

TRISECCION DE ANGULOS

Libardo Manuel Jácome

INTRODUCCION.

Uno de los problemas de la antigüedad fue el de trisección del ángulo, usando únicamente regla y compás euclidianos. Muchos eminentes matemáticos lo resolvieron pero utilizando instrumentos sofisticados o la regla y el compás en un sentido más amplio.

Desde 1937 se sabe que este problema carece de solución en virtud del teorema de Wantzel, pero en el V Coloquio Regional de Matemáticas, la profesora Clara Elena Sánchez de la Universidad Nacional, nos comenta que a pesar de conocer este teorema hay personas que abrigan la esperanza de poder resolverlo y presentan "soluciones" a este problema, pero claro, siempre se encuentra el error.

En esta oportunidad no pretendo dar una "solución" más, pero sí resolver el problema de trisección aunque sea en mínima parte, en concreto dando una lista de ángulos, su construcción y el método para efectuar la operación mencionada.

PREPARATIVOS.

En primer lugar, supongamos que hemos trisecado el ángulo AOB de medida α entonces se podrán trisecar los ángulos de medida:

- 1) $\alpha / 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 360^\circ$
 2) $\alpha 2^m$, $m \in \mathbb{N}$.

donde $0 < \alpha \leq 180$ y m de tal forma que
 $0 < \alpha 2^m \leq 360$.

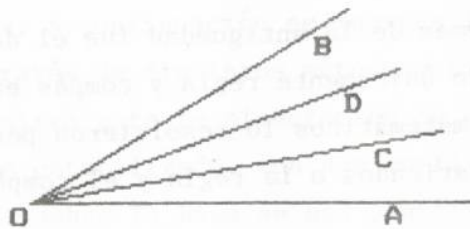


FIG. 1

De lo anterior tenemos que si por algún procedimiento dividimos el ángulo AOB en tres partes iguales (Fig. 1), ya podremos trisecar infinito número de ángulos.

Para trisecar el ángulo de medida $\alpha/2$ basta aplicar un teorema de Geometría Elemental que dice: la medida del ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Con centro en O y radio arbitrario describimos la circunferencia que intercepta a los rayos OA, OC, OD y OB en los puntos: P, Q, R y S respectivamente.

En el arco PKS tomamos un punto arbitrario L y unimos este punto con P, Q, R y S.

Los rayos LQ y LR trisecan al ángulo PLS. (Fig. 2).

Si queremos trisecar el ángulo de medida $\alpha/4$ repetimos el proceso con el ángulo PLS de medida $\alpha/2$.

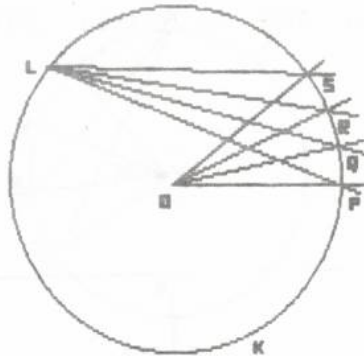


FIG. 2

Si el ángulo AOB tiene como medida $0 < \alpha \leq 180$, se pueden trisecar todos los ángulos de medida $2^m \alpha$, $m \in \mathbb{N}$ con la limitante de que m queda agotado cuando $\alpha 2^m \leq 360$. Trazamos una circunferencia que pase por los puntos O, A, B; en la construcción queda determinado el centro T de la circunferencia y los puntos M y N.

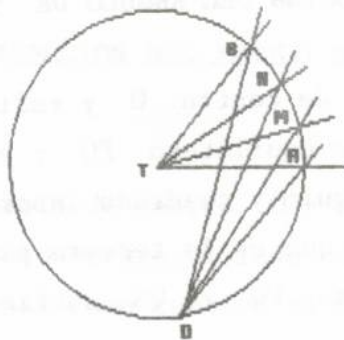


FIG. 3

Unimos T con A, M, N y B. El ángulo ATB (doble de AOB) queda trisecado por los rayos OM y ON.

TRISECCION DEL ANGULO DE 270°

Es quizá la más sencilla de las trisecciones, pues una vez construido el ángulo AOB de medida 270° basta prolongar AO y BO.

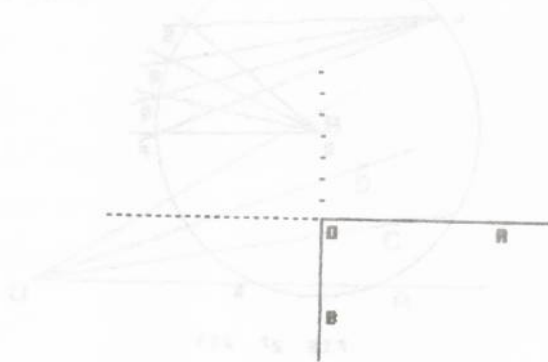


FIG. 4

El lector puede comprobar fácilmente que el ángulo AOB queda dividido en tres ángulos, cada uno de medida 90° . Esto significa que se pueden trisecar los ángulos de medida: $135^\circ, 67.5^\circ, \dots, 270^\circ/2^n, \dots, n \in \mathbb{N}$

TRISECCION DEL ANGULO DE 90°

En la circunferencia de centro O y radio r construimos el lado del triángulo equilátero PQ y el lado del cuadrado PR y QS (Triángulo y cuadrado inscritos). La cuerda PQ subtende un arco que es la tercera parte de la circunferencia y las cuerdas PQ y QS subtenden arcos de $1/4$ de circunferencia.

Ahora $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$. Esto significa que $\widehat{QR} = (1/3) \widehat{QS}$.

Podemos apreciar claramente que \widehat{SQ} mide 90° y por tanto \widehat{RQ} medirá 30° .

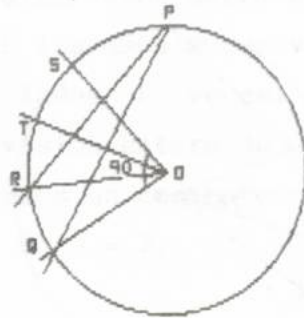


FIG. 5

Es decir el arco \widehat{SQ} quedará dividido en tres partes iguales cuando localicemos el punto T tal que $\widehat{ST} = \widehat{TR}$ lo cual es muy sencillo.

Lo anterior significa que el ángulo QOS queda trisecado por los rayos OR y OT. (Fig. 5). Luego se pueden trisecar los ángulos de medidas 180° , 360° , 45° , 22.5° , ..., $90^\circ/2^n$..

TRISECCION DEL ANGULO DE 72°

En una circunferencia de centro O y radio r tomo un punto arbitrario p y construyo el lado del triángulo equilátero inscrito PQ así como también el ángulo a trisecar QOS de medida 72° . A continuación dibujo el lado del pentágono regular inscrito PR. Ahora $1/3 - 1/5 = (2/3)(1/5)$. Esto significa que $\widehat{PQ} - \widehat{PR} = \widehat{QR} = (2/3)\widehat{QS}$. Tomemos en la circunferencia un punto T entre R y Q tal que $\widehat{QT} = \widehat{TR}$ en

tonces, el ángulo QOS queda trisecado por los rayos OR y OT.

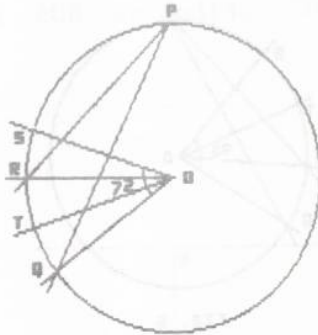


FIG. 6

Se pueden trisecar los ángulos de medidas: 144° , 288° , 36° , 18° , 9° , 4.5° , etc.

Así podríamos seguir trisecando más ángulos, pero de pronto se vuelve monótono, por esto es mejor que veamos de inmediato un método para trisecar cierto tipo de ángulos.

Como podemos observar según los ejemplos anteriores, el problema está íntimamente relacionado con la construcción de polígonos regulares.

Según Gauss (177-1855) un polígono regular de n lados se puede construir si los factores primos impares de n son "números primos de Fermat" diferentes entre sí.

Un número de Fermat es de la forma $f_i = 2^{2^i} + 1$, $i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$
El procedimiento consiste en construir el lado PQ del po-

lígono regular de tres lados en la circunferencia de centro O y radio r , a continuación dibujamos el ángulo QOS de medida $360^\circ/n$ donde n es un número formado por factores primos de Fermat diferentes entre sí y diferentes de 3. Luego, a partir de P llevamos sucesivamente el lado del polígono regular de n lados L veces. L lo describimos a continuación. La división entera de n por 3 no es exacta y por tanto obtendremos un cociente L y un residuo J . Es claro que $J = 1$ ó $J = 2$.

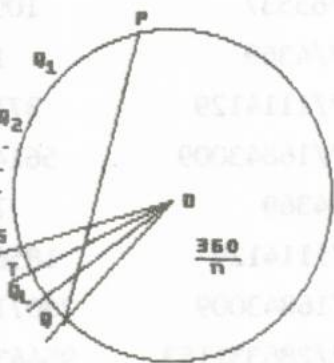


FIG. 7

Así tendremos los puntos Q_1, Q_2, \dots, Q_L (fig. 7). Observe que $(1/3) - (L/n) = (n-3L)/(3n) = (J/3)(1/n)$, $J \in \{1, 2\}$. Esto significa que $\widehat{PQ} - \widehat{PQ}_L = \widehat{Q}_L Q = (J/3)\widehat{SQ}$ donde $J \in \{1, 2\}$. Si $J = 1$ tomamos el punto T en la circunferencia entre S y Q_L de modo que $\widehat{ST} = \widehat{TQ}_L$, de esta forma los rayos OT y OQ_L trisecan el ángulo QOS .

Si $J = 2$ tomamos un punto T en la circunferencia entre Q_L y Q tal que $\widehat{Q}_L T = \widehat{TQ}$. Los rayos OT y OQ_L trisecan el ángulo QOS .

A continuación escribo la lista de ángulos trisecables con valores de n , L y J .

n	ANGULO PRINCIPAL	L	J
5	72°	1	2
17	$360^\circ/17$	5	2
257	$360^\circ/257$	85	2
65537	$360^\circ/65537$	21845	2
85	$72^\circ/17$	28	1
1285	$72^\circ/257$	428	1
327685	$72^\circ/65537$	109228	1
4369	$360^\circ/4369$	1456	1
1114129	$360^\circ/1114129$	371376	1
16843009	$360^\circ/16843009$	5614336	1
21845	$72^\circ/4369$	7281	2
5570645	$72^\circ/1114129$	1856881	2
84215045	$72^\circ/16843009$	28071681	2
286331153	$360^\circ/286331153$	95443717	2
1431655765	$72^\circ/286331153$	477218588	1
.....

Es posible que en el futuro se encuentren más números primos de la forma f_i . Se sabe que f_i para $5 \leq i \leq 16$ el número es compuesto, luego el próximo polígono regular podría tener $2^{17} + 1$ lados. El número de cifras de este monstruoso número está alrededor de 40960, es decir, ni siquiera podríamos anexarlo a la lista anterior.

Nótese las últimas cifras de n y L .

BIBLIOGRAFIA

1. COXETER. H. S.M. Fundamentos de Geometría. Limusa 1971.
2. VERA, Francisco. Científicos Griegos. Aguilar. 1970.
3. LANDAVERDE, Felipe de Jesús. Curso de Geometría. Andes
4. MOISE, DOWNS. Geometría Moderna. Fondo Educativo Interamericano. 1970.

viene de la página 24.

del conjunto B de los beneficios? Dibuja B en color rojo.

Enseñanza reformada 1986: Objetivos para el alumno:

- 1) memorizar el nombre de tu profesor.
- 2) transcribir el texto de la pizarra a tu cuaderno
- 3) utilizar correctamente el lápiz y el papel
- 4) utilizar correctamente la regla en el subrayado
- 5) analizar el texto y diferenciar las palabras
- 6) seleccionar los datos importantes
- 7) recuperar el tiempo perdido por los objetivos precedentes.
- 8) completar la actividad propuesta.

Objetivos para el docente: consultar el Manual de Objetivos, tomo IV, desde la página 85 hasta la página 976.

PROBLEMA: Un campesino vende una bolsa de papas por \$1000. Los gastos de producción se elevan a \$800 y el beneficio obtenido es de \$200.

ACTIVIDAD: señala la palabra "papas" y discute sobre ella con tus compañeros de grupo.

Mientras lleno el objetivo 17 de la ficha de información número 7526, los saludo con compasión.

Teresita.