DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA EN R^3

Jairo Portilla O.

El empleo de vectores geométricos (para visualizar) y el de vectores coordenados (para operar algebráicamente) tiene gran importancia en la Geometría Analítica; pues con ellos se facilita la deducción de muchas fórmulas como también la obtención de las diferentes relaciones algebráicas que se dan entre los lugares geométricos; tales como en rectas paralelas, perpendiculares, la distancia de un punto a una recta, etc. Esto lo veremos por ejmplo, en el tema a tratarse.

NOTACION: Los vectores se escribirán en negrilla; así **M** y **SQ** el segmento rectilíneo orientado con extremos en los puntos S y Q.

Es conveniente tener presente algunas expresiones y relaciones entre vectores, tales como:

$\mathbf{SQ} = \mathbf{SR} + \mathbf{RQ}$: método del triángulo

$\mathbf{X}.\mathbf{Y}$: producto escalar entre los vectores $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$

$\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$: producto vectorial entre $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$.

$|\mathbf{X}.\mathbf{Y}| = |\mathbf{X}|\,|\mathbf{Y}|$ sí y sólo si $\mathbf{X} \parallel \mathbf{Y}$ (1)

$\mathbf{X} \perp \mathbf{Y}$ si y sólo si $\mathbf{X} . \mathbf{Y} = 0$ (2)

$|\mathbf{X} \pm \mathbf{Y}|^2 = |\mathbf{X}|^2 + |\mathbf{Y}|^2$ sii $\mathbf{X} \perp \mathbf{Y}$ (3)

$|\mathbf{X} \times \mathbf{Y}|^2 = |\mathbf{X}|^2 \cdot |\mathbf{Y}|^2 - (\mathbf{X}.\mathbf{Y})^2$ (4)

donde $|\mathbf{X}|$ es la norma de $\mathbf{X}$.

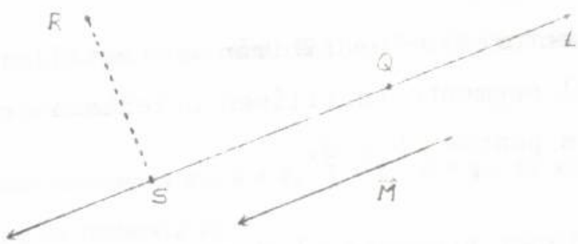
Ahora, dada una recta L en el espacio con sus ecuaciones paramétricas, así:

$$L: \quad \begin{aligned} x &= x_1 + ta \\ y &= y_1 + tb \\ z &= z_1 + tc \end{aligned} \quad ; \quad t \in R$$

se tiene que $Q(x_1, y_1, z_1)$ es un punto y $M = (a, b, c)$ es un vector direccional de L, ($M \parallel L$, $M \neq 0$). Para un punto dado $R(h, k, r)$ en un sistema XYZO (rectangular), se denota la distancia de R a L así: d(R, L).

Definición.

$d(R, L) = RS$, donde S es el punto proyección de R sobre L.



Según lo anterior, $SQ \parallel M$ y por (1) se obtiene:

$|SQ . M| = |SQ||M| = SQ\,|M|$; pero

$SQ . M = (SR + RQ) . M = SR . M + RQ . M = RQ . M$

En lo anterior, $SR . M = 0$ porque $SR \perp M$ (ver 2)

Así: $|RQ . M| = SQ\,|M|$ o $SQ = |RQ . M| / |M|$

Por otra parte, $RS \perp SQ$ y según (3) se tiene:

$$|RS + SQ|^2 = |RS|^2 + |SQ|^2 = |RQ|^2 \quad ó$$

$RS^2 + SQ^2 = RQ^2$ de donde $RS^2 = RQ^2 - SQ^2$

Reemplazando SQ: $RS^2 = RQ^2 - |\mathbf{RQ} \cdot \mathbf{M}| / |\mathbf{M}|^2$ ó

$$RS^2 = \frac{RQ^2 |\mathbf{M}|^2 - |\mathbf{RQ} \cdot \mathbf{M}|^2}{|\mathbf{M}|^2} = \frac{|\mathbf{RQ} \times \mathbf{M}|^2}{|\mathbf{M}|^2}$$

La última igualdad se justifica por (4).

Luego: $RS = |\mathbf{RQ} \times \mathbf{M}| / |\mathbf{M}|$ y según la definición:

$$d(R, L) = |\mathbf{RQ} \times \mathbf{M}| / |\mathbf{M}| \qquad (*)$$

NOTA: $|\mathbf{M}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Cualquier punto P de L tiene como coordenadas $P(x,y,z)$ o $P(x_1 + ta, y_1 + tb, z_1 + tc)$. donde t es un real cual - quiera.

Ahora, $\mathbf{RP} = (x_1 + ta - h, y_i + tb - k, z_1 + tc - r)$;

luego:

$$\mathbf{RP} \times \mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1+ta-h & y_1+tb-k & z_1+tc-r \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1-h & y_1-k & z_1-r \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ta & tb & tc \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1-h & y_1-k & z_1-r \\ a & b & c \end{vmatrix} = \mathbf{RQ} \times \mathbf{M} \qquad (**)$$

puesto que $\mathbf{RQ} = (x_1-h,\ y_1-k,\ z_1-r)$; donde $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

En consecuencia, $d(R, L) = |\mathbf{RQ} \times \mathbf{M}| \ / \ |\mathbf{M}|$

Por otra parte, si $\mathbf{M'}$ es otro vector direccional de L, entonces $\mathbf{M} = \lambda\mathbf{M'}$, donde $\lambda \in R^*$ y en (*)

$$\begin{aligned} d(R, L) &= |\mathbf{RQ} \times (\lambda \mathbf{M'})| \ / \ |\lambda \mathbf{M'}| = |\lambda||\mathbf{RQ} \times \mathbf{M'}| / |\lambda||\mathbf{M'}| \\ &= |\mathbf{RQ} \times \mathbf{M'}| \ / \ |\mathbf{M'}| \ . \end{aligned}$$

Según los dos últimos análisis, se saca como conclusión lo siguiente: En igualdad (*) se puede reemplazar el punto Q por cualquier otro punto P de la recta y/o el vector **M** por cualquier otro vector direccional **M'** de L. En cualquier caso, la distancia del punto R a la recta L no cambia.

Veamos otro aspecto, en lo anterior consideramos un caso particular. Si $x_1 = 0 = c = r$, entonces la recta L como el punto R están en el plano cartesiano XY. Así:

$Q(x_1, y_1, 0)$, $\mathbf{M} = (a, b, c, 0)$, $R(h, k, 0)$ y

$$L: \begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \\ z = 0 \end{cases}$$ De estas ecuaciones se obtiene:

$L: \quad bx-ay+ay_1-bx_1 = 0$ ó $Ax + By + C = 0$ en XYO,

$$A = b, \ B = -a, \ C = ay_1 - bx_1 \ .$$

Por otra parte se tiene:

$$\mathbf{RQ} \times \mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1-h & y_1-k & 0 \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = (bx_1-bh-ay_1+ak)\mathbf{k} = (0,0,bx_1-bh-ay_1+ak)$$

Luego,

$$|\mathbf{RQ} \times \mathbf{M}| = \sqrt{(bx_1-bh-ay_1+ak)^2} = $$
$$= |bx_1-bh-ay_1+ak| = $$
$$= |bh-ak+ay_1-bx_1| = |Ah+Bk+C|$$

Como $|\mathbf{M}| = \sqrt{a^2+b^2+0^2} = \sqrt{B^2+A^2} = \sqrt{A^2+B^2}$ se tiene:

$$d(R, L) = |\mathbf{RQ} \times \mathbf{M}| \,/\, |\mathbf{M}| = \frac{|Ah+Bk+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

La cual es precisamente, la conocida fórmula de la distancia de un punto $R(h, k)$ a una recta $L: Ax + By + C = 0$.

Para terminar, se plantea el ejemplo siguiente:

Sea

$$L: \begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 4 - 2t \\ z = 5 + 3t \end{cases} \quad \text{y el punto } R(7, -1, 4)$$

El punto $Q(-3, 4, 5)$ está en L y $\mathbf{M} = (6, -2, 3)$ es un vector direccional de L.

Ahora, $\mathbf{RQ} = (-3-7,\ 4+1,\ 5-4) = (-10, 5, 1)$

$$RQ \times M = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -10 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (15+2)i - (-30-6)j + (20-30)k$$
$$= (17,\ 36,\ -10)$$

$$|RQ \times M| = \sqrt{17^2 + 36^2 + (-10)^2} = \sqrt{1.685}$$
$$|M| = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

Así, $d(R, L) = \sqrt{1.685}/7$.

Hallamos ahora otro punto de la recta.

Para $t = 1$, se tiene $x = 3$, $y = 2$, $z = 8$; entonces $P(3, 2, 8)$ está en L y $RP = (3-7,\ 2+1,\ 8=4) = (-4,\ 3,\ 4)$

$$RP \times M = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 3 & 4 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (9+8)i - (-12-24)j + (8-18)k$$
$$= (17,\ 36,\ -10) = RQ \times M$$

Entonces, $d(R, L) = |RP \times M| / |M| = \sqrt{1.685}/7$

Tómese otro vector direccional M' de L y compruebe que

$$|RP \times M'| / |M'| = \sqrt{1.685}/7 .$$

Finalmente, cabe anotar que en (**), P es un punto cualquiera y Q un punto fijo en L, **M** un vector direccional y R un punto arbitrario en el espacio. En consecuencia, esta igualdad es la ecuación de L, la cual se la puede reducir reemplazando R por Q así:

$QP \times M = QQ \times M = 0$: ecuación de L que pasa por

Q y $M \parallel L$.

Para Q(-3, 4, 5), **M** = (6, -2, 3) se tiene que para todo punto P(x, y, z) de L, **QP** = (x+3, y-4, z-5) y

$$\mathbf{QP} \times \mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x+3 & y-4 & z-5 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ , ecuación en determinante de L.}$$

De lo anterior, $(3y + 2z - 22, -3x+6z-39, -2x-6y+18) = 0$

de donde: $3y+2z = 22$, $x-2z = -13$, $x+3y = 9$.

De la segunda y tercera igualdad se obtiene la primera; luego de las dos últimas: $x+3 = 2(z - 5)$, $x+3 = -3(y-4)$.

Así: $$\frac{x+3}{6} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-5}{3}$$

las cuales son las ecuaciones simétricas de L. Igualando a un real t, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta, la cual se la consideró en el ejemplo dado.

ARITMETICA PITAGORICA
(continuación)

"Todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos"

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$3 + 6 = 3^2$

$6 + 10 = 4^2$

En lenguaje algebraico

Enésimo número triangular:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cuadrado de un número:

$$\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$$

Tomado de "Historia de las Matemáticas", de Jean-Paul Collette, tomo I, siglo veintiuno editores, 1986.