ALGORITMO DE LA RAIZ CUADRADA

Luis Alfonso Erazo R.

INTRODUCCION

Debido a la familiarización, desde temprana edad, con algunos algoritmos de la aritmética, con el tiempo hemos olvidado recapacitar sobre la justificación de éstos. Más aún, con la popularización de las calculadoras, hasta los algoritmos en sí mismos están siendo olvidados.

Con el fin de invitar a los lectores a reflexionar sobre los algoritmos de la aritmética, presentamos la justificación para el de extracción de la raiz cuadrada de un número natural. Este tipo de reflexiones pueden ser útiles en el desempeño de la docencia y en la comprensión misma de los procesos o programas implantados en las máquinas calculadoras.

__PROPOSICION__ __1.__ La diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos, es igual al duplo del menor más uno.

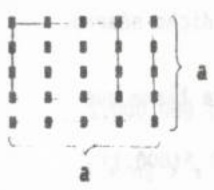
__Prueba.__ Sean a y a+1 dos números naturales consecutivos:

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

$$a^2 = a^2$$

$$\text{Diferencia:} \quad (a+1)^2 - a^2 = 2a + 1$$

Ilustración para a = 4:



$$5^2 - 4^2 = 2x4 + 1$$

__DEFINICION.__ Un número es cuadrado perfecto, cuando es el cuadrado de un número entero o fraccionario.

RAICES CUADRADAS

DEFINICION. Si un número A es el cuadrado de un número z, esto es si $z^2 = A$, se dice que z es la raíz cuadrada de A, y se escribe:

$$z = \sqrt{A}$$

Cuadrados no perfectos

Un número entero que no es cuadrado perfecto, no tiene raíz cuadrada exacta. Dicho número está comprendido entre dos cuadrados perfectos consecutivos, y las raíces de éstos, son las raíces cuadradas del número propuesto por defecto y por exceso, con menos de una unidad de aproximación.

Ejemplo. 60 está comprendido entre 49 y 64 que son cuadrados perfectos; o sea:

$$49 < 60 < 64; \qquad 7 < \sqrt{60} < 8$$

La raíz cuadrada de 60 será: 7 por defecto y 8 por exceso.

Raíz cuadrada por defecto

Sea N un número natural no cuadrado perfecto. Llamaremos raíz cuadrada entera por defecto (en menos de una unidad), al mayor número natural n cuyo cuadrado esté contenido en N.

La raíz cuadrada por defecto n, está definida por las desigualdades:

$$n^2 \leq N < (n+1)^2, \quad 0 \leq N - n^2 < 2n + 1$$

Residuo

Llámase residuo de la raíz cuadrada por defecto, la diferencia $N - n^2 = r$ entre el número dado y el mayor cuadrado contenido en dicho número.

De esta definición, según la proposición 1, se tiene que

$$N = n^2 + r, \quad \text{donde} \quad r < 2n + 1$$

o también,

$$N = n^2 + r, \quad \text{donde} \quad r \leq 2n$$

Ilustración para $N = 32$:

$N = 32$
$n = 5$
$r = 7$
$r < 2x5 + 1$ ó $r \leq 2x5$

DESCRIPCION DEL ALGORITMO

TEOREMA. Si en la extracción de la raíz cuadrada, el residuo no excede al duplo de la raíz, esta raíz es una raíz por defecto.

Demostración. Sean: N un número no cuadrado perfecto, a su raíz aproximada y $r \leq 2a$.

Se tiene: $N = a^2 + r, \quad N - a^2 \leq 2a$

Por tanto: $N \leq a^2 + 2a, \quad N < a^2 + 2a + 1$

Pero a^2 es menor que N, por consiguiente:

$$a^2 < N < (a+1)^2, \quad \text{de donde} \quad a < \sqrt{N} < a + 1$$

Lo que significa que a será la raíz por defecto de N.

PROPOSICION 2. El número de cifras de la raíz, es igual al número de periodos de dos cifras que se obtienen en el número dado. El último período a la izquierda puede contener una sola cifra.

Sea el número $N = 9635128$ dividido en 4 periodos de dos cifras, de derecha a izquierda; su raíz tendrá 4 cifras.

En efecto:

$$1.000.000 < 9.635.128 < 10.000.000$$

$$(1.000)^2 < 9.635.128 < (10.000)^2$$

$$1.000 < \sqrt{9.635.128} < 10.000$$

La raíz siendo mayor que 1.000 y menor que 10.000, será cuando más 9.999 y tendrá cuatro cifras.

PRIMER CASO: La raiz tiene solo una cifra.

Basta determinar su raiz por inspección o ensayo. Para N = 53, se tiene:

$$49 < N < 64, \quad 7 < \sqrt{N} < 8$$

La raiz cuadrada por defecto de 53, es 7.

SEGUNDO CASO: La raiz cuadrada tiene dos cifras.

a) Buscamos la cifra de las decenas de la raiz.

El número de decenas de la raiz cuadrada por defecto de un número, es igual a la raiz cuadrada por defecto de las centenas del número.

En efecto: Sea N = 7906 que contiene 79 centenas. Representando por d la raiz de 79, d será el número de decenas de la raiz de 7906.

Por hipótesis, se tiene:

$$(10d)^2 \leq 7900 < [10(d+1)]^2$$

Añadiendo 6 al segundo miembro, se tiene:

$$(10d)^2 < 7906$$

Como la diferencia entre 79 y $(d+1)^2$ es a lo menos 1, la diferencia entre 7906 y $10^2(d+1)^2$ será a lo menos 100; por consiguiente:

$$7906 < 10^2(d+1)^2$$

Las desigualdades:

$$(10d)^2 < 7906 < 10^2(d+1)^2$$
$$10d < \sqrt{7906} < 10(d+1)$$

demuestran que el número de decenas de la raiz es d. Entonces

$$N = (10d)^2 + r_1, \quad N - (10d)^2 = r_1 \qquad (1)$$

b) Buscamos la cifra de las unidades de la raiz.

Sea $10d + u$, la raiz. Podemos escribir:

$$N = (10d + u)^2 + r, \quad N = (10d)^2 + 2(10d)u + u^2 + r \tag{2}$$

de donde,

$$N > (10d)^2 + 2(10d)u$$

esto es,

$$u < \frac{N - (10d)^2}{2(10d)} = \frac{r_1}{10(2d)}$$

Calculando el residuo parcial $r_1 = N - (10d)^2$, se obtiene un límite superior para el residuo de las unidades; para hallar u se divide r_1 por $10(2d)$, primero por 10 y el número restante por 2d.

Ensayamos ahora el valor de u encontrado, restando $2(10d)u + u^2$ del residuo parcial r_1. Si la sustracción es posible, la cifra es admisible; la raíz será $10d + u$, según (2):

$$r = [N - (10d)^2] - [2(10d)u + u^2] \tag{3}$$

Si la sustracción no es posible, se ensaya con u-1, u-2, ... hasta que la operación sea admisible.

Obsérvese que: $2(10d)u + u^2 = [2(10d)u + u]u$, se encuentra <u>duplicando</u> la raiz de las decenas, agregando u y el resultado multiplicándolo por u.

<u>Disposición de las operaciones</u>

Calcular la raiz cuadrada de 7906.

a) El número tiene 79 centenas. Las decenas de la raiz son la raiz por defecto de 79, o sea d = 8. El residuo parcial es

$$r_1 = N - (10d)^2 = 7906 - (10 \times 8)^2 = 7906 - 6400 = 1506$$

$$\begin{array}{rr|l}
 & \sqrt{7906} & 80 \\
-(80)^2 = & -\underline{6400} & \\
r_1 = & 1506 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
\sqrt{79\ 06} & 8 \\
-\underline{64} & \\
15\ 06 &
\end{array}$$

b) El residuo parcial $r_1 = 1506$ dividido por 10 da 150 y este número se divide por $2d = 2x8 = 16$, o sea,

$$150 \div 16 = 9, \quad \text{de donde} \quad u = 9$$

Ensayamos si 9 es admisible:

$$\begin{aligned}
r &= [N - (10d)^2] - [2(10d) + u]u \\
&= 1.506 - [160 + 9]9 \\
&= 1.506 - 1621 = \text{negativo}
\end{aligned}$$

Siendo r negativo, el valor de $u = 9$ no es admisible. Por tanto ensayamos con $u = 8$.

$$\begin{aligned}
r &= [N - (10d)^2] - [2(10d) + u]u \\
&= 1.506 - [160 + 8]8 \\
&= 1.506 - 1.344 = 162
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr|l}
 & \sqrt{7906} & 80 + 8 \\
-(80)^2 = & -\underline{6400} & \\
r_1 = & 1506 & \\
-[2x80 + 8]8 = & -\underline{1344} & 168x8 \\
 & 162 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
\sqrt{79\ 06} & 88 \\
-\underline{64} & \\
15\ 06 & \\
-\underline{13\ 44} & 168x8 \\
1\ 62 &
\end{array}$$

<u>TERCER CASO</u>. La raíz cuadrada tiene más de dos cifras.

Calcular la raíz cuadrada de 538742. Como el número tiene tres períodos: 53 87 42 la raíz tendrá tres cifras.

a) Buscamos la cifra de las centenas de la raíz.

El número $N = 538742$ contiene 53 unidades de 10 mil. Representando por c la raíz de 53, c será el número de centenas de la raíz de N.

La prueba se realiza en forma similar al ordinal a) del caso anterior. Entonces

$$N = (100c)^2 + r^2, \qquad r_2 = N - (100c)^2 \tag{1}$$

b) Buscamos la cifra de las decenas de la raíz.

Sea $100c + 10d$, la raíz cuadrada por defecto. Entonces

$$N = (100c + 10d)^2 + r_1$$

$$N = (100c)^2 + 2(100c)(10d) + (10d)^2 + r_1 \qquad (2)$$

de donde,

$$N > (100c)^2 + 2(100c)(10d)$$

esto es,

$$d < \frac{N - (100c)^2}{2(100c)(10)} = \frac{r_2}{10[2(100c)]}$$

Calculando el residuo parcial $r_2 = N - (100c)^2$ se obtiene un límite superior para el residuo de las decenas; para hallar d se divide r_2 por $10[2(100c)]$, primero por 10 y el resto por $2(100c)$.

Ensayamos el valor encontrado para d, restando $2(100c)(10d) + (10d)^2$ del residuo parcial r_2. Si la sustracción es posible, la cifra d es admisible. La raíz será $100c + 10d$ y el residuo, según (2):

$$r_1 = [N - (100c)^2] - [2(100c)(10d) + (10d)^2] \qquad (3)$$

Si la sustracción no es posible, se ensaya con d-1, d-2, ..., hasta que la operación sea admisible.

Obsérvese que: $2(100c)(10d) + (10d)^2 = [2(100c) + 10d]10d$; se encuentra <u>duplicando</u> la raíz de las centenas, agregando 10d y multiplicando por 10d.

c) Buscamos la cifra de las unidades de la raíz.

Sea $100c + 10d + u$, la raíz cuadrada por defecto. Entonces,

$$\begin{aligned} N &= [100c + 10d + u]^2 + r \\ &= (100c)^2 + 2(100c)(10d) + (10d)^2 + 2(100c)u + 2(10d)u + u^2 + r \\ &= (100c)^2 + 2(100c)(10d) + (10d)^2 + 2[100c + 10d]u + u^2 + r \qquad (4) \end{aligned}$$

de donde,

$$N > (100c)^2 + 2(100c)(10d) + (10d)^2 + 2(100c + 10d)u$$

esto es,

$$u < \frac{[N - (100c)^2] - [2(100c)(10d) + (10d)^2}{10[2(10c + d)]} = \frac{r_1}{10[2(10c + d)]}$$

Calculando el residuo parcial r_1 se obtiene un límite superior para el residuo de las unidades; para hallar u se divide r_1 por $10[2(10c + d)]$, primero por 10 y el número restante por $2(10c + d)$.

Ensayamos el valor encontrado para u, restando $[2(100c + 10d) + u]u$ del residuo parcial r_1. Si la sustracción es posible, la cifra u es admisible. La raíz será $100c + 10d + u$ y el residuo r según (4):

$$r = [N - (100c)^2] - [2(100c)(10d) + (10d)^2] - [2(100c + 10d)u + u^2]$$
$$= r_2 - r_1 - [2(100c + 10d) + u]u$$

Si la sustracción no es posible, se ensaya con u-1, u-2, ..., hasta que la operación sea admisible.

Obsérvese que: $[2(100c + 10d) + u]u$ se encuentra duplicando la raíz cuadrada hasta ahora obtenida, agregando u y el número resultante multiplicándolo por u.

Disposición de las operaciones

Calcular la raíz cuadrada de 538742.

a) El número tiene 53 unidades de 10 mil. Las centenas de la raíz por defecto de 53 es 7, o sea c = 7. El residuo parcial es

$$r_2 = N - (100c)^2 = 538742 - (700)^2$$
$$= 538742 - 490000 = 48742$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{538742} & 700 \\ -(700)^2 = -\ 490000 & \\ \hline 48742 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{53\ 87\ 42} & 7 \\ -\ 49 & \\ \hline 4\ 87 & \end{array}$$

b) El residuo parcial r_2 dividido por 10 da 4874 y este número se divide por $2(100c) = 2(700) = 1400$; o sea

$$4874 \div 1400 = 3, \text{ de donde } d = 3$$

Averiguamos si 3 es admisible:

$$r_1 = [N - (100c)^2] - [2(100c) + 10d]10d$$

$$= 48742 - [1400 + 30]30$$

$$= 48742 - 42900 = 5842$$

$$\begin{array}{rr|l} & \sqrt{538742} & \underline{700 + 30} \\ -(700)^2 = & -\underline{490000} & \\ r_2 = & 48742 & \\ -[2\times700 + 30]30 = & -\underline{42900} & 1430\times30 \\ r_1 = & 5842 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{53\ 87\ 42} & \underline{73} \\ -\underline{49} & \\ 4\ 87 & \\ -\underline{4\ 29} & \underline{143\times3} \\ 58\ 42 & \end{array}$$

c) El residuo parcial r_1 = 5842 sividido por 10 da 584; este resultado se divide por 2[10c +d] = 2(73) = 146; o sea,

$$584 \div 146 = 3, \quad \text{de donde} \quad u = 3$$

Averiguamos si 3 es admisible:

$$r = [N - (100c)^2] - [2(100c)(10d) + (10d)^2] - [2(100c + 10d) + u]u$$

$$= 48742 - 42900 - [2(730) + 3]3$$

$$= 5842 - 4387 = 1453$$

$$\begin{array}{rr|l} & \sqrt{538742} & \underline{730 + 3} \\ -(700)^2 = & -\underline{490000} & \\ r_2 = & 48742 & \\ -[2\times700 + 30]30 = & -\underline{42900} & \\ r_1 = & 5842 & \\ -[2\times730 + 3]3 = & -\underline{4389} & \\ r = & 4153 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{53\ 87\ 42} & \underline{733} \\ -49 & \\ 4\ 87 & \\ -\underline{4\ 29} & 143\times3 \\ 58\ 42 & \\ -\underline{43\ 89} & \underline{1463\times3} \\ 14\ 53 & \end{array}$$

En forma muy abreviada, se acostumbra escribir:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{53\ 87\ 42} & 733 \\ \hline 4\ 87 & 143\times3 \\ \hline 58\ 42 & 1463\times3 \\ \hline 14\ 53 & \end{array}$$

Para raices cuadradas de más de tres cifras, se deduce inmediatamente la regla general:

1. Se divide el número en periodos de dos cifras, de derecha a izquierda; el último periodo puede constar de solo una cifra.

2. Se escribe en la raiz la mayor cifra cuyo cuadrado pueda restarse del primer período de la izquierda.

3. A la derecha del residuo se escribe el periodo siguiente y se separa con un punto la primera cifra de la derecha; se divide la parte de la izquierda por el duplo de la cifra escrita en la raiz.

4. El cociente es la cifra siguiente de la raiz u otra cifra de menor valor; si el producto de esta cifra por el duplo de la raiz hallada, puede restarse del primer residuo parcial, la cifra ensayada es exacta; si no la disminuimos de unidad en unidad hasta que la sustracción sea posible.

5. Se baja luego el siguiente periodo, se separa la última cifra, se divide la parte izquierda por el duplo de la raiz para hallar la tercera cifra del cociente; se comprueba su valor de manera semejante al paso anterior.

Se continúa el proceso hasta terminar la operación.

BIBLIOGRAFIA

[1]. VIEDMA C., Juan A. Lecciones de Aritmética, edit. Norma, séptima edición, 1964.

[2]. REUNION DE PROFESORES. Curso de aritmética.