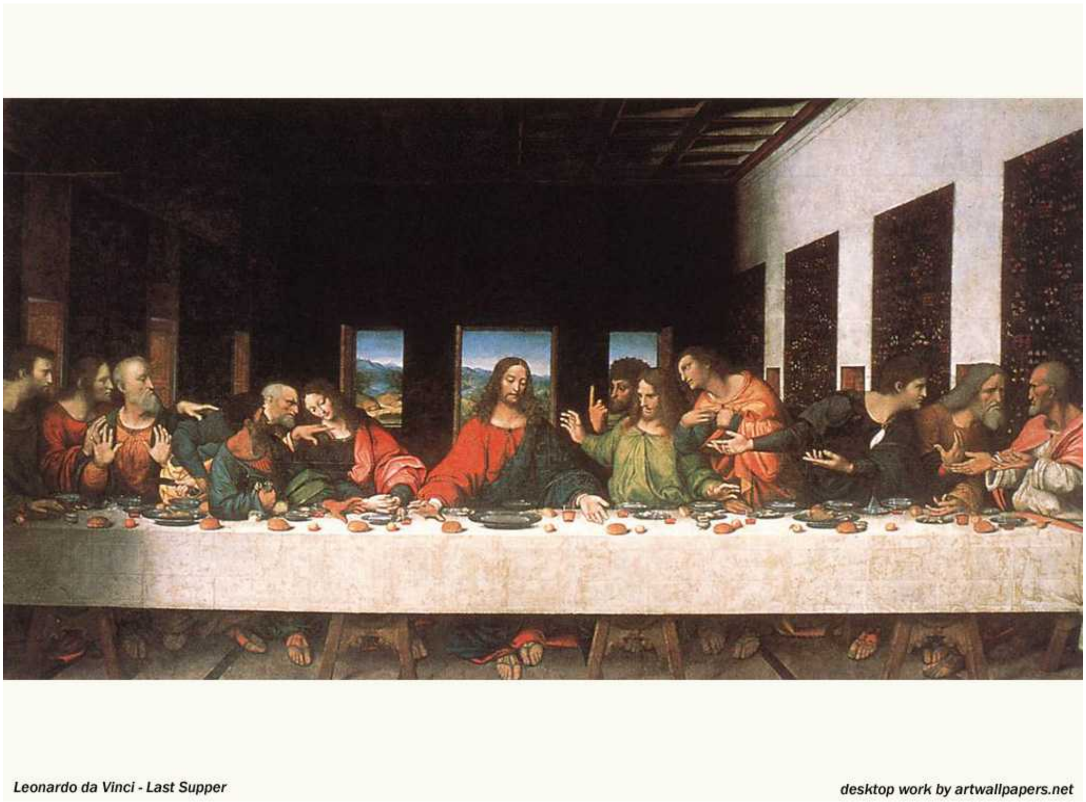
Las proporciones áureas han sido utilizadas por artistas de todas las épocas, tanto en arquitectura como en pintura, escultura o fotografía.

En la época del renacimiento, la razón áurea fue utilizada por la armonía y perfección que guardaba entre los lados del rectángulo. El célebre Leonardo Da Vinci la utilizó en sus más reconocidas obras como la Mona Lisa, en su pintura de “La última cena” se guarda una proporción entre la distribución de los discípulos y de Jesús, como de las proporciones de las paredes y ventanas que se observan en el fondo.



En el rostro de la Gioconda (Mona Lisa) se pueden observar la proporción utilizando rectángulos áureos.

La última cena de Leonardo Da Vinci



Sin duda, los números irracionales han sido y son un conjunto numérico que atrapó y sigue cautivando la atención de los investigadores matemáticos.

De la unión de los racionales y de los irracionales resulta el conjunto de los **números reales**, denotado de la siguiente manera, conjunto R.

NÚMEROS COMPLEJOS

El siguiente conjunto numérico a tratar es el de los números complejos, denominado conjunto C.

Los números complejos resultan de las raíces cuadradas de números negativos. Si bien los griegos resultan ser el primer referente como Herón de Alejandría (Siglo I a.C.) al obtenerse como resultado de una sección cónica, en el año 275 Diophantus que intentó calcular los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 12 y área 7 y planteó la ecuación $336 X^2 + 24 = 172 X$ cuyas raíces son complejas. Sin embargo los hindúes son los que comienzan a tratar de explicar el tema. Alrededor de del año 850, un matemático hindú, Mahavira, escribió sobre los números negativo:" Como en la naturaleza de las cosas una cantidad negativa no es un cuadrado, por tanto no puede tener raíz cuadrada"[8]

En 1150, Bhaskara, realiza la siguiente descripción acerca de los números complejos: " El cuadrado de un positivo o negativo, es positivo; la raíz cuadrada de un número positivo tiene dos valores, uno positivo y otro negativo; no existe raíz cuadrada de un número negativo ya que un número negativo no es un cuadrado"[9]

[8] "Breve historia de los Números Complejos". Curso de Análisis Matemático VI. Año 2006/2007.
[9] "Breve historia de los Números Complejos". Curso de Análisis Matemático VI. Año 2006/2007.

Las primeras investigaciones fueron realizadas en el siglo XVI por el matemático, filósofo y físico italiano, Jeromé Cardan. En 1545 realiza una publicación "El gran arte", en la cual realiza una descripción sobre la resolución de ecuaciones cuadráticas de grado tres y cuatro. Habían pasado tres mil años desde el trabajo realizado por los Babilónicos sobre la resolución de ecuaciones cuadráticas.

J. Cardan (1501 - 1576)

Un problema planteado por Cardan fue el siguiente: *Si alguien te pide dividir 10 en partes cuyo producto sea...40, es evidente que esta cuestión es imposible. No obstante nosotros lo resolvemos de la siguiente manera*:

Cardan aplicaba un logaritmo al sistema de ecuaciones $x + y = 10$,

$xy = 40$ y daba como soluciones: $5 + \sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$, utilizando la multiplicación, llegaba al resultado de 40. También llega a raíces negativas cuando tiene la ecuación cúbica: $x^3 = ax + b$

En la ecuación $x^3 = 15x + 4$ obtiene como solución

$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ y él consideró como válida.

Treinta años después, un ingeniero hidráulico, Rafael Bombelli, interesado en la obra de Cardan, realizó el siguiente planteo: que como

$-2 + \sqrt{-121}$ y $-2 - \sqrt{-121}$ sólo se diferencian en un signo, lo mismo debería ocurrir con las raíces cúbicas y lo expresaba de la siguiente manera:

$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$ y $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$

Obteniendo por cálculo directo: a= 2 y b= 1, luego

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = (2+\sqrt{-1}) + (2+\sqrt{-1}) = 4$$

De esta forma Bombelli le dio un sentido a las expresiones realizadas por Cardan. Bombelli desarrolló un cálculo de las operaciones con números complejos que se ajusta a las utilizadas en la actualidad. Sin embargo el trabajo de Bombelli fue ignorado y se lo consideró incierto y misterioso.

Durante más de doscientos años estos números misteriosos, de cuya validez matemática se dudaba atrapó la atención de muchos matemáticos.


René Descartes (1596-1650)

En el siglo XVII, René Descartes, los llama números imaginarios e indicó que una ecuación debía tener una cantidad de raíces como lo indica su grado y que números no reales también podían serlo.

Gottfried von Leibniz utilizó los números complejos en la resolución de integrales como el siguiente caso:

$$\frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{(x+ai)(x-ai)}\,dx = \frac{-1}{2ai}\left(\frac{1}{x+ai} - \frac{1}{x-ai}\right)dx = -\frac{1}{2ai}(\log(x+ai) - \log(xai))$$

La existencia de logaritmos negativos y complejos provocó un enfrentamiento entre Leibniz y Bernoulli, pero fue el primero, quien dictaminó que log i = 0; el argumento utilizado fue que como 2 log (-1) = log 1 =0 entonces 2logi=log i^2 =log (-1) = 0, por otra parte su oponente, proponía que el log i = iπ/2.

Leonard Euler (1707-1783)

Leonard Euler pone fin a esta disputa con la utilización de $e^{\pi i} = -1$

Euler fue el primero en utilizar la expresión i= -1, además de relacionar la función exponencial con las trigonométricas a través de: e^{ix} = cos x + i sen x

Leonard Euler tenía la siguiente concepción acerca de los números complejos:

[...] “Como todos los números imaginables son mayores, menores o iguales a cero, entonces es claro que la raíz cuadrada de un número negativo no puede ser uno de estos números, [...] y esta circunstancia nos lleva al concepto de tales números, que por su naturaleza son imposibles y ordinariamente son llamados imaginarios o números falsos, porque sólo existen en la imaginación.”[...] [10]

Hacia finales del siglo XVIII, el tema de los números complejos fue muy turbulento para la matemática, convirtiéndose el tema en discusión de índole filosófica. Un importante matemático como Carl Gauss consideraba: [...] “ La verdad metafísica de i= □-1 es elusiva" [...][11]

[10] “Breve historia de los Números Complejos”. Curso de Análisis Matemático VI. Año 2006/2007.
[11] “Breve historia de los Números Complejos”. Curso de Análisis Matemático VI. Año 2006/2007.

En el área pedagógica (siglo XIX), en especial en las grandes universidades, la enseñanza de los números complejos resultó ser un tema de incertidumbre sobre todo en cómo funcionaba la lógica en la operatoria de los mismos y en las muchas dudas que existían y no encontraban respuestas.

La representación geométrica como puntos de un plano, ocurrió en los trabajos de Caspar Wessel en 1797.

En1833, el inglés, William Hamilton elabora la primera definición con rigor matemático de los números complejos como los pares de los números reales.

Agoustin Cauchy realiza una definición de complejos como tipos de congruencias de polinomios reales, usando como base los trabajos de Gauss.

En la segunda mitad del siglo XIX los complejos fueron utilizados en diferentes áreas de la materia:

[...] "a) ALGEBRA. La solución de ecuaciones algebraicas motivó la introducción de los números complejos.
Estos complejos constituyen por su parte un cuerpo cerrado donde muchos problemas de álgebra lineal y otras áreas del álgebra abstracta encontraron solución.
b) ANALISIS. El siglo XIX fue testigo del desarrollo de una poderosísima y bellísima rama de las matemáticas, "La teoría de funciones complejas". Uno de los elementos más sorprendentes es que la condición de diferenciable implica la de infinitamente diferenciable, hecho sin análogo en las funciones reales.
c) GEOMETRIA. Los números complejos introdujeron generalidad y propiedades de simetría en varias ramas de la geometría, tanto en la euclídea como la no euclídea.
d) TEORIA DE NUMEROS. Ciertas ecuaciones diofánticas pueden ser resueltas con el uso de complejos. Hadamard decía que: "El camino más corto entre dos verdades en el campo real pasa a través del campo complejo"[12]

[12] "Breve historia de los Números Complejos". Curso de Análisis Matemático VI. Año 2006/2007.

El producto de la suma de cuadrados es una suma de cuadrados y lo comprobó de la siguiente manera:

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di)$

$= [(a + bi)(c + di)][(a - bi)(c - di)]$

$= (u + iv)(u - iv)$

$= u^2 + v^2$ ”[...][13]

El conjunto de los números complejos encierra al conjunto de los reales.

Hemos recorrido un largo camino hasta llegar a conformar todos los conjuntos numéricos que utilizamos en la actualidad. El siguiente esquema muestra cómo quedan conformados los conjuntos numéricos unos con otros:

- Números Complejos
  - Racionales
    - Enteros
      - Naturales
      - Negativos
    - Fraccionarios
      - Positivos
      - Negativos
  - Irracionales
    - Positivos
    - Negativos

La importancia de la Historia de la Matemática en la escuela:

Luego de haber realizado un vasto recorrido sobre la historia de los diversos conjuntos numéricos que hoy se utilizan en diferentes sectores de la vida y en el ámbito escolar, hemos podido apreciar que su evolución llevó miles de años y que gracias a la transmisión de generación en generación, a la práctica, a la fusión de diferentes culturas sobre los conocimientos de la materia, hemos logrado avances extraordinarios, que nos apuntalan para continuar superándonos en un camino que no tiene fin.

---

[13] “Breve historia de los Números Complejos”. Curso de Análisis Matemático VI. Año 2006/2007

El conocimiento histórico de esta ciencia nos permite conocer con detalles cómo se vinculan las deferentes actividades sociales con la misma y nos ayuda a comprender cuáles son sus alcances y potencialidades.

En historia de la matemática podemos reconocer que los conceptos fundamentales y más trascendentes, han surgido después de acaloradas discusiones con marcadas concepciones ideológicas diferentes.

En la enseñanza escolar, los docentes, deberían tener un cierto conocimiento sobre la historia de la disciplina que enseñan, no para enseñar estrictamente la historia en sí misma, sino con el fin de provocar un acercamiento entre el objeto de estudio y sus alumnos; las razones más distinguidas de su desarrollo y beneficiar a los estudiantes en la compresión de la disciplina.

La historia de la matemática brinda a los profesores las herramientas para reconocer, y en consecuencia aplicar en su trabajo áulico, que la matemática en su desarrollo a través de los tiempos, ha acumulado hechos, que sostienen que los conceptos, propiedades y demostraciones provienen de situaciones vinculadas con la práctica, relacionadas con mundos reales, que existieron y que han evolucionado, hasta llegar a ser la civilización que hoy conocemos.

La formación de teorías completas y conceptos se encuentran estrechamente relacionados con la historia de la matemática y el mundo actual y se vinculan con causas propias del mundo en el que vivimos, es decir que no son ajenas a él como muchas veces parece, especialmente en el ámbito escolar donde gran parte de los contenidos llegan a los alumnos como islas sin tener en cuenta su vinculación con la vida real.

La mayoría de la teorías, cálculos no pueden separase de su origen histórico, tal es el caso de la teoría de los logaritmos con el “calculador de arena” de Arquímedes. Los métodos aritméticos que se intentaron llevar a formas más simples durante la época feudal y que por consiguiente obligó a los estudiosos a volver a los documentos originales de los antiguos griegos. El contacto con estas obras da cuenta que todo el potencial utilizado por estos sabios matemáticos siempre estuvo basado en la atención a las situaciones de interés del pueblo, a las necesidades prácticas que la propia sociedad les planteaba. La matemática se constituyó en una verdadera fuerza dirigida hacia el cambio social que involucraba artesanos, constructores, banqueros, ingenieros, prestamistas, artilleros, lanceros, empresarios, que fueron valorando las formulaciones de la ciencia a los problemas prácticos por resolver. Así se sistematizó la trigonometría, se mejoraron los métodos de cálculo y los métodos analíticos.

El conocimiento histórico puede ser la motivación sobre muchos de los conocimientos que se enseñan en la educación secundaria básica. Un ejemplo a tener en cuenta podría ser en relación con la aritmética y geometría griega, los segmentos inconmensurables, que desataron una de las crisis más importantes de la época y que dieron sustento a los números irracionales.

El análisis de este período de la matemática, ofrece a los estudiantes una gran riqueza sobre el surgimiento de los procesos, su metodología, constituyéndose en elementos fundamentales en el trabajo de variables, en el dominio de los conjuntos numéricos (irracionales), proporcionalidad y la resolución de ecuaciones lineales.

El conocimiento de la historia de esta ciencia, es un aspecto más a tener en cuenta para favorecer la comprensión de las problemáticas pedagógicas del área, en relación a la metodología de enseñanza con el fin de lograr mejorar y dirigirnos hacia el logro de fines educacionales más eficientes.

Los métodos implementados por el profesor, el dominio de la materia y sus múltiples vinculaciones, se tornan más simples si se tienen en cuenta los elementos más relevantes de la historia de la matemática, que entrelazados favorecen el proceso de enseñanza- aprendizaje en la educación secundaria.

CONCLUSIONES

- ♣ La introducción de los diferentes conjuntos numéricos no ha sido de manera secuencial.
- ♣ Nuestro actual sistema decimal fue elaborado por los hindúes entre los siglos V- XV
- ♣ El conocimiento de los números por parte del los matemáticos griegos no fue superado hasta veinticuatro siglos más tarde.
- ♣ Los matemáticos G. Cantor, R. Dedekind, K. Weiertrass y B. Bolzano fueron los que culminaron la obra, que duro medio siglo de investigaciones, sobre los números naturales, enteros, racionales e irracionales, que considerados juntos, constituyeron lo que se denominó el sistema de los números reales.
- ♣ El conjunto de los números complejos encierra al conjunto de los reales.
- ♣ El profesor de matemática debe tener un conocimiento elemental de la historia de la asignatura, de sus problemas filosóficos, que le permita mostrar que esta ciencia es producto de un proceso humano.
- ♣ La historia de la matemática y el mundo actual permiten un trabajo con perspectiva científica en la presentación de las teorías y conceptos matemáticos.
- ♣ La historia de la matemática desde su lugar debe ofrecerle al alumno un espacio que le permita descubrir la evolución de los contenidos teniendo en cuenta el desarrollo socio – cultural del hombre.
- ♣ La relación de los contenidos del programa de la educación secundaria con los procesos históricos tienen por objetivo favorecer los procesos de asimilación y aprendizaje y se evidencian en la apropiada utilización de los principios didácticos de la enseñanza de la matemática.

BIBLIOGRAFÍA:

- www.rena.edu.ve/TerceraEtapa/Matematica/TEMA18/**Numeros**Irracionales.html - 67k
- http://soko.com.ar/historia/Historia_matem.htm
- http://www.xenciclopedia.com/post/Matematicas/Historia-de-los-numeros-naturales-(matematicas).html
- http://www.sectormatematica.cl/historia.htm
  http://www.cimat.mx/ad_documentos/otronumero.pdf
- http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero#Historia
- http://www.comenius.usach.cl/webmat2/conceptos/encontexto/numeros_racionales_contexto.htm
- http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm
- http://www.unabvirtual.edu.co/related/atees/colombia/documentos/atees_juan/nacional_mat/Racionales/concepto.html
- es.wikipedia.org/wiki/Número_irracional
- platea.pntic.mec.es/~bgarcia/racional.htm -
- www.upaya.es/?p=87 -
- roble.cnice.mecd.es/~tvirgos/matematicas/**irracionales**.htm
- es.wikipedia.org/wiki/Número_áureo –
- www.portalplanetasedna.com.ar/**numero_pi**.htm
- es.wikipedia.org/wiki/Número_π
- webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/Libros/**complejos**.pdf
- centros5.pntic.mec.es/.../sabias/**historia**%20%20**numeros**%20**irracionales**/**historia**%20**numeros**%20**irracionales**.htm -

ANEXOS

NUMEROS RACIONALES

A-1. EL PAPIRO RHIND

En 1858 el egiptólogo escocés A. Henry Rhind visitó Egipto por motivos de salud (padecía tuberculosis) y compró en Luxor el papiro que actualmente se conoce como papiro Rhind o de Ahmes, encontrado en las ruinas de un antiguo edificio de Tebas. Rhind murió 5 años después de la compra y el papiro fue a parar al Museo Británico. Desgraciadamente en esa época gran parte del papiro se había perdido, aunque 50 años después se encontraron muchos fragmentos en los almacenes de la Sociedad histórica de Nueva York. Actualmente se encuentra en el Museo Británico de Londres. Comienza con la frase "Cálculo exacto para entrar en conocimiento de todas las cosas existentes y de todos los oscuros secretos y misterios"

El papiro mide unos 6 metros de largo y 33 cm de ancho. Representa la mejor fuente de información sobre matemática egipcia que se conoce. Escrito en hierático, consta de 87 problemas y su resolución. Nos da información sobre cuestiones aritméticas básicas, fracciones, cálculo de áreas, volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, reglas de tres, ecuaciones lineales y trigonometría básica. Fue escrito por el escriba Ahmes aproximadamente en el año 1650 a.C a partir de escritos de 200 años de antigüedad, según reivindica el propio Ahmes al principio del texto, aunque nos resulta imposible saber qué partes corresponden a estos textos anteriores y cuáles no.

Se conoce muy poco sobre el objetivo del papiro. Se ha indicado que podría ser un documento con claras intenciones pedagógicas, o un cuaderno de notas de un alumno. Para nosotros representa una guía de las matemáticas del Antiguo Egipto, pues es el mejor texto escrito en el que se revelan los conocimientos matemáticos. En el papiro aparecen algunos errores, importantes en algunos casos, que pueden deberse al hecho de haber sido copiados de textos anteriores. Aunque en la resolución de los problemas aparecen métodos de cálculo basados en prueba y error, sin formulación y muchas veces tomados de las propias experiencias de los escribas, representa una fuente de información valiosísima.

En cuanto al autor, poco se conoce de él. Por su escritura parece que Ahmes no era un simple escriba, pero se desconocen los detalles de su educación.

A continuación doy la resolución de algunos de los problemas del papiro, tal y como aparecen en el original.

El contenido del papiro Rhind, publicado por Richard J. Gillins en "Mathematics in the Time of the Pharaohs" es el siguiente:

Problemas	**Descripción**
1 - 6	Reparto de 1,2,6,7,8 y 9 barras entre 10 hombres
7 - 20	Multiplicación de fracciones
21 - 23	Sustracción
24 - 29	Búsqueda de números (28 y 29) y ecuaciones resueltas por "regula falsi" (24 a 27)
30 - 34	Ecuaciones lineales más complicadas resueltas mediante divisiones.
35 - 38	Ecuaciones lineales más complicadas resueltas mediante la regla de la falsa posición
39 - 40	Progresiones aritméticas
41 - 46	Volúmenes
47	Tabla de fracciones de 1 hekat en fracciones ojo de Horus
48 - 55	Áreas de triángulos, rectángulos, trapecios y círculos
56 - 60	Pendientes, alturas y bases de pirámides
60 - 61B	Tabla de una regla para encontrar 2/3 de impares y fracciones unitarias
62	Peso de metales preciosos
63	Repartos proporcionales
64	Progresión aritmética
65	División proporcional de granos en grupos de hombres
69 - 78	Intercambios, proporción inversa, cálculos de "pesu"
79	Progresión geométrica
80 - 81	Tablas de fracciones ojo de Horus de grano en términos de hinu
82 - 84	Problemas, no claros, sobre cantidades de comida de gansos, pájaros y bueyes
85	Escritura enigmática. En el papiro aparece al revés.

86 - 87	Memorando de ciertas cuentas e incidentes, gran parte perdida.

Antes de proponer el primer problema Ahmes da una tabla de descomposición de n/10 para n = 1,...,9, para facilitar los cálculos de los siguientes problemas y otra en la que se expresan todas las fracciones de numerador 2 y denominador impar entre 5 y 101 como suma de fracciones unitarias. Estas tablas son las siguientes:

Tabla 2/n

5	3,15	53	30,318,795
7	4,28	55	30,330
9	6,18	57	38,114
11	6,66	59	36,236,531
13	8,52,104	61	40,244,488,610
15	10,30	63	42,126
17	12,51,68	65	39,195
19	12,76,114	67	40,335,536
21	14,42	69	46,138
23	12,276	71	40,568,710
25	15,75	73	60,219,292,365
27	18,54	75	50,150
29	24,58,174,232	77	44,308
31	20,124,155	79	60,237,316,790
33	22,66	81	54,162
3	30,42	8	60,332,415,49

5		3	8
37	24,111,296	85	51,255
39	26,78	87	58,174
41	24,246,328	89	60,356,534,890
43	42,86,129,301	91	70,130
45	30,90	93	62,186
47	30,141,470	95	60,380,570
49	28,196	97	56,679,776
51	34,102	99	66,198
		101	101,202,303,606

Tabla 1/10

1/10	1/10
2/10	1/5
3/10	1/5 + 1/10
4/10	1/3 + 1/15
5/10	1/2
6/10	1/2 + 1/10
7/10	2/3 + 1/30
8/1	2/3 + 1/10 +

0	1/30
9/10	2/3 + 1/5 + 1/30

Problemas 1 a 6

Los problemas 1 a 6 se refieren a repartos de 1, 2, 6, 7, 8 y 9 hogazas de pan entre 10 hombres, aplicando descomposiciones en fracciones unitarias y 2/3. En ellos el escriba da el resultado y se limita a comprobar que la solución es la correcta. Nos llama la atención la forma en la que Ahmes comprueba el resultado para el caso de n=1, el **problema 1**. Esta es la resolución:

Cada hombre recibe 1/10 de hogaza
Multiplica 1/10 por 10
hazlo de esta forma

1----------1/10
2----------1/5
4----------1/3 1/15
8----------2/3 1/10 1/30

En efecto siguiendo el método de multiplicación hace 8 + 2 = 10 ----> 1/5 + 2/3 + 1/10 + 1/30 = 1 luego la solución es correcta, pues 10 * 1/10 = 1.

Vemos que Ahmes parece complicarse un poco la vida con este tipo de demostraciones y la multiplicación por 10, pero debemos tener en cuenta que los egipcios no manejaban los conceptos aritméticos tal y como podemos hacerlo ahora que nuestra instrucción es superior. Efectivamente, aunque nos parezca una comprobación innecesaria, es lo que se enseñaba a los niños de hace 4000 años.

Problema 3. Repartir 6 barras de pan entre 10 hombres.

Aquí Ahmes da como resultado 1/2 + 1/10 y así lo escribió:

1 -------> 1/ 1/10
*2 -------> 1 1/5
4 -------> 2 1/3 1/15
*8 -------> 4 2/3 1/10 1/30

10 --------> 6 luego el resultado es correcto.

Problema 6. Repartir 9 barras de pan entre 10 hombres.

En este caso Ahmes sólo da la solución al problema, afirmando que el resultado es 2/3 + 1/5 + 1/30 y verificando que al multiplicar el resultado anterior por 10 se obtiene 9.

Problemas 7 a 20

Son problemas referidos a multiplicaciones de números expresados mediante fracciones unitarias. Damos aquí los problemas 9 y 14, con multiplicación directa y empleo de los números rojos.

Problema 9: Multiplica 1/2 + 1/14 por 1+1/2+1/4

Reproducimos este problema porque en él aparece aplicada la **propiedad distributiva** del producto respecto de la suma. El escriba multiplica 1/2 + 1/14 por cada uno de los multiplicandos y luego suma los resultados.

1----------- 1/2 + 1/14
1/2---------1/4 + 1/28
1/4---------1/8 + 1/56

1 1/2 1/4 ---- 1/2 1/4 1/8 1/14 1/28 1/56

y suma los resultados parciales obteniendo como producto 1. El método empleado es sumar primero 1/14 1/28 1/56 (= 1/8). La suma queda reducida ahora a 1/2 1/4 1/8 1/8 y después realiza sumas equivalentes para poder aplicar el método de reducción

1/ 1/4 1/8 1/8 = 1/2 1/4 1/4 = 1/2 1/2 = 1

Problema 14: Debe multiplicarse 1/28 por (1 + 1/2 + 1/4). En este problema el escriba hace uso de los números rojos, explicados anteriormente. El inicio de la solución emplea el mismo método anterior

1----------1/28
1/2-------1/56
1/4-------1/128

y ahora en lugar de proceder como en el caso anterior selecciona el "número rojo" 28, de forma que al aplicarlo a las fracciones de la derecha pueda obtener fracciones sencillas. El razonamiento es el siguiente:

1/28 partes de 28 es 1
1/56 partes de 28 es 1/2
1/128 partes de 28 es 1/4

y ahora debemos determinar cuantas partes de 28 son iguales a 1 + 1/2 + 1/4, es decir hemos de buscar un número tal que al multiplicarlo por 1 + 1/2 + 1/4 nos de 28. Ahora nos encontramos con una solución bastante sencilla, en otros casos no es tan obvia. El razonamiento es:

1 ------------- 1 + 1/2 + 1/4
2 ------------- 3 + 1/2
4 ------------- 7
8 -------------14
16 ----------- 28

Luego el número buscado en este caso es el 16. Esto significa que la solución del problema es 16.

¿El alumno, e incluso el escriba comprendían lo que estaban haciendo, o se limitaban a aplicar lo que les habían enseñado, cambiando los números según las necesidades? Es difícil responder, pero quizás el "profesor" pudiese ver más allá, y comprender el procedimiento, pero si fuese así lógicamente el método de la multiplicación lo debía tener totalmente asumido y en ese caso deberían haber encontrado una forma más sencilla de resolver este tipo de problemas.

Problema 13. Multiplica 1/16 + 1/112 por 1 + 1/2 + 1/4

En este problema se da el resultado 1/8.

Problemas 21 a 23

Los problemas 21, 22 y 23 son de sustracciones de fracciones y los 3 se resuelven mediante el uso de los números rojos.

Problema 21: Averigua la cantidad que falta a 2/3 + 1/15 para obtener la unidad.

Ahmes toma como número rojo el 15 (buscando la simplificación) y aplica:

2/3 de 15 = 10

1/15 de 15 = 1

Entonces ahora tenemos que 2/3 de 15 + 1/15 de 15 es 11. Como 15, el número rojo, supera a 10 en 4 unidades, hemos de calcular el número de partes de 15 que da un total de 4, es decir 4/15.

1	15
1/10	1 1/2

1/5	3
1/15	1

como 4 (el dividendo) = 3 + 1 --> 4/15 = **1/5 + 1/15**

Problema 22. Averigua la cantidad que falta a 2/3 + 1/30 para obtener 1

En este caso se toma como número rojo el 30. Según "la teoría de los números rojos" se aplica el razonamiento: 2/3 + 1/30 de 30 es 21. Como 30 supera a 21 en 9 unidades debemos determinar el número de partes de 30 que dan un total de 9, es decir debemos dividir 9 entre 30. Siguiendo el procedimiento habitual para la división obtenemos:

1	30
1/10	3
1/5	6

entonces 6+3 = 9 -> 9/30 = **1/10 + 1/5** que es la solución buscada.

La solución no siempre es tan sencilla, y en ocasiones las operaciones se complican bastante.

Problema 23. Completa 1/4 + 1/8 + 1/10 + 1/30 + 1/45 hasta 2/3

En este caso Ahmes selecciona el 45 como número rojo, y aplica la misma teoría anterior.

1/4 de 45 es 11 + 1/4
1/8 de 45 es 5 + 1/2 + 1/8
1/10 de 45 es 4 + 1/2
1/30 de 45 es 1 + 1/2
1/45 de 45 es 1
2/3 de 45 es 30

Sumando ahora las cantidades correspondientes al enunciado obtenemos 1/4 + 1/8 + 1/10 + 1/30 + 1/45 = 23 + 1/2 + 1/4 + 1/8, es decir faltan 6 + 1/8 para llegar a 30 (el valor correspondiente a 2/3 con el número rojo 45). Ahora hemos de averiguar cuantas partes de 45 son 6 + 1/8, o lo que es lo mismo dividir 6 + 1/8 entre 45.

1	45
1/10	4 1/2
1/20	2 1/4
1/40	1 1/8
1/9	5

5 + 1 + 1/8 = 6 + 1/8 que es la cantidad buscada -> la solución es **1/9 + 1/40**

A pesar de que aquí he puesto los cálculos directos, tal y como aparecen en el original, no debe pensarse que el escriba llegaba a estas conclusiones tan fácilmente, y posiblemente necesitase gran cantidad de operaciones intermedias que no aparecen reproducidas en el papiro.

<u>Problemas 24 a 29</u>

Se refieren a ecuaciones lineales de una incógnita. El método empleado para la resolución es el "regula falsi", o regla de la falsa posición. El sistema consiste en calcular el valor buscado a partir de uno estimado previamente.

Problema 24. Una cantidad y 1/7 de la misma da un total de 19. ¿Cuál es la cantidad?

El problema se limita a resolver la ecuación $x + x/7 = 19$

Ahmes parte en este caso de un valor estimado de 7 y calcula $7 + 7/7 = 8$. Entonces ahora para averiguar el valor real hay que encontrar un número N tal que al multiplicarlo por el resultado de aplicar el valor estimado nos de 19, es decir hay que dividir 19/8. El valor buscado entonces será 7*N

1	8
2	16
1/2	4
1/4	2
1/8	1

16 + 2 + 1 = 19 ---> 19/8 = 2 + 1/4 + 1/8. Este es el valor a multiplicar por 7 para obtener la x buscada.

1	2+1/4+1/8
2	4+1/2+1/4
4	9+1/2

Entonces el valor buscado es 2 + 1/4 + 1/8 + 4 + 1/2 + 1/4 + 9 + 1/2 = **16 + 1/2 + 1/8**

Problema 26. Una cantidad y su cuarto se convierten en 15, y se pide calcular la cantidad.

Para nosotros este problema se traduce en resolver la ecuación $x + 1/4x = 15$. Reproducimos los pasos del papiro, y más abajo la explicación de cada uno de ellos. Ahmes escribe:

1.- "Toma el 4 y entonces se obtiene 1/4 de él en 1, en total 5"

Ahmes parte en este caso de un valor estimado de x=4, el más sencillo para anular la fracción, y calcula 4+ 1/4 *4 = 5.

2.- "Divide entre 5 15 y obtienes 3"

Ahora para averiguar el valor real hay que encontrar un número N tal que al multiplicarlo por el resultado de aplicar el valor estimado nos de 15, es decir 5*N = 15, N=15/5 = 3

3.- "Multiplica 3 por 4 obteniendo 12"

El valor buscado es el resultado de multiplicar la N anterior por el valor estimado inicial, esto es 3 * 4 que es la cantidad buscada.

Ahmes sigue después: "cuyo (referido al 12 anterior) 1/4 es 3, en total 15"

Problemas 30 a 34

Se refieren a ecuaciones lineales más complicadas, resueltas mediante divisiones.

Problema 31. Literalmente dice: "Una cantidad, sus 2/3, su 1/2, su 1/7, su totalidad asciende a 33"

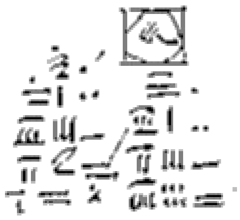
Para nosotros esto significa una ecuación 2x/3 + x/2 + x/7 + x = 33, x=cantidad

Ahmes resuelve el problema mediante complicadas operaciones de división.

<u>Problemas 48 a 55</u>

Estos 8 problemas se refieren al cálculo de áreas de triángulos, rectángulos, trapecios y círculos. Reproducimos el 51 y el 52 correspondientes a áreas de triángulos y los problemas 48 y 50 por ser unos de los más importantes del papiro, ya que es en estos en los que calcula el área del círculo.

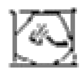
Problema 48. Comparar el área de un círculo con la del cuadrado circunscrito.



Este problema tiene gran importancia por 2 razones. Por una parte representa el primer intento de una geometría basada en la utilización de figuras sencillas, cuyo área se conoce, para obtener el área de figuras más complicadas, y por otra parte puede ser la fuente del cálculo del área del círculo con un valor de π = 3.1605 que aparece en el problema 50.

La resolución es la siguiente:

El escriba considera un diámetro igual a 9 y calcula el área del círculo como la de un cuadrado de lado 8 (como hace en el problema 50). Obtiene así un valor de 64 setat.

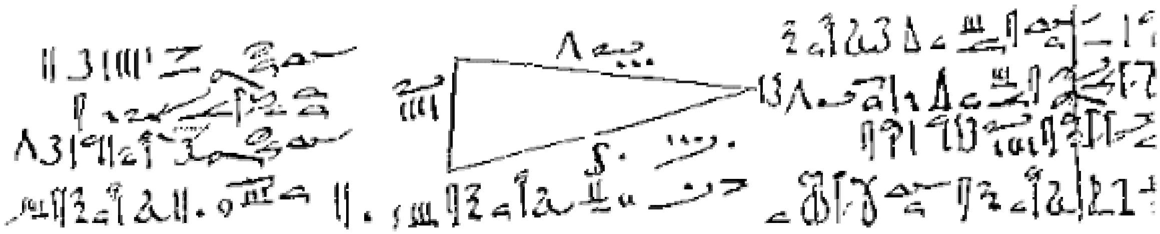
Según se ve en la figura del problema, en el cuadrado de 9 jet de lado  se dividen los lados en tres partes iguales formando luego un octógono. Ahmes elimina los triángulos formados en los vértices del cuadrado. El área del octógono es $A = 9^2 - 4 * (3*3) / 2 = 63$. Quizá Ahmes pensó que el área del círculo circunscrito era algo mayor que la del octógono representado.

Problema 50. Calcular el área de un campo circular cuyo diámetro es 9 jet.

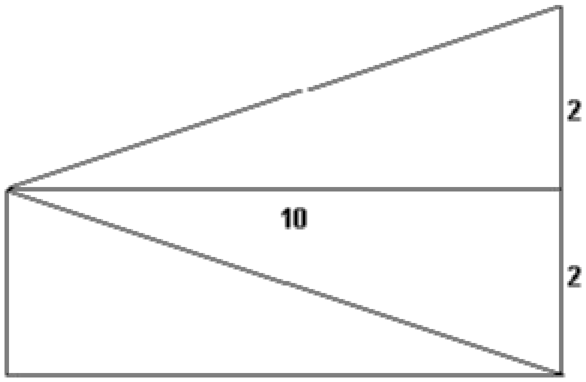
Aquí Ahmes se limita a calcular el área del círculo considerándolo igual a la de un cuadrado de lado 9. Dice: "resta al diámetro 1/9 del mismo, que es 1. La diferencia es 8. Ahora multiplica 8 veces 8, que da 64. Este es el área del círculo"

El escriba está empleando la siguiente fórmula $A = (d-1/9d)^2$. Si comparamos esta fórmula con la real. $A = (\pi * d^2)/4$ se obtiene un valor para π = 256/81 = 3.1605 o como aparece en muchos sitios $4*(8/9)^2$. No se sabe como Ahmes llega a esta aproximación, y se ha considerado que quizás sea la resolución del problema 48 la que le lleva a estas conclusiones. Este mismo valor $4*(8/9)^2$ es empleado posteriormente para resolver un problema en el que se pide hallar el volumen de un cilindro de diámetro 9 y altura 6.

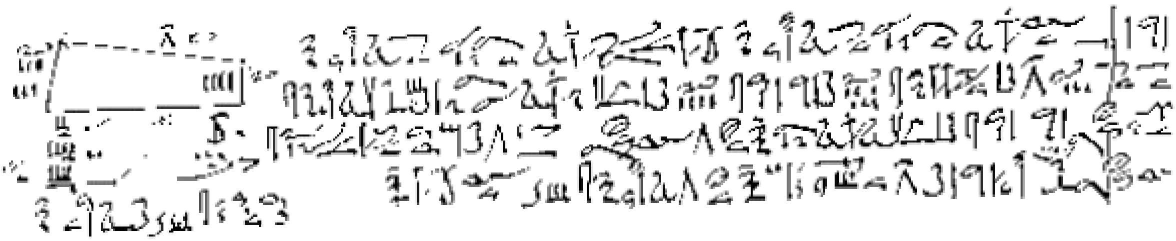
Problema 51. ¿Cuál es el área de un triángulo de lado 10 jet y base 4 jet?



Según está resuelto el problema, parece que el triángulo es isósceles y queda dividido en 2 partes iguales por la altura, con las que forma un rectángulo, siendo la altura lo que Ahmes llama lado. El escriba lo resuelve así: "Toma la mitad de 4 para formar un rectángulo. Multiplica 10 veces 2 y el resultado, 20, es el área buscada".

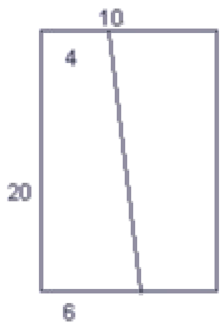


Problema 52. ¿Cuál es el área de un triángulo truncado de 20 jet de lado, 6 jet de base y 4 jet en su línea de sección?



Ahmes lo resuelve de la siguiente manera: "Suma su base a su segmento de corte; se obtiene 10. Toma la mitad de 10, que es 5, para formar un rectángulo. Multiplica a continuación 20 veces 5 y el resultado, 100, es el área buscada".

Si observamos la resolución se deduce que el triángulo truncado es un trapecio isósceles obtenido mediante una recta paralela a la base, a partir de la cual se construye el rectángulo. En el siguiente dibujo, no a escala, podemos verlo



Problemas 56 a 60

Pendientes, alturas y bases de pirámide. El problema 56 es importante porque contiene aspectos de trigonometría y de una cierta teoría de semejanza de triángulos.

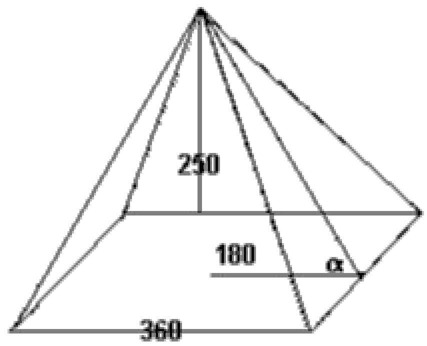
Problema 56. ¿Cuál es el seqt de una pirámide de 250 cubits de altura y 360 cubits de lado en la base?.

El seqt es lo que hoy conocemos por pendiente de una superficie plana inclinada. En mediciones verticales se utilizaba como unidad de medida el codo y en horizontales la mano o palmo, que equivalía a 1/7 del codo.

La resolución presentada por Ahmes es:

- Calcula 1/2 de 360 que da 180.
- Multiplica 250 hasta obtener 180, que da 1/2 + 1/5 + 1/50.
- Un cubit son 7 palmos. Multiplica ahora 7 por 1/2 + 1/5 + 1/50 que da 5 + 1/25. Luego el seqt es **5+1/25 palmos por codo**

Si representamos una figura con los datos del problema:



El seqt efectivamente coincide con la cotangente del ángulo, es decir es la pendiente de las caras laterales de la pirámide.

Problema 60. ¿Cuál es el seqt de una pirámide de 15 cubits de base y 30 cubits de altura?

Este problema es resuelto de la misma forma que el anterior, pero con una salvedad; hay un error, el escriba olvidó multiplicar el resultado de dividir la mitad de la base entre la altura por 7. El resultado que da es por tanto erróneo.

Problema 62 . Pesado de metales preciosos

Este problema es el único del papiro Rhind en el que se mencionan pesos. Una bolsa contiene el mismo peso de oro, plata y plomo. El valor total es de 84 shaty. Se da el valor por deben de cada uno de los metales, siendo el oro 12 shaty, la plata 6 shaty y el plomo 3 shaty. Se pide calcular el valor de cada metal y se resuelve asi:

Valor total = 84 shaty
Valor total para 1 deben de oro, 1 deben de plata y 1 deben de plomo = 21 shaty
Peso de cada metal = 84/21 = 4 deben
Valor del oro = 12*4 = 48 shaty
Valor de la plata = 6*4 = 24 shaty
Valor del plomo = 3*4 = 12 shaty

Problema 63

Repartos proporcionales. Repartir 700 hogazas de pan entre cuatro hombres en partes proporcionales a 2/3, 1/2, 1/3 y 1/4

Como ya vimos en el capítulo 8 los cálculos para repartos proporcionales se basan en las propiedades de las proporciones numéricas.

x/a = y/b = z/c = (x+y+z) /(a+b+c)) N/(a+b+c)

La solución que da Ahmes es la siguiente:

- Halla la suma 2/3 + 1/2 + 1/3 + 1/4 = 1 + 1/2 + 1/4

- Divide 1 / (1 + 1/2 + 1/4)

1	1 + 1/2 + 1/4
1/2	1/2 + 1/4 + 1/8

Considerando 1/2, el resultado de la división es 1/2 + 1/4 + 1/8 con una diferencia de 1/8. Entonces ahora debe determinarse que cantidad hay que multiplicar por 1 + 1/2 + 1/4 para obtener 1/8. Toma 8 como número rojo. Entonces tenemos:

8*(1+1/2+1/4) = 14
8*1/8 = 1

por lo que la cantidad buscada es 1/14---> 1 / (1 + 1/2 + 1/4) = 1/2 + 1/14.

- Multiplica el resultado por 700

1	700
1/2	350
1/4	50

700 *(1/2 + 1/14) = 350 + 50 = 400, y este es el número buscado. Ahora solo queda repartir.

- Multiplica cada uno de los repartos por 400 obteniendo el resultado solicitado:

400 * 2/3 = 266 + 2/3
400 * 1/2 = 200
400 * 1/3 = 133 + 1/3
400 * 1/4 = 100

Problema 64.

Progresión aritmética. Divide 10 hekat de cebada entre 10 hombres de manera que la diferencia entre cada hombre y el siguiente sea 1/8 de hekat. ¿Qué parte le corresponde a cada hombre?

Si aplicamos la formulación actual para progresiones aritméticas tenemos que si a_i son los n términos de la progresión, d la diferencia y S la suma:

$$S = (a_1 + a_n)*n/2 -> a_n = S/n + (n-1) * (d/2)$$

Así es, exactamente, como lo resuelve Ahmes, no sabemos si por propio razonamiento lógico o aplicando una formulación conocida. Hace:

- El número de diferencias es 9, una menos que el número de hombres.
- Multiplica este número por la mitad de la diferencia (1/16). 9*1/16 = 1/2 + 1/16
- Suma este resultado al promedio de las partes 1 +1/2 + 1/16
- Para obtener las partes restantes resta sucesivamente la diferencia 1/8 a esta cantidad.

Se obtiene:

1+1/2+1/16, 1+1/4+1/8+1/16, 1+1/4+1/16, 1+1/8+1/16, 1+1/16, 1/2+1/4+1/8+1/16, 1/2+1/4+1/16, 1/2+1/8+1/16, 1/2+1/16, 1/4+1/8+1/16. Si sumamos todos los términos obtenemos precisamente 10.

Problemas 69 a 78.

Intercambios y proporción inversa. Aquí, aunque Gillins establece una familia de problemas iguales, se puede hacer una subdivisión. Los 4 primeros problemas se refieren a cálculos de pesu de pan o cerveza y el resto a intercambios, en los que se emplea también el pesu.

Problema 69. 3 1/2 hekats de harina dan lugar a 80 barras. Encuentra la cantidad de harina en cada barra y el pesu.

Para resolver el problema Ahmes lo primero que hace es averiguar el número de ro in 3 1/2 hekats. En cada hekat hay 320 ro. Entonces multiplica 3 1/2 por 320

1 ------> 320
2 ------> 640
1/2 ----> 160

luego en 3 1/2 hekats habrá 1120 ro.

Ahora divide 1120 entre 80 barras

1 -----> 80
10 -----> 800
2 ------> 160
4 ------> 320

luego 1120 = 800 + 320 --> 1120/80 = 10 + 4 = 14

Tiene por tanto 14 ro por cada barra. Ahora para determinar el pesu de cada barra divide 80 entre 3 1/2.

1 -------> 3 1/2
10 ------> 35
20 ------> 70
2 -------> 7
2/3 ------> 2 1/3
1/21 -----> 1/6
1/7 -------> 1/2

70 + 7 + 2+ 1/3 + 1/6 + 1/2 = 80 ---------> 80 / (3 1/2) = 20 + 2 + 2/3 + 1/21 + 1/7 = **22 2/3 1/7 1/21 es el pesu**.

Problema 71. Este es un problema curioso sobre pesu. En una jarra de cerveza se tira 1/4 del contenido que se reemplaza por agua. Se pide averiguar el nuevo pesu de la cerveza, suponiendo que la cerveza original era el producto de medio hekat de grano.

Se resta 1/4 del original (1/2) a 1/2 1/2 - (1/4 * 1/2) = 1/4 + 1/8 hekat y ahora se divide 1 entre este resultado obteniendo un pesu de 2 + 2/3.

Este problema es importante por el uso del inverso. El escriba no apunta como se obtiene ese inverso aunque podemos hacer los cálculos según el sistema ya conocido. Debemos dividir 1/ (1/4 + 1/8)

1 ------> 1/4 + 1/8
2 ------> 1/2 + 1/4
2/3 ----> 1/6 + 1/12

de la columna derecha obtenemos 1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/12 = 1 ----> 1/ (1/4 + 1/8) = **2 + 2/3**

Problema 72. ¿Cuántas hogazas de pesu 45 equivalen a 100 hogazas de pesu 10?.

En este problema, que se resolvería actualmente por una simple regla de tres, Ahmes complica el proceso y aplica el siguiente criterio (lógicamente no aparece así representado en el papiro).

100/10 = x/45 = (x-100) / (45 -10) ---> x = 100 + ((45-10)/10) * 100

Tenemos que 100 hogazas de pesu 10 se obtienen a partir de 100/10 = 10 hekat de harina.

10 hekat de harina producirían 10x45 = 450 hogazas de pesu 45

Pero Ahmes efectúa los pasos a partir del exceso de pesu:

- Halla el exceso de 45 respecto de 10, 35
- Divide 35 entre 10 para obtener el exceso por barra

1	10
2	20
1/2	5

35/10 = 3 + 1/2 es el exceso por barra.

- Multiplica 100 por (3 + 1/2) = 350 total de exceso sobre las 100 barras

- Suma 100 a esta última cantidad y ese es el resultado (450)

Problema 73. Este es un típico problema de intercambio comercial. El enunciado es "100 barras de pesu 10 se intercambian por barras de pesu 15. ¿Cuántas barras de pesu 15 debe haber?"

Ahmes escribe: "Calcula la cantidad de harina en las 100 barras. Es decir divide 100 entre 10, esto nos da 10 hekats. El número de barras de pesu 15 de 10 hekats es 150, luego este es el número de barras de pesu 15 que se deben intercambiar".

Al tratarse de un intercambio lo que hace Ahmes es igualar en hekats. Para ello basta con calcular los hekats empleados en las 100 barras de pesu 10. 1 barra de pesu 10 significa que con 1 hekat se hacen 10 barras, luego con 10 hekats se hacen 100 barras. Para igualar el intercambio deben emplearse al menos esos mismos 10 hekats. Una barra de pesu 15 significa que por cada hekat se obtienen 15 barras, luego con 10 hekats se obtendrán 150 barras, y ese es el número.

Problema 79.

Progresiones geométricas.

Este es el único problema sobre progresiones geométricas en el Antiguo Egipto que nos es conocido, además del primer ejemplo de matemática recreativa del que se tiene noticia. Se trata de una progresión geométrica en la que el primer término es 7 y la razón también 7, pero planteado de una forma extraña. En el problema se dice " 7 casas, 49 gatos, 343 ratones, 2401 espigas de trigo, 16807 medidas de grano". Hay que suponer que Ahmes se refería a un problema, posiblemente ya conocido, en el que en cada casa hay 7 gatos, cada uno de los cuales se come 7 ratones, cada uno de los cuales se ha comido 7 espigas de grano, cada una de las cuales había producido 7 hekat de grano. Ahmes aquí no sólo da la cantidad de hekat de grano ahorrado sino que además da la suma del número de casas más gatos más ratones más espigas más hekat. Realmente es difícil interpretar el objetivo del escriba con este problema, pues la suma de todos los términos no es un objetivo lógico. Lo que si parece constituir este problema es la base de la canción infantil:

Según iba a St. Ives
encontre a un hombre con 7 esposas
cada esposa tenía 7 sacos,
cada saco tenía 7 gatos,
cada gato tenía 7 gatitos
Gatitos, gatos, sacos y esposas.
¿Cuántos iban a St. Ives?

:-)

Problemas 82 a 84

Estos problemas son relativos a la alimentación de ganado y pollos. El mayor interés estriba en la información que dan sobre la cantidad de comida a cada animal bajo diferentes condiciones. El problema 82 da el ejemplo de 10 gansos que son engordados por alimentación por fuerza y que reciben 2+1/2 hekat de harina, en pan, por día. En el 82b el coeficiente es la mitad. En el problema 83 el mismo número de pájaros, sin un tratamiento especial, deben recibir sólo 1 hekat de grano, y los pájaros enjaulados 1/4, debido a su menor actividad.

Francisco López

FAMOSOS NÚMEROS IRRACIONALES

Historia del número áureo

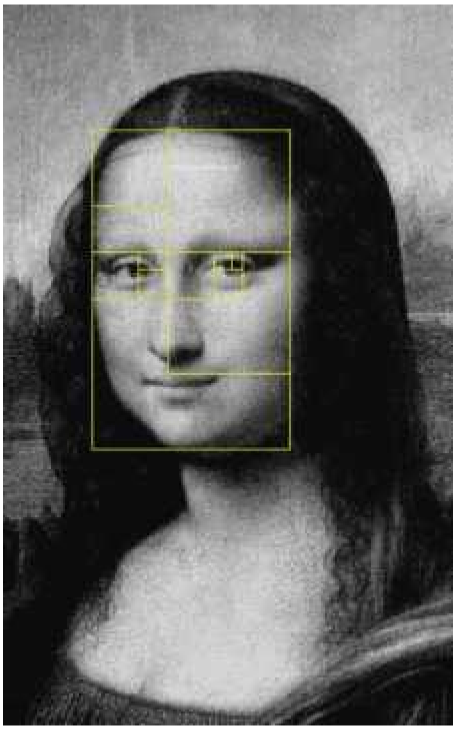
El número áureo o la proporción áurea se estudió desde la antigüedad, ya que aparece regularmente en geometría. Se conoce ya de su existencia en los pentágonos regulares y pentáculos de las tabletas sumerias de alrededor del 3200 a. C.

En la antigua Grecia se utilizó para establecer las proporciones de los templos, tanto en su planta como en sus fachadas. Por aquel entonces no recibía ningún nombre especial, ya que era algo tan familiar entre los antiguos griegos que "la división de un segmento en media extrema y razón" era conocido generalmente como "la sección". En el Partenón, Fidias también lo aplicó en la composición de las esculturas. (la denominación Fi, por ser la primera letra de su nombre, la efectuó en 1900 el matemático Mark Barr en su honor).

Platón (Circa 428-347 a. C.), consideró la sección áurea como la mejor de todas las relaciones matemáticas y la llave a la física del cosmos.

La sección áurea se usó mucho en el Renacimiento, particularmente en las artes plásticas y la arquitectura. Se consideraba la proporción perfecta entre los lados de un rectángulo.

Da Vinci hizo las ilustraciones para una disertación publicada por Luca Pacioli en 1509 titulada *De Divina Proportione*, quizás la referencia más temprana en la literatura a otro de sus nombres, el de "Divina Proporción". Este libro contiene los dibujos hechos por Leonardo da Vinci de los cinco sólidos platónicos. Es probable que fuera Leonardo quien diera por primera vez el nombre de *sectio áurea*. En 1525, Alberto Durero publica *Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas* donde describe cómo trazar con regla y compás la espiral basada en la sección áurea, que se conoce como “espiral de Durero”.



El rostro de la Gioconda proporcionado con rectángulos áureos.

Los artistas de Renacimiento utilizaron la sección áurea en múltiples ocasiones tanto en pintura, escultura como arquitectura para lograr el equilibrio y la belleza. Leonardo da Vinci, por ejemplo, la utilizó para definir todas las proporciones fundamentales en su pintura *La última cena*, desde las dimensiones de la mesa, hasta la disposición de Cristo y los discípulos sentados, así como las proporciones de las paredes y ventanas al fondo.

Leonardo da Vinci, en su cuadro de la Gioconda (o Mona Lisa) utilizó rectángulos áureos para plasmar el rostro de Mona Lisa. Se pueden localizar muchos detalles de su rostro, empezando porque el mismo rostro se encuadra en un rectángulo áureo.

El astrónomo Johannes Kepler (1571-1630), descubridor de la naturaleza elíptica de las órbitas de los planetas alrededor del Sol, mencionó también la divina proporción: “La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro, la división de una línea entre el extremo y su proporcional. El primero lo podemos comparar a una medida de oro; el segundo lo debemos denominar una joya preciosa”. Y, creyente como era dijo: "no cabe duda de que Dios es un gran matemático"

Hoy en día la sección áurea se puede ver en multitud de diseños. El más conocido y difundido sería la medida de las tarjetas de crédito, la cual también sigue dicho patrón, así como nuestro carné de identidad y también en las cajetillas de cigarrillos.

En la arquitectura moderna sigue usándose; por ejemplo, está presente en el conocido edificio de la ONU en Nueva York, el cual no es más que un gran prisma rectangular cuya cara mayor sigue las citadas proporciones.

La sección áurea en la naturaleza

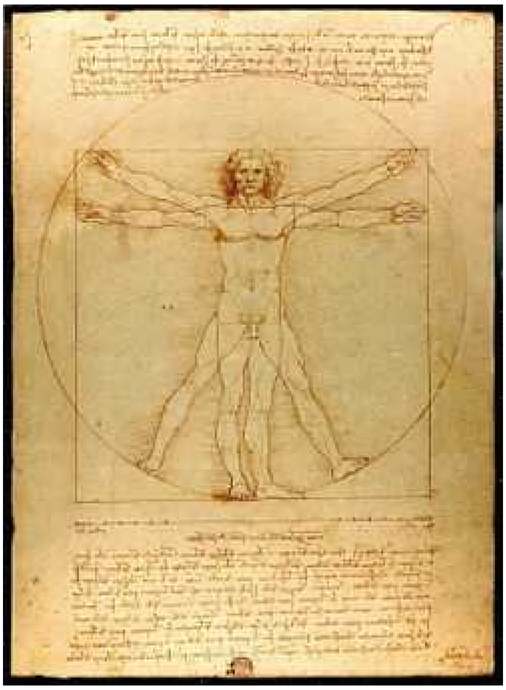
Concha de nautilus en espiral logarítmica

En la naturaleza, hay muchos elementos relacionados con la sección áurea:

- Según el propio Leonardo de Pisa Fibonacci, en su *Libro de los ábacos*, la secuencia puede ayudar a calcular casi perfectamente el número de pares de conejos *n* meses después de que una primera pareja comienza a reproducirse (suponiendo que los conejos se empiezan a reproducir cuando tienen dos meses de edad).
- La relación entre la cantidad de abejas macho y abejas hembra en un panal.
- La relación entre la distancia entre las espiras del interior espiralado de cualquier caracol (no sólo del nautilus)
- La relación entre los lados de un pentáculo *.
- La relación entre los lados de un pentágono *.
- La disposición de los pétalos de las flores (el papel del número áureo en la botánica recibe el nombre de Ley de Ludwig).
- La distribución de las hojas en un tallo
- La relación entre las nervaduras de las hojas de los árboles
- La relación entre el grosor de las ramas principales y el tronco, o entre las ramas principales y las secundarias (el grosor de una equivale a Φ tomando como unidad la rama superior).
- La distancia entre las espirales de una piña.
- La Anatomía de los humanos se basa en una relación Phi exacta, así vemos que:
    - La relación entre la altura de un ser humano y la altura de su ombligo.
    - La relación entre la distancia del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos.
    - La relación entre la altura de la cadera y la altura de la rodilla.
    - La relación entre el primer hueso de los dedos (metacarpiano) y la primera falange, o entre la primera y la segunda, o entre la segunda y la tercera, si dividimos todo es phi.
    - La relación entre el diametro de la boca y el de la nariz
    - Es phi la relación entre el diámetro externo de los ojos y la línea inter-pupilar
    - Cuando la tráquea se divide en sus bronquios, si se mide el diámetro de los bronquios por el de la tráquea se obtiene phi, o el de la aorta con sus dos ramas terminales (ilíacas primitivas).
    - Está comprobado que la mayor cantidad de números phi en el cuerpo y el rostro hacen que la mayoría de las personas

reconozcan a esos individuos como guapos, bellos y proporcionados. Si se miden los números phi de una población determinada y se la compara con una población de modelos publicitarios, estos últimos resultan acercarse mas al número phi [*sin referencias*].

La sección áurea en el arte



Hombre de Vitruvio
Leonardo da Vinci

- Relaciones arquitectónicas en las Pirámides de Egipto.
- La relación entre las partes, el techo y las columnas del Partenón, en Atenas (s. V a. C.).
- En los violines, la ubicación de las efes (los “oídos”, u orificios en la tapa) se relaciona con el número áureo.
- El número áureo aparece en las relaciones entre altura y ancho de los objetos y personas que aparecen en las obras de Miguel Ángel, Durero y Da Vinci, entre otros.
- Las relaciones entre articulaciones en el hombre de Vitruvio y en otras obras de Leonardo da Vinci.
- En las estructuras formales de las sonatas de Mozart, en la *Quinta Sinfonía* de Beethoven, en obras de Schubert y Debussý (estos compositores probablemente compusieron estas relaciones de manera inconsciente, basándose en equilibrios de masas sonoras).
- En la pág. 61 de la novela de Dan Brown *El código Da Vinci* aparece una versión desordenada de los primeros ocho números de Fibonacci (13, 3, 2, 21, 1, 1, 8, 5), que funcionan como una pista dejada por el curador del museo del Louvre, Jacques Saunière. En las pp. 121 a 123 explica algunas de las apariciones de este número *fi* (1,618) en la naturaleza.
- En el episodio “Sabotaje” de la serie de televisión *NUMB3RS* (primera temporada, 2005), el genio de la matemática Charlie Eppes menciona

que el número *fi* se encuentra en la estructura de los cristales, en la espiral de las galaxias y en la concha del nautilus.

- Arte Póvera, movimiento artístico italiano de los años 1960, muchas de cuyas obras se basan en esta sucesión.
- En la cinta de Darren Aronofsky *Pi, el orden del caos* el personaje central, Max Cohen, explica la relación que hay entre los números de Fibonacci y la sección áurea, aunque denominándola incorrectamente como Theta (θ) en vez de Phi (Φ).

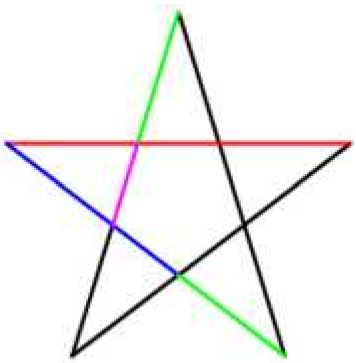
El número áureo en la música

Autores como Bártok, Messiaen y Stockhausen, entre otros, compusieron obras cuyas unidades formales se relacionan (a propósito) con la sección áurea.

El compositor mexicano Silvestre Revueltas (1899-1945) utilizó también el número áureo en su obra *Alcancías*, para organizar las partes (unidades formales).

El grupo de rock progresivo norteamericano Tool, en su disco Lateralus (2001) hacen múltiples referencias al número áureo y a la secuencia Fibonacci, sobre todo en la canción que da nombre al disco, pues los versos de la misma están cantados de forma que el número de sílabas pronunciadas en cada uno van componiendo dicha secuencia. Además la voz entra en el minuto 1:37, que pasado al sistema decimal coincide muy aproximadamente con el número áureo.

La sección áurea en el pentáculo



Pentáculo

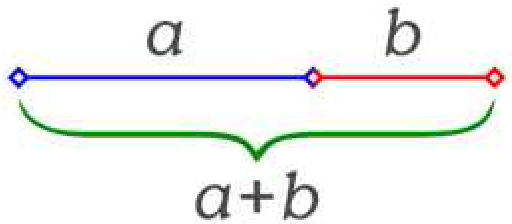
Existe la relación del número áureo también en el pentáculo o pentalfa, un símbolo pagano, más tarde acogido por la iglesia católica para representar a la Virgen María, y también por Leonardo da Vinci para asentar en él al hombre de Vitruvio.

Gráficamente el número áureo es la relación entre el lado del pentágono regular y la recta que une dos vértices no consecutivos de éste. Si se toma como unidad un lado del pentágono interior, cualquier línea que marca los brazos de la estrella mide Φ. También la longitud total de cualquiera de las cinco líneas que atraviesan la estrella mide Φ^3, mientras que la suma del lado interior y cualquiera de sus brazos es Φ^2.

Teniendo en cuenta la gran simetría de este símbolo se observa que dentro del pentágono interior es posible dibujar una nueva estrella, con una recursividad hasta el infinito. Del mismo modo, es posible dibujar un pentágono por el exterior, que sería a su vez el pentágono interior de una estrella más grande.

Al medir la longitud total de una de las cinco líneas del pentáculo interior, resulta igual a la longitud de cualquiera de los brazos de la estrella mayor, o sea Φ.

Qué es y de dónde proviene el número áureo



Se divide un segmento cualquiera en dos partes de forma que **la razón entre la totalidad del segmento y una parte (la mayor) sea igual a la razón entre esta parte y la otra**. Matemáticamente, siendo las partes *a* y *b* :

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Esta razón, que cumple la propiedad, es denominada **razón áurea**. Se puede obtener este número a partir de la expresión anterior:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b};\ a^2 = b(a+b) = ba + b^2;\ a^2 - ba - b^2 = 0$$

Se puede despejar *a* utilizando la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado, teniendo en cuenta que $a > 0$ y $b > 0$:

$$a = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2} = \frac{b + \sqrt{5b^2}}{2} = \frac{b + b\sqrt{5}}{2} = \frac{b\left(1 + \sqrt{5}\right)}{2}$$

Dividiendo todo por *b* se obtiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

El rectángulo áureo de Euclides

Euclides obtiene el rectángulo áureo AEFD a partir del cuadrado ABCD. El rectángulo BEFC es asimismo áureo.

El rectángulo *AEFD* es áureo porque sus lados AE y AD están en la proporción del número áureo. Euclides en su proposición 2.11 de *Los elementos* obtiene su construcción.>

$$GC = \sqrt{5}$$

Con centro en G se obtiene el punto E, y por lo tanto

$$GE = GC = \sqrt{5}$$

resultando evidente que

$$AE = AG + GE = 1 + \sqrt{5}$$

de donde, finalmente

$$\frac{AE}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Por otra parte, los rectángulos AEFD y BEFC son semejantes, de modo que éste último es asimismo un rectángulo áureo.

Propiedades

Φ es irracional, y el único número real positivo con:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

La expresión anterior es fácil de comprobar:

$$\varphi^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{2^2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{2^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Φ posee además las siguientes propiedades:

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi^3 = \frac{\varphi+1}{\varphi-1}$$

Representación mediante fracciones continuas

La expresión mediante fracciones continuas es:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \quad \longrightarrow \quad \varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}}$$

Sorprendente interacción única (suma y multiplicación), (resta y división), donde sumar es multiplicar y restar es dividir.

Representación mediante ecuaciones algebraicas

$$(\varphi)(\varphi - 1) = 1 \quad \longrightarrow \quad (\varphi)^2 - \varphi - 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Representación trigonométrica

$$\varphi = \frac{1}{2} sec \frac{2}{5}\pi$$

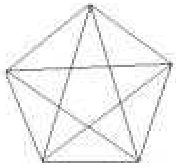
Representación mediante raíces anidadas

$$\varphi = \sqrt{1+\varphi} \quad \longrightarrow \quad \varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

Fuente es.wikipedia.org/wiki/Número_áureo -

ALGO DE LA HISTORIA DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

La introducción de los distintos sistemas de números no ha sido secuencial. Así en el siglo VII a.C, los griegos descubrieron las magnitudes irracionales, es decir números que no pueden ser expresados a través de una fracción, al comparar la diagonal y el lado de un pentágono regular o la diagonal y el lado de un cuadrado, estando, también, familiarizados con la extracción de las raíces cuadradas y cúbicas, pero sin embargo, no conocían los números negativos y el cero, ni tampoco tenían un sistema de símbolos literales bien desarrollado.



Cuando la matemática Griega comenzó a declinar, Diofanto abandonó la representación geométrica de los números y empezó a desarrollar las reglas del álgebra y aritmética, utilizando un literal, por ejemplo, para representar las incógnitas de una ecuación. Fueron los indios, entre los siglos V- XV, los que inventaron el sistema de numeración actual, introdujeron los números negativos y comenzaron a operar con los números irracionales de forma semejante que con los racionales sin representarlos geométricamente. Utilizaban símbolos especiales para las operaciones algebraicas, como la radicación. encontraron métodos para resolver ecuaciones, y descubrieron la fórmula del binomio de Newton (en forma verbal)

A principios del siglo XVI, los italianos Tartaglia y Ferrari, lograron resolver por radicales, de forma general, las ecuaciones de tercer y cuarto grado. La notación algebraica se perfecciona gracias a Viéte y Descartes.

(Tartaglia)

A mediados del siglo XVII en Gran Bretaña, Neper inventa los logaritmos y Briggs elabora las primeras tablas de logaritmos decimales. A partir de esta época el nacimiento del análisis hizo que se despreciase un poco el álgebra debido al interés sobre los estudios de magnitudes variables.

(Neper)

Para terminar, es importante resaltar que el conocimiento de los números por parte de los Griegos no fue superado hasta veinticuatro siglos más tarde. Los matemáticos G. Cantor, R. Dedekind, K. Weiertrass y B. Bolzano fueron los que culminaron la obra, que duro medio siglo de investigaciones, sobre los números naturales, enteros, racionales e irracionales, que considerados juntos, constituyeron lo que se denominó el sistema de los números reales.